Université Claude Bernard Lyon 1
Département de Mathématiques

Année universitaire 2013-2014
Agrégation

FEUILLE D'EXERCICES
ALGÈBRE BILINÉAIRE

1. Formes quadratiques - Manipulations élémentaires

Exercice 1. (1) Soit $q(x) = x_1^2+6x_2^2+56x_3^2-4x_1x_2+14x_1x_3-36x_2x_3$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Ecrire q dans la base $(f_1 = (1,0,0),\ f_2 = (2,1,0),\ f_3 = (-3,2,1))$.

(2) Simplifier l'expression suivante $q(x+y)+q(y+z)+q(x+z)-q(x+y+z)$ où q est une forme quadratique quelconque.

(3) Déterminer les signatures des formes suivantes :
   (a) $q_1(x) = x_1^2+x_2^2+x_3^2-4(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)$;
   (b) $q_2(x) = x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_1x_2-x_1x_3-x_2x_3$;
   (c) $q_3(x) = (x_1-x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_1-x_3)^2$;
   (d) $q_4(x) = \sum_{i<j} x_ix_j$ sur $\mathbb{R}^4$.

(4) Trouver la forme bilinéaire associée à la forme quadratique suivante $q(x) = x_1^2+3x_2^2+ -4x_1x_2$.

Exercice 2. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et q une forme quadratique non dégénérée sur E. Montrer que tout vecteur isotrope est inclus dans un plan U tel que la restriction de q à U a signature $(1,1)$. Un tel plan est dit *hyperbolique*.

Exercice 3. Soit $E = \mathbb{R}^{2n}$. Soit q une frome quadratique non dénénérée sur E. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(1) La signature de q est (n,n) ;
(2) Il existe un sous-espace totalement isotrope de dimension n dans E.

Exercice 4. Soit q une forme quadratique sur E. Montrer que la restriction de q à un supplémentaire du noyau de q est non dégénérée.

Exercice 5. Quelle est la signature de la forme quadratique suivante sur $M_n(\mathbb{R})$:
$$A \longmapsto \mathrm{tr}(A^2).$$

2. Vrai ou Faux

Exercice 6. Ici, F désigne un sous-ev de E et q une forme quadratique sur E. Les assertions suivantes sont-elles vrai ou fausses.

(1) Si q est non dégénérée alors $q_{|F}$ l'est.
(2) Si q est non dégénérée et $q(x) = 0$ alors $x = 0$.
(3) L'orthogonal de l'orthogonal de F est F.
(4) Les formes $x_1^2-2x_2^2$ et $x_1^2-3x_2^2$ sont équivalentes sur $\mathbb{Q}$.
(5) Deux formes non dégénérée sur $\mathbb{C}^n$ sont équivalentes.
(6) Le groupe orthogonal est distingué dans le groupe linéaire.
(7) Tout supplémentaire au noyau de q est orthogonal au noyau.

3. Théorème d'Inertie

Exercice 7. Trouver sans calcul la signature de la forme quadratique de $\mathbb{R}^n$ suivante :
$$(x_1 + \cdots + x_n)^2 - (x_1^2 + \cdots + x_n^2).$$

4. Groupe orthogonal

Exercice 8. Soit E l'espace des matrices 2×2 à coef réels. Soit S et T les sous-espaces des matrices symétriques et antisymétriques respectivement. Posons $q(X) = \det(X)$.

(1) Montrer que q est une forme quadratique sur E. Quelle est sa signature ? Ecrire sa matrice dans la base canonique.
(2) Soit b la forme polaire de q. Trouver X_1 telle que $b(X_1, \cdot) = \mathrm{tr}$.
(3) On considère l'action de GL_2 sur E donnée par $g.M = gM^tg$. Vérifier qu'il sagit bien d'une action linéaire.
(4) Montrer que l'image de SL_2 dans $\mathrm{GL}(E)$ est incluse dans $SO(q)$.
(5) Montrer que S et T sont stables par cette action.

5. Matrices symétriques

Exercice 9. Soit A, B deux matrices symétriques réelles positives. On suppose que pour tout$X \in \mathbb{R}^n, 0 \leq {}^tXAX \leq {}^tXBX$. Montrer que $\det A \leq \det B$.

Exercice 10. Soit E un espace euclidien de dimension n. Soit H un hyperplan de E. Soit A un endomorphisme symétrique de E et q la forme quadratrique associée. Soit $\lambda_1 \leq \cdots \lambda_n$ les valeurs propres de A. Soit $\mu_1 \leq \cdots \leq \mu_{n-1}$ les valeurs propres de la restriction de q à H.
Montrer que pour $k \leq n-1$, on a :
$$\lambda_k \leq \mu_k \leq \lambda_{k+1}.$$

6. Un peu de topologie

Exercice 11. Montrer que la fonction que à une forme quadratique associe le premier entier p de sa signature est semi-continue inférieurement.

Exercice 12. Inégalité de Hadamard. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. On note $C_1, \cdots, C_n$ les vecteurs colones de A. Montrer que
$$|\det(A) \leq \|C_1\| \cdot \cdots \cdot \|C_n\|.$$