Université Claude Bernard Lyon 1
M2 de Mathématiques : Groupes algébriques
Année 2013–2014

Calcul d'invariants

I Compléments de cours

1° Critère de réductivité

Montrer qu'un groupe algébrique G est le complexifié d'un groupe compact si et seulement s'il ne contient pas de sous-groupe fermé distingué isomorphe à $\mathbb{C}$.

2° Représentations et G-variétés

Soit G un groupe algébrique agissant sur une variété affine X. Montrer que l'on peut plonger X dans une représentation, c'est-à-dire qu'il existe une représentation de dimension finie W de G et une immersion fermée G-équivariante $\varphi : X \hookrightarrow W$.
Dans l'algèbre des fonctions $\mathbb{C}[X]$, montrer que l'on peut choisir un espace de dimension finie V qui engendre $\mathbb{C}[X]$ comme algèbre et est stable par G. En déduire une injection de X dans $W = V^*$.

II Exemples d'anneaux d'invariants

1° Tout petits exemples

On fait agir $\mathbb{C}^*$ sur $\mathbb{C}^2$ par : $t \cdot (x, y) = (tx, ty)$ (resp. $t \cdot (x, y) = (tx, t^{-1}y)$). Dans chaque cas :
a) décrire les orbites, préciser celles qui sont fermées ;
b) décrire l'algèbre des invariants $\mathbb{C}[x, y]^{\mathbb{C}^*}$;
c) étudier la correspondance entre orbites fermées et points de la variété correspondante.

2° Un exemple déplaisant

On fait agir $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{C}^2$ par :

$$\forall t \in \mathbb{C},\ \forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2, \quad t \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y + tx \end{pmatrix}.$$

a) Déterminer les orbites de cette action. Lesquelles sont fermées ?
b) Calculer $\mathbb{C}[x, y]^G$. Peut-on séparer les orbites par des polynômes invariants ?

3° Action naturelle du groupe symétrique

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On fait agir le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ par permutation des variables sur $R = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$.
a) Montrer que l'anneau des invariants $R^{\mathfrak{S}_n}$ est un anneau de polynômes en les polynômes symétriques élémentaires $e_1, \dots, e_n$.
L'algorithme classique montre que les e_i engendrent R^G. Pour montrer leur indépendance algébrique, on pourra recourir à un argument de dimension.
b) Décrire l'anneau des invariants $R^{\mathfrak{A}_n}$ sous le groupe alterné.
Montrer qu'un invariant pour $\mathfrak{A}_n$ est somme d'un invariant pour $\mathfrak{S}_n$ et d'un anti-invariant pour $\mathfrak{S}_n$ ($w \cdot f = \varepsilon(w)f$ pour $w \in \mathfrak{S}_n$, où ε est la signature).

4° Conjugaison et polynôme caractéristique

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On fait agir $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ par conjugaison. On note $R = \mathbb{C}[\mathscr{M}_n(\mathbb{C})]$ et σ_i les polynômes de R tels que

$$\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}), \quad \det(t\mathrm{I}_n - A) = t^n - \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \sigma_i(A),$$

où t est une indéterminée et I_n est l'identité.
Soit $\mathfrak{h}$ l'espace des matrices diagonales ; si $1 \leq i \leq n$, soit $x_i \in \mathfrak{h}^*$ la forme linéaire qui associe à $h \in \mathfrak{h}$ son i^{e} coefficient diagonal. Ainsi, $\mathbb{C}[\mathfrak{h}] = \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$.
a) Justifier rapidement que R^G contient $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$.
b) Vérifier que la restriction de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ à $\mathfrak{h}$ définit un morphisme $\gamma : R^G \to \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]^{\mathfrak{S}_n}$.
c) Montrer que γ est injectif.
Utiliser la densité de l'ensemble des matrices diagonalisables.
d) Montrer que γ est surjectif.
On a un prolongement plus ou moins évident de $\mathfrak{h}$ à $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.
e) Identifier explicitement les orbites fermées de G aux idéaux maximaux de R^G.

5° **Coniques affines à isométrie près**

Soit $G = \mathrm{O}_2(\mathbb{C}) \ltimes \mathbb{C}^2$ (resp. $\tilde{G}$) le groupe des isométries (resp. similitudes) affines du plan complexe. On fait opérer G sur l'espace $\mathscr{Q}$ des polynômes de degré ≤ 2 en deux variables x, y. Pour cela, on écrit un élément de $\mathscr{Q}$ sous la forme $q(x,y) = ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f$, ce qui identifie $q \in \mathscr{Q}$ à $(a,b,c,d,e,f) \in \mathbb{C}^6$. L'action[1] de $g \in G$ est donnée par : $g \cdot q(x,y) = q(g(x,y))$. Par abus, on note (a,b,c,d,e,f) la base évidente de $\mathscr{Q}^*$. De la sorte, $\mathbb{C}[\mathscr{Q}] = \mathbb{C}[a,b,c,d,e,f]$.
a) Vérifier qu'un élément de G (resp. $\tilde{G}$) est de la forme :

