Exercices sur la réduction.

Exercice 1. Soit a, b et c dans $\mathbb{K}$. Discuter, suivant les valeurs de a, b et c, la possibilité de diagonaliser la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2. Soit G un sous-groupe fini commutatif de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Montrer que les éléments de G sont simultanément diagonalisables.

Exercice 3. Montrer que tout polynôme est le polynôme caractéristique (resp. minimal) d'une matrice. Est-ce que tout polynôme de degré 2 est le polynôme minimal d'une matrice 3×3 sur $\mathbb{C}$?, sur $\mathbb{R}$?

Exercice 4.

1. On considère l'application u de $\mathbb{R}_n[X]$ dans lui-même définie par
$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ u(P) = X^n P(\frac{1}{X}).$$
Montrer que u est diagonalisable et donner une base de vecteurs propres.
2. On considère l'application v de $\mathbb{R}_n[X]$ dans lui-même définie par
$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ v(P)(X) = (X^2 - 1)P'' + (2X + 1)P'.$$
Quelles sont les valeurs propres de v ? v est-il diagonalisable ?

Exercice 5. Soit $n \in \mathbb{N}$ et (A, B) dans $M_n(\mathbb{C})$. On note $Sp(A)$ et $Sp(B)$ les spectres respectifs de A et B, et P_A le polynôme caractéristique de A. Montrer l'équivalence

$$Sp(A) \cap Sp(B) = \emptyset \iff P_A(B) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}).$$

Exercice 6. Donner la décomposition de Dunford de $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 7. Soit $M \in \mathcal{M}_5(\mathbb{R})$. On suppose que M est diagonalisable et que ses valeurs propres sont $2, 3$, et 4. Que peut-on dire du polynôme minimal de M ?

Supposons que 2 et 3 soient racines doubles du polynôme caractéristique. Que peut-on dire de M ?

Exercice 8. Soit $M \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$. Supposons que $(X-2)^3(X+1)$ annule M et $(X-2)^2(X+1)$ n'annule pas M. Que peut-on dire de M ?

Exercice 9. Soit $M \in \mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ dont le polynôme minimal est $(X-2)^2$. Que peut-on dire de M ?

Exercice 10. Soit $E = E_1 \oplus E_2$. Soit f un endomorphisme de E tel que E_1 soit stable par f. Montrer qur $P_f = P_{f_{|E_1}} . P_{f_{|E_2}}$. Donner un exemple où E_1 et E_2 sont stables par f, mais $\mu_f \neq \mu_{f_{|E_1}} \mu_{f_{|E_2}}$.

Exercice 11. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -15 & 3 \\ 1 & -4 & 1 \\ 2 & -10 & 3 \end{pmatrix}.$$

Calculer le polynôme caractéristique de A, les puissances de A et $\exp tA$.

Exercice 12. Montrer que les deux matrices suivantes sont semblables :

$$A := \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & 1 \\ -6 & -2 & -2 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & -2 \\ -11 & -2 & -3 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculer une matrice P telle que $P.A.P^{-1} = B$.

Exercice 13. Montrer que les deux matrices suivantes sont semblables :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculer une matrice de passage de A à B.

Exercice 14. Résoudre l'équation:

$$X^2 = \begin{pmatrix} 5 & -5 & -4 \\ 4 & -4 & -4 \\ -3 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

d'inconnue $X \in M_3(\mathbb{R})$.