Exercice 1-1 1) $1/25$ 2) $-125x^3$ 3) 1 4) $\sqrt{\sqrt{2}}$ 5) $4\sqrt{y}$ 6) $\dfrac{x^2}{y^2}$ 7) $\dfrac{\sqrt[3]{x}}{5}$ 8) $\dfrac{-1}{y(x+1)}$ 9) 0

10)$\dfrac{2}{x^2-1}+\dfrac{3}{x-1}=\dfrac{2+3(x+1)}{(x-1)(x+1)}=\dfrac{5x+3}{x^2-1}$. La réponse est donc $\dfrac{1}{x^2-1}$.

11) On peut mettre x en facteur en haut mais aussi x^{-4} en bas. On obtient au numérateur $x(1+x+x^2+x^3)$ et au dénominateur $(x^3+x^2+x+1)x^{-4}$. La réponse est donc $\dfrac{x}{x^{-4}}=x^5$.

12) En haut on factorise $1+x^5=(1+x)(1-x+x^2-x^3+x^4)$ et en bas on met x^{-6} en facteur. Au bout du calcul, on trouve x^6+x^7.

Exercice 1-2

Les réponses attendues sont respectivement $a^2+b^2+c^2+d^2+2ab+2ac+2ad+2bc+2bd+2cd$ et $a^3+b^3+c^3+3a^2b+3b^2c+3c^2a+3ab^2+3bc^2+3ca^2+6abc$.

Exercice 1-3

De l'hypothèse $x-y=1$ on peut tirer x en fonction de y, à savoir $x=y+1$. En substituant cette expression de x dans la formule à transformer, on obtient $(y+1)^3-3(y+1)y-y^3=y^3+3y^2+3y+1-3y-3y^2-y^3=1$.

Exercice 1-4

1) Après une recherche informelle au brouillon, on choisit $a=1$ et $b=-1$ puis on vérifie qu'ils conviennent : soit $k\in\mathbf{N}^*$, alors $\dfrac{a}{k}+\dfrac{b}{k+1}=\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1}=\dfrac{(k+1)-k}{k(k+1)}=\dfrac{1}{k(k+1)}$.

2) Soit $n\in\mathbf{N}^*$, alors, en effectuant le changement de notation $l=k$ dans la première somme et le changement de variable $l=k+1$ dans la seconde :

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}=\sum_{l=1}^{n}\frac{1}{l}-\sum_{l=2}^{n+1}\frac{1}{l+1}=1-\frac{1}{n+1}.$$

3) Soit $n\in\mathbf{N}^*$, on a alors :

$$\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{\left(\prod_{k=1}^{n}k\right)\left(\prod_{k=1}^{n}(k+1)\right)}=\frac{1}{n!(n+1)!}=\frac{1}{(n+1)(n!)^2}.$$

Exercice 1-5

1) a) Notons (H_n) le prédicat : “$\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$”.

* (H_0) est vrai, dès lors qu'elle se transcrit en $0=0$.

* Soit n un entier naturel, supposons (H_n) vrai. On obtient alors :

$$\sum_{k=0}^{n+1}k=\left(\sum_{k=0}^{n}k\right)+(n+1)=\frac{n(n+1)}{2}+(n+1)=\frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

L'énoncé (H_{n+1}) est donc également vrai.

Le principe de récurrence assure dès lors que pour tout $n\in\mathbf{N}$ l'énoncé (H_n) est vrai.

b) On effectue dans un premier temps le calcul suivant, où on pose dans un premier temps $l=n-k$ puis où on renomme l en k :

$$\sum_{k=0}^{n}(n-k)=\sum_{l=0}^{n}l=\sum_{k=0}^{n}k.$$

Cette identité se développe en $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}n-\sum_{k=0}^{n}k=\sum_{k=0}^{n}k$, d'où :

$$\sum_{k=0}^{n}k=\frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{n}n\right)=\frac{n(n+1)}{2}.$$

2) Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Alors :

$$\sum_{k=0}^{n}(2k+1) = 2\sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=0}^{n} 1 = 2\frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = (n+1)^2.$$

Exercice 1-6

1) Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Alors :

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{n}(i+j)\right) &= \sum_{i=0}^{n}\left(\left(\sum_{j=0}^{n} i\right) + \left(\sum_{j=0}^{n} j\right)\right) = \sum_{i=0}^{n}\left(((n+1)i) + \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)\right) \\ &= (n+1)\sum_{i=0}^{n} i + \frac{n(n+1)}{2}\sum_{i=0}^{n} 1 = (n+1)\frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2}(n+1) = n(n+1)^2.\end{aligned}$$

2) Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Alors :

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{i} ij\right) = \sum_{i=0}^{n} i\left(\sum_{j=0}^{i} j\right) = \sum_{i=0}^{n} i\frac{i(i+1)}{2} = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n} i^3 + \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n} i^2 &= \frac{n^2(n+1)^2}{8} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{12} \\ &= n(n+1)\frac{3n(n+1)+2(2n+1)}{24} \\ &= n(n+1)\frac{3n^2+7n+2}{24}.\end{aligned}$$

Exercice 1-7

1) Dans les intervalles de variation proposés pour i et j, il est manifeste que le plus grand des deux varie entre 0 et n. Étant fixé un entier k dans cet intervalle, le nombre de couples (i, j) pour lesquels le plus grand des deux est k est égal à $2k + 1$: ce sont les couples (i, k) où i varie entre 0 et $k - 1$, les couples (k, j) où j varie entre 0 et $k - 1$, et le couple (k, k).

