Université Claude Bernard Lyon 1
M2 de Mathématiques : Groupes algébriques
Année 2013–2014

Un peu de géométrie projective

I Décomposition de Jordan

Référence : [2], § 2.4.

1° Algèbre linéaire

On démontre ici des propriétés laissées en exercice en cours. On fixe des espaces vectoriels complexes de dimension finie V, W... On rappelle qu'un endomorphisme de V est *semi-simple* si V admet une base formée de vecteurs propres ; qu'un élément g de $\mathrm{GL}(V)$ est *unipotent* si $g - \mathrm{Id}_V$ est nilpotent ; (sur $\mathbb{C}$) il revient au même de dire que sa seule valeur propre est 1. On commence par un rappel.

Proposition. *Soit $a \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$. Il existe $a_s, a_n \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ uniques tels que : (i) $a = a_s + a_n$; (ii) a_s est semi-simple et a_n est nilpotent ; (iii) $a_s a_n = a_n a_s$. De plus, a_s et a_n sont des polynômes en a.*

a) Soient $a \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ et $b \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(W)$. Montrer que si a et b sont semi-simples (resp. nilpotents, resp. unipotents), alors $a \oplus b \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V \oplus W)$ et $a \otimes b \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V \otimes W)$ le sont aussi.
b) Soient $a \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ et W un sous-espace vectoriel stable par a. Montrer que W est stable par a_s et a_n et que la décomposition de Jordan commute à la restriction : $\big(a|_W\big)_s = a_s|_W$ et $\big(a|_W\big)_n = a_n|_W$. Décrire la décomposition de Jordan de l'endomorphisme de V/W induit par a.
c) Soient $a \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$, $b \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(W)$ et $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, W)$ tel que $f \circ a = b \circ f$. Démontrer que l'on a : $f \circ a_s = b_s \circ f$ et $f \circ a_n = b_n \circ f$.
Écrire f comme composée de $V \to V \oplus W$, $v \mapsto (v, f(v))$ et de la projection $V \oplus W \to W$.
d) Établir la version multiplicative suivante de la décomposition de Jordan.

Proposition. *Soit $g \in \mathrm{GL}(V)$. Il existe $g_s, g_u \in \mathrm{GL}(V)$ uniques tels que : (i) $g = g_s g_u$; (ii) g_s est semi-simple et g_u unipotent ; (iii) $g_s g_u = g_u g_s$. De plus, g_s et g_u sont des polynômes en g.*

e) Établir des propriétés analogues à b) et c) pour la décomposition de Jordan multiplicative.
f) Soient $g \in \mathrm{GL}(V)$ et $h \in \mathrm{GL}(W)$. Décrire la décomposition de Jordan de $g \oplus h \in \mathrm{GL}(V \oplus W)$ et de $g \otimes h \in \mathrm{GL}(V \otimes W)$.

2° Applications de la décomposition de Jordan

Ici, on donne quelques applications de la décomposition de Jordan dans les groupes algébriques.
a) Montrer que l'ensemble $G_u = \{g \in G,\ g = g_u\}$ des éléments *unipotents* de G est fermé.
On peut supposer que G est un sous-groupe fermé de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ (pourquoi ?).
Donner un exemple où $G_s = \{g \in G,\ g = g_s\}$ des éléments *semi-simples* n'est pas ouvert et un exemple où G_s n'est pas fermé.
b) Supposons que $G = G_u$ et soit $\varphi : G \to \mathrm{GL}(V)$ une représentation de dimension finie. Montrer que si V est un G-module irréductible, alors sa dimension est 1.
Par le « théorème de densité de Jacobson-Chevalley » (voir [1]), $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ est engendré par les $\varphi(g)$ ($g \in G$). Vérifier que $\mathrm{tr}((\mathrm{Id}_V - \varphi(g))\varphi(h)) = 0$ pour tous $g, h \in G$. En déduire que $\mathrm{tr}((\mathrm{Id}_V - \varphi(g))h) = 0$ pour tout $h \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(G)$ et conclure.
Pour V quelconque, montrer qu'il existe une base de V dans laquelle la matrice de $\varphi(g)$ est triangulaire supérieure pour tout g.
Procéder par récurrence sur la dimension de V.
c) On suppose que $G = G_u$. Montrer que G est nilpotent (et donc résoluble).

d) On suppose encore $G = G_u$. Montrer que dans toute action de G sur une variété affine X, toutes les orbites sont fermées (théorème de Kostant-Rosenlicht).
Soit $\mathscr{O}$ une orbite. On peut supposer que $\mathscr{O}$ est dense dans X, donc ouverte (pourquoi ?). Montrer l'existence de f non nulle fixée par G dans $\mathscr{I}_X(Y)$, où $Y = X \setminus \mathscr{O}$. Montrer que f est constante et en déduire que $\mathscr{I}_X(Y) = \mathbb{C}[X]$.