$$g : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} ux - \varepsilon vy + m \\ vx + \varepsilon uy + n \end{pmatrix},$$

où $\varepsilon = \pm 1$ et u, v, m et n sont des scalaires tels que $u^2 + v^2 = 1$ (resp. $u^2 + v^2 \neq 0$).
b) Vérifier que l'action peut se décrire par :

$$g \cdot A = {}^t g A g, \quad \text{où } g \in G,\ A = \begin{pmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{pmatrix},\ a, \ldots, f \in \mathbb{C}.$$

c) Vérifier que $\mathbb{C}[a,b,c]$ est stable par $\mathrm{O}_2(\mathbb{C})$. Montrer que l'on a :

$$\mathbb{C}[a,b,c]^{\mathrm{SO}_2(\mathbb{C})} = \mathbb{C}[a,b,c]^{\mathrm{O}_2(\mathbb{C})} = \mathbb{C}[T,E] \quad \text{où } \begin{cases} T = a + c, \\ E = ac - b^2. \end{cases}$$

Le groupe $\mathrm{SO}_2(\mathbb{C})$ est isomorphe à $\mathbb{C}^*$: diagonaliser cette action en chaque degré. On pourra introduire $R = a - c + 2ib$ et $S = a - c - 2ib$.
d) Montrer que $\mathbb{C}[a,b,c,d,e,f]^G = \mathbb{C}[T,E,D]$, où $D = \det(A)$, A comme ci-dessus.
Plonger dans $\widehat{R} = R[E^{-1}]$. Vérifier que $\widehat{R} = \mathbb{C}[a,b,c,d,e,D,E^{-1}]$. Montrer qu'un polynôme invariant $P \in \widehat{R}^G$ n'a pas de terme en d ou e, par exemple en dérivant par rapport à m et n en $m = n = 0$. Puis appliquer la question précédente.
e) Vérifier que l'on retrouve la classification des coniques à isométries près, au moins pour les coniques à centre. (Autrement dit, que la donnée de $(\tau, \varepsilon, \delta) \in \mathbb{C}^3$, $e \neq 0$, détermine une unique classe de coniques avec $T = \tau$, $E = \varepsilon$, $D = \delta$.)
f) Si $(\tau, \varepsilon, \delta) \in \mathbb{R}^3$, $\varepsilon \neq 0$, la conique correspondante est réelle, elle a une excentricité e. Montrer que l'on a :

$$(e^2 - 1) + \frac{1}{e^2 - 1} = 2 - \frac{\tau^2}{\varepsilon}.$$

Cela détermine-t-il toujours e de façon unique ? Comment définir l'excentricité sur $\mathbb{C}$?

1. C'est une action à droite mais ce n'est pas grave parce qu'on ne veut que les invariants ; c'est plus simple de ne pas avoir d'exposants -1 dans les formules.

6° **Formes quadratiques binaires**

On reprend l'espace $\mathbb{C}a \oplus \mathbb{C}b \oplus \mathbb{C}c$ décrivant les formes quadratiques $q(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$, sur lequel on fait à présent agir $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$.

a) Montrer que l'on a : $\mathbb{C}[a, b, c]^G = \mathbb{C}[E]$ où $E = b^2 - ac$ est le discriminant.

D'après l'exercice précédent, $\mathbb{C}[a, b, c]^G \subset \mathbb{C}[T, E]$ *où* $T = a + c$. *Pour* $P \in \mathbb{C}[T, E]$, *constater que* $\mathrm{diag}(t, t^{-1})$ *(*$t \in \mathbb{C}^*$*) agit non trivialement sur* P *dès que* P *dépend de* T.

b) Décrire les orbites, préciser celles qui sont fermées.

Il pourra être utile de factoriser une forme q.

7° **Formes cubiques**

On s'intéresse aux formes cubiques binaires, c'est-à-dire aux polynômes homogènes $f(x, y) = ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3$. L'espace de ces formes, $\mathscr{T}$, admet une action naturelle de $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$.

a) Déterminer les orbites de G dans $\mathscr{T}$. Préciser celles qui sont fermées.

Factoriser une forme f. *On rappelle que* G *est simplement* 3*-transitif sur les droites de* $\mathbb{C}^2$.

b) Exprimer que $f(x, 1)$ ou $f(1, y)$ admet une racine multiple par l'annulation d'un déterminant – essentiellement un résultant de $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$; on l'appelle discriminant.

c) Montrer que le discriminant engendre l'algèbre des invariants $S(\mathscr{T})^G$.