2) En regroupant la somme proposée par valeurs prises par la fonction sommée, on obtient une sommation allant de 0 à n et dont le k-ème terme est obtenu en regroupant $2k+1$ termes valant k : il vaut donc $(2k+1)k$.

3) On déduit de ce qui précède que :

$$\sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{n}\mathrm{Max}(i,j)\right) = \sum_{k=0}^{n}(2k+1)k = 2\sum_{k=0}^{n} k^2 + \sum_{k=0}^{n} k = \frac{2n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{3n(n+1)}{6} = \frac{n(n+1)(4n+5)}{6}.$$

Exercice 1-8

1) Soit $x \in \mathbf{R}$. Alors $-3x + 4 \geq x - 3 \iff 7 \geq 4x \iff x \leq \frac{7}{4}$.

2) On factorise préalablement le trinôme du second degré présent dans la formule, à l'aide des formules à base de discriminant par exemple. On sait alors que les solutions de l'inéquation sont les réels x extérieurs à l'intervalle délimité par les deux racines ; cette inéquation est donc vérifiée pour :
$x \in]-\infty, 2-\sqrt{6}] \cup [2+\sqrt{6}, +\infty[$.

3) Soit $x \in \mathbf{R}$. Alors $(x+2)^2 < -x \iff x^2 + 5x + 4 < 0$. En procédant comme à la question précédente, ceci est vérifié pour $x \in]-4, -1[$.

4) Soit $x \in \mathbf{R}$. Alors $x^3 - 6x \geq x^2 \iff x^3 - x^2 - 6x \geq 0 \iff (x+2)x(x-3) \geq 0$.
En dressant un tableau de signes, on conclut que ceci est vérifié pour $x \in [-2, 0] \cup [3, +\infty[$.

Exercice 1-9

1) Pour a réel, on calcule la différence $A - B$ ou, pour éviter les dénominateurs encombrants, son multiple : $12(A-B) = 4(a^4 - 7a^2 + 4) - 3(a^4 - 9a^2 + 5) = a^4 - a^2 + 1$. En notant $b = a^2$, on constate qu'il s'agit d'une expression polynomiale en b, du second degré, à discriminant strictement négatif et à coefficient dominant strictement positif. Cette expression est donc strictement positive pour toute valeur réelle de b (et donc aussi de a). Autrement dit, A est toujours strictement supérieur à B.

2) Pour a réel, on calcule la différence $C - D$ ou, pour éviter les dénominateurs encombrants, son multiple : $12(C-D) = 4(a^4 + ma^2 + 2) - 3(a^4 + na^2 + 3) = a^4 + (4m - 3n)a^2 - 1$. Pour alléger les notations, on note $p = 4m - 3n$ et $b = a^2$, on dispose ainsi de l'expression $12(C - D) = b^2 + pb - 1$. Le discriminant de cette fonction polynomiale de b est $p^2 + 4$: il est strictement positif et il existe donc deux valeurs de b annulant l'expression. De plus, le produit de ces valeurs est -1 : l'une au moins est donc strictement positive. Le signe de l'expression varie donc quand b varie dans $\mathbf{R}^+$; en revenant à la variable initiale, on conclut qu'il varie quand a varie dans $\mathbf{R}$.

Exercice 1-10

1) Soit $x \in \mathbf{R} \setminus \{-\frac{5}{6}\}$. Alors $\dfrac{-2}{6x+5} > 1 \iff 1 - \dfrac{-2}{6x+5} < 0 \iff \dfrac{6x+7}{6x+5} < 0$.

En dressant un tableau de signes, on conclut que ceci est vérifié pour $x \in]-\frac{7}{6}, -\frac{5}{6}[$.

2) Soit $x \in \mathbf{R} \setminus \{2, -\frac{2}{3}\}$. Alors $\dfrac{1}{x-2} < \dfrac{2}{3x+2} \iff 0 < \dfrac{2}{3x+2} - \dfrac{1}{x-2} = -\dfrac{x+6}{(3x+2)(x-2)}$.

En dressant un tableau de signes, on conclut que ceci est vérifié pour $x \in]-\infty, -6[\cup]-\frac{2}{3}, 2[$.

Exercice 1-11

Soit x et y deux réels. On calcule alors la