II Variétés projectives linéaires

On fixe un entier naturel n non nul et on considère l'espace projectif $\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) = \mathbb{P}(\mathbb{C}^{n+1})$. On note $[x_0 : x_1 : \cdots : x_n]$ les coordonnées projectives (autrement dit, $(x_0, \ldots, x_n)$ est une base du dual de $\mathbb{C}^{n+1}$ ou encore : $\mathbb{P}^n$ est « le Proj » de $\mathbb{C}[x_0, \ldots, x_n]$). Un hyperplan de $\mathbb{P}^n$ est le lieu des zéros d'un polynôme homogène de degré 1, c'est-à-dire une sous-variété projective définie par une équation de la forme $\sum_{i=0}^n a_i x_i = 0$ avec $(a_0, \ldots, a_n)$ non nul dans $\mathbb{C}^{n+1}$. Une variété projective linéaire est une intersection d'hyperplans.

1° Intersections

a) Relier les différentes notions de dimension en jeu (dimension de l'espace vectoriel).
b) L'intersection de deux droites distinctes dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ est un point.
c) L'intersection de deux sous-espaces de dimensions d et e n'est pas vide si $d + e \geq n$.

2° Décomposition en cellules

Pour $k \in \{0, \ldots, n\}$, on note : $P_k = \mathscr{V}(x_{k+1}, \ldots, x_n)$. Vérifier que P_k est isomorphe à $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$ et que que l'on a une décomposition en cellules :

$$\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^n \,\dot\cup\, \mathbb{C}^{n-1} \,\dot\cup\, \cdots \,\dot\cup\, \mathbb{C} \,\dot\cup\, \{*\}$$

où $\mathbb{C}^k = P_k \setminus P_{k-1}$ $(0 \leq k \leq n)$.

3° Incidence

Soit $V = \mathbb{C}^3$. On identifie une droite D de V à un point de $\mathbb{P}(V)$ et un plan P de V à son équation à scalaire près, c'est-à-dire un point de $\mathbb{P}(V^*)$. Montrer que l'ensemble des couples $(D, P) \in \mathbb{P}(V) \times \mathbb{P}(V^*)$ tels que $D \subset P$ est un fermé.
À suivre.

4° Deux compactifications du plan

a) Montrer que $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ et $\mathbb{P}^2$ ne sont pas isomorphes.
On pourra montrer que deux courbes se coupent toujours dans $\mathbb{P}^2$ et exhiber deux courbes « parallèles » dans $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$.
b) Montrer néanmoins qu'ils sont birationnellement équivalents, *i.e.* qu'existe un isomorphisme entre un ouvert dense de l'un et un ouvert dense de l'autre.

III Coniques projectives

On note $[x : y : z]$ les coordonnées projectives dans $\mathbb{P}^2$. On appelle *conique projective* une sous-variété projective de $\mathbb{P}^2$ définie par une équation homogène de degré 2 de la forme :

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dxz + 2eyz + fz^2 = 0.$$

1° Singularités ? où ça ?

a) Dans $\mathbb{C}^3$, on considère le cône d'équation $x^2 + yz = 0$. Montrer qu'il n'est pas lisse.
b) Dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, on considère la conique d'équation $x^2 + yz = 0$. Montrer qu'elle est lisse.

2° Une seule conique ?

a) Décrire l'action de $\mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$ sur les formes quadratiques de $\mathbb{C}^3$.

b) En déduire que toute conique non dégénérée (sens ?) est dans l'orbite sous $\mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$ de la conique d'équation $xy + z^2 = 0$. Plus généralement, trouver une conique dans chaque orbite.

