Exercices d'algèbre linéaire II : Dualité

Exercice 1. Soit $E = \mathbb{K}_n[X]$. Pour $i = 0, \ldots, n$, on pose $f_i(P) = P'(i)$. Montrer que $(f_0, \ldots, f_n)$ est une famille liée de E^*.

Exercice 2. Soit $E = \mathbb{K}_n[X]$. Soit $\varphi \in E^*$ tel que $\varphi((X-a)^2P) = 0$ pour tout $P \in \mathbb{K}_{n-2}[X]$. Que peut-on dire de φ ?

Exercice 3. Soit E un ev de dimension finie et $f, f_1, \ldots, f_p \in E^*$. Montrer que f est combinaison linéaire des f_i si et seulement si $\mathrm{Ker} f \supset \mathrm{Ker} f_1 \cap \ldots \cap \mathrm{Ker} f_p$.

Exercice 4. Soit E un ev de dimension n, $\mathcal{F} = (e_1, \ldots, e_{n-1})$ une famille libre de E et $f \in E^*$ non nulle. Donner une CNS pour que l'on puisse completer $\mathcal{F}$ en une base de E de sorte que $f = e_n^*$.

Exercice 5. Soit E un ev de dimension n et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Soit $\mathcal{B}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ une base obtenue de $\mathcal{B}$ par une opération élémentaire (échange, multiplication par un scalaire ou ajout d'un multiple d'un élément à un autre).

Étudier l'effet de ces opérations élémentaires sur les bases duales.

Exercice 6. Quel est le dual de l'espace des polynômes ?

Exercice 7. Déterminer dans $M_n(\mathbb{K})$ le sous-espace vectoriel engendré par les matrices de la forme $AB - BA$.

Exercice 8. Soit E l'espace euclidien de dimension 2. On identifie alors E et E^*, de sorte que E^* est aussi euclidien.

Soit $\mathcal{B} = (v, w)$ une base de E. On considère $\mathcal{B}^* = (v^*, w^*)$ la base duale.

Exprimer l'angle (v^*, w^*) en fonction de l'angle (v, w).