Exercices sur les déterminants

Exercice 1. Soit A une matrice carrée d'ordre n. Quel est le rang de la comatrice de A ?

Exercice 2.

1. Calculer le polynôme caractéristique de la matrice compagnon:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_1 \\ 1 & & & & \\ & \ddots & & & \vdots \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & 1 & a_n \end{pmatrix}.$$

2. Calculer le déterminant de la matrice circulante:

$$B = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \cdots & \cdots & a_{n-2} \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ a_1 & a_2 & \cdots & \cdots & a_0 \end{pmatrix}.$$

3. Calculer le determinant de VanDerMonde:

$$C = (\alpha_i^{j-1}).$$

Exercice 3. Calculer le déterminant suivant :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & \cdots & \cdots & a_n \\ b_1 & 1 & & & \\ \vdots & & \ddots & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ b_n & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4. Montrer la formule suivante :

$$\begin{vmatrix} A & B \\ -B & A \end{vmatrix} = \det\Big((A+iB)(A-iB)\Big).$$

Exercice 5. Soit u, v deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$.

1. Montrer que $|det(u, v)|$ est l'aire du paralellogramme.

2. On suppose que u et v sont à coordonnèes entières. Montrer que $|det(u, v)|$ est le nombre de points entiers dans l'ensemble suivant :

$$\{\alpha u + \beta v \mid 0 \leq \alpha,\, \beta < 1\}.$$

Exercice 6. Une caractérisation du déterminant. Soit $\Delta : \mathrm{M}_n(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}$ une application continue telle que

1. $\Delta(AB) = \Delta(A)\Delta(B)$ pour tout A, B; et,

2. $\Delta(\lambda I_n) = \lambda^n$.

Montrer que $\Delta = \det$.

Exercice 7. Calculer le déterminant suivant :

$$\begin{pmatrix} x + a_1 & x & \cdots & x \\ x & x + a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & x \\ x & \cdots & x & x + a_n \end{pmatrix}.$$