3° Une seule conique ? (v. 2)

a) Décrire les coniques qui passent par les points $[0:0:1]$, $[0:1:1]$, $[1:0:1]$, $[1:1:1]$.
b) Soit (a,b,c,d) un repère projectif du plan, *i.e.* quatre points de $\mathbb{P}^2$ dont trois quelconques ne sont pas alignés. Montrer qu'il existe une homographie unique $g \in \mathrm{PGL}_3(\mathbb{C})$ telle que $g(a) = [0:0:1]$, $g(b) = [0:1:1]$, $g(c) = [1:0:1]$, $g(d) = [1:1:1]$.
c) En déduire qu'il n'y a qu'une seule orbite de coniques non dégénérées sous $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{C})$.

4° Polarité

Soit $\mathscr{C}$ une conique non dégénérée et soit m un point de $\mathbb{P}^2$. Soient $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ deux droites (projectives) contenant m. Considérons les intersections : $\mathscr{D} \cap \mathscr{C} = \{a,b\}$ et $\mathscr{D}' \cap \mathscr{C} = \{a',b'\}$.
a) On suppose que les quatre points (a,a',b,b') forment un repère projectif. Soient $e = (ab') \cap (a'b)$ et $f = (aa') \cap (bb')$. Montrer que le plan vectoriel correspondant à la droite (ef) est orthogonal à la droite vectorielle correspondant à m pour la forme quadratique qui définit $\mathscr{C}$.
En particulier, $m^* = (ef)$ ne dépend que de $\mathscr{C}$ et m : on l'appelle polaire de m par rapport à $\mathscr{C}$.
b) Étudier les cas où l'une ou l'autre des droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ est tangente à $\mathscr{C}$.

5° Un groupe algébrique affine

a) On se place provisoirement dans l'espace affine $\mathbb{C}^2$, où l'on considère l'hyperbole $\mathscr{H}$ d'équation $xy = 1$. On note e le point $(1,1)$. Étant donnés deux points $m = (x,y)$ et $m' = (x',y')$ de $\mathscr{H}$, on appelle $\Delta_{mm'}$ la parallèle à la droite (mm') (ou la tangente à $\mathscr{H}$ en m si $m = m'$) qui passe par e et on note $m * m'$ le « deuxième » point d'intersection de $\Delta_{mm'} \cap \mathscr{H}$ (si $\Delta_{mm'}$ est tangente à $\mathscr{H}$ en e, on prend $m * m' = e$). Montrer que la loi $*$ fait de $\mathscr{H}$ un groupe algébrique. Le reconnaître.
b) Jouer au même jeu avec la parabole $\mathscr{P}$ d'équation $y = x^2$ et $e = (0,0)$.
c) Dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, soient $\mathscr{C}$ une conique non dégénérée et $\mathscr{D}$ une droite. Vérifier que $\mathscr{C} \cap \mathscr{D}$ est formée de deux points ou d'un point double (sens ?).
On note $\mathscr{H} = \mathscr{C} \setminus \mathscr{D}$ et on fixe un point e un point de $\mathscr{H}$. Pour $m, m' \in \mathscr{H}$, on note $\Delta_{mm'}$ la droite (ep) où p est l'intersection $\mathscr{D} \cap (mm')$ (la droite (mm') est la tangente à $\mathscr{H}$ en m si $m = m'$) et $m * m'$ le deuxième point d'intersection de (ep) et $\mathscr{H}$ (sens ? existence ?). Montrer que la loi $*$ fait de $\mathscr{H}$ un groupe algébrique. Le reconnaître dans les deux situations géométriques possibles.
d) Quel théorème de géométrie capture l'associativité de $\mathscr{H}$?
e) Quelle situation inédite pourrait-on obtenir en faisant de même sur $\mathbb{R}$?

IV Loi de groupe sur les cubiques lisses

Source : cours de Marc Hindry, `http://www.math.jussieu.fr/~hindry/Courbes-ell.pdf`.

1° Théorème des neuf points

a) Soient $p_1, \ldots, p_8$ huit points de $\mathbb{P}^2$ tels que 4 d'entre eux ne sont jamais alignés et 7 d'entre eux ne sont jamais sur une même conique. On va montrer que l'espace E des polynômes homogènes de degré 3 qui s'annulent en ces points est de dimension 2.

1. Soit n la dimension cherchée. Montrer que $n \geq 2$.
2. On suppose que les points p_1, p_2, p_3 sont sur la même droite et on choisit p_9 sur cette droite. Montrer que le sous-espace des F de E qui s'annulent aussi en p_9 est de dimension 1.
   On rappelle que par 5 points dont 4 ne sont pas alignés, il passe exactement une conique.