III Formule de Molien et applications

1° **Série de Poincaré**

Si $R = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} R_n$ est une algèbre graduée ($R_n R_p \subset R_{n+p}$) ou plus généralement un espace vectoriel gradué, on définit sa série de Poincaré par :

$$P_R(t) = \sum_{n \geq 0} \dim_{\mathbb{C}}(R_n)\, t^n \quad \text{(où } t \text{ est une indéterminée).}$$

a) Calculer la série de Poincaré de l'algèbre symétrique $S(V)$ d'un espace V de dimension d.

b) On suppose que R est intègre et engendrée par r éléments homogènes de degrés $d_1, \ldots, d_r$. Montrer qu'existe un polynôme $F \in \mathbb{Z}[t]$ tel que

$$P_R(t) = \frac{F(t)}{(1 - t^{d_1}) \cdots (1 - t^{d_r})}.$$

Procéder par récurrence sur r. *Pour* $r = 1$, *c'est facile. Pour* r *quelconque, on note* $\varphi : R \to R$, $h \mapsto f_r h$ *et* $S = \mathrm{Im}\,\varphi$. *Montrer que* $P_R(t) = P_R(t) + P_{R/S}(t)$ *et que* $P_S(t) = t^{d_r} P_R(t)$.

Dans la suite de ce paragraphe, G est un groupe fini et V une représentation de dimension finie de G. On fait opérer G sur l'algèbre symétrique $S(V)$ et on s'intéresse aux invariants $S(V)^G = \bigoplus_{n \geq 0} S^n(V)^G$, où $S^n(V)^G$ désigne les invariants de la n^{e} puissance symétrique de V. La série de Poincaré correspondante est notée $P_{G:V}(t)$.

c) Calculer la série de Poincaré pour la représentation naturelle de $G = \mathfrak{S}_n$ ou $G = \mathfrak{A}_n$ agissant sur $\mathbb{C}^n$.

2° **Énoncé et preuve**

a) Soit W une représentation de dimension finie de G. Montrer que $\theta = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g$ est un projecteur G-équivariant [2] de W sur l'espace W^G des points fixes.

Classique : montrer que $\mathrm{Im}\,\theta \subset W^G$, *que* $\theta|_{W^G} = \mathrm{Id}_{W^G}$, *puis que* $\theta^2 = \theta$ *et enfin que* $\mathrm{Im}\,\theta = W^G$.

b) (Mêmes notations.) En déduire que $\dim W^G = \mathrm{tr}\,\theta$.

2. C'est-à-dire que $\theta g = g\theta$ pour tout g de G.

c) Montrer que l'on a :

$$P_{G,V}(t) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \frac{1}{\det(\mathrm{I}_n - tg)}.$$

Réduire la formule à $\det(\mathrm{I}_n - tg)^{-1} = \sum_{n \geq 0} \mathrm{tr}_{S^n(V)}(g) t^n$ *pour tout* g*, que l'on démontre en diagonalisant* g*.*

3° **Cône (singularité de type A_1)**

On fait agir l'élément non trivial de $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ sur $V = \mathbb{C}^2 = \mathbb{C}x \oplus \mathbb{C}y$ comme $-\mathrm{Id}$.

a) Montrer que $S(V)^G = \mathbb{C}[x^2, xy, y^2]$.

b) Graduer l'algèbre $T = \mathbb{C}[u, v, w]/(uv - w^2)$ et calculer sa série de Poincaré.

c) Montrer que l'application $u \mapsto x^2$, $v \mapsto y^2$, $w \mapsto xy$ induit un isomorphisme $T \simeq S(V)^G$.

4° **Singularités de type A**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On fait agir un générateur de $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sur $V = \mathbb{C}^2 = \mathbb{C}x \oplus \mathbb{C}y$ comme $e^{2i\pi/n}\mathrm{Id}$.

a) Montrer que $S(V)^G = \mathbb{C}[x^n, xy, y^n]$ et calculer sa série de Poincaré.

b) Graduer l'algèbre $T = \mathbb{C}[u, v, w]/(uv - w^n)$ et calculer sa série de Poincaré.

c) Montrer que l'application $u \mapsto x^n$, $v \mapsto y^n$, $w \mapsto xy$ induit un isomorphisme $T \simeq S(V)^G$.

5° **Groupe quaternionique**

Soit G le groupe d'ordre 8 engendré par

$$\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On le fait opérer sur $V = \mathbb{C}^2 = \mathbb{C}x \oplus \mathbb{C}y$ et sur $S(V) = \mathbb{C}[x, y]$.

a) Avec la formule de Molien, montrer que $P_{G:\mathbb{C}^2}(t) = \dfrac{1 - t^{12}}{(1 - t^4)^2(1 - t^6)}$.

b) On pose $A = x^4 + y^4$, $B = x^2y^2$ et $C = xy(x^4 - y^4)$. Vérifier qu'ils sont G-invariants.

c) Calculer la série de Poincaré de $\mathbb{C}[A, B]$.

Remarquer que A et B sont algébriquement indépendants.

d) Vérifier que $C^2 = A^2B - 4B^3$ et, avec la série de Poincaré, que $S(V)^G = \mathbb{C}[A, B] + C\mathbb{C}[A, B]$.

e) Montrer finalement que l'on a : $S(V)^G \simeq \mathbb{C}[A, B, C]/(C^2 - A^2B + 4B^3)$.

6° **Sous-groupes finis de $\mathrm{SU}_2(\mathbb{C})$**

Partant de la liste des sous-groupes finis de $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$, établir celle des sous-groupes finis de $\mathrm{SU}_2(\mathbb{C})$. Pour chacun d'entre eux, disons G, déterminer $S(V)^G$.