3. On suppose que $p_1, \ldots, p_6$ sont sur une même conique d'équation $Q = 0$. On fixe p_9 sur cette conique. Montrer que le sous-espace des F de E qui s'annulent aussi en p_9 est de dimension 1.
4. On suppose que 3 points ne sont jamais alignés et que 6 points ne sont jamais conconiques. On fixe p_9 et p_{10} sur la droite $(p_1 p_2)$ et on suppose que $n \geq 3$. Montrer qu'il existe un élément F de E qui s'annule en $p_1, \ldots, p_{10}$, que F se factorise sous la forme LQ où Q est l'équation d'une conique contenant $p_3, \ldots, p_8$.
5. Conclure.

b) Soient $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ deux cubiques dont une est irréductible. Soient $p_1, \ldots, p_9$ les points d'intersections de $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$. On suppose que $p_1, \ldots, p_8$ sont distincts. Montrer que si une cubique $\mathscr{C}$ contient $p_1, \ldots, p_8$, elle contient p_9.

2° Loi de groupe sur une cubique lisse

Soient $\mathscr{C}$ une cubique lisse et $e \in \mathscr{C}$. Soient p et q deux points distincts de $\mathscr{C}$. On note $p \circ q$ le troisième point d'intersection de la droite (pq) et $\mathscr{C}$ (pas nécessairement distinct de p ou q). Si $p = q$, on fait de même en remplaçant (pq) par la tangente à $\mathscr{C}$ en p. On pose $p + q = e \circ (p \circ q)$. En notant $e' = e \circ e$, on pose $-p = e' \circ p$.

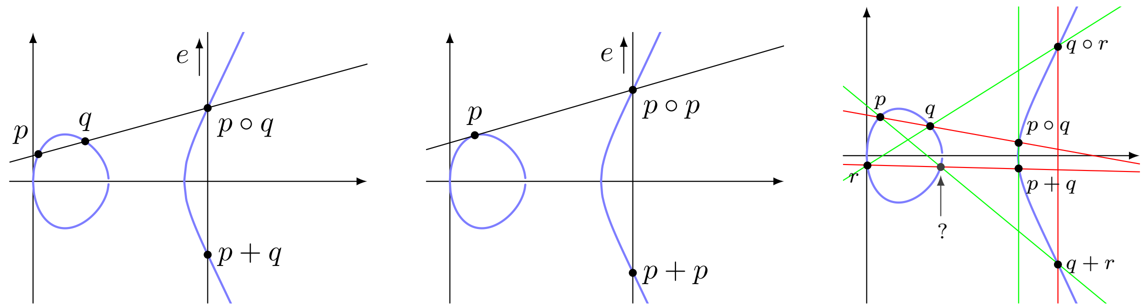

Figure 1 – Loi de groupe sur une cubique

a) Montrer que la loi $+$ est commutative, que e est neutre et que $p + (-p) = e$ pour tout p.
b) Montrer l'associativité de la loi $+$.
On fixe $p, q, r \in \mathscr{C}$. Il faut montrer que les points $p \circ (q + r)$ et $(p + q) \circ r$ coïncident. Introduire les cubiques d'équations $\ell_{p,q} \ell_{e,q+r} \ell_{p+q,r}$ et $\ell_{q,r} \ell_{e,p+q} \ell_{p,q+r}$, où $\ell_{p,q}$ est une équation de la droite (pq), etc., et appliquer le lemme des neuf points : cela marche « en général » et on prolonge.
c) **Exemple.** Soient g_2 et g_3 deux complexes, on considère la cubique $\mathscr{C}$ d'équation

$$zy^2 = 4x^3 - g_2 x z^2 - g_3.$$

Montrer que $\mathscr{C}$ est lisse si et seulement si $g_2^3 = 27 g_3^2$.
Les dessins ci-dessus correspondent à $4x^3 - g_2 x - g_3 = 4x(x-1)(x-2)$ et $e = [0:1:0]$.

Bibliographie

[1] Serge Lang : *Algebra*, volume 211 de *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, third édition, 2002.

[2] T. A. Springer : *Linear algebraic groups*. Modern Birkhäuser Classics. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, second édition, 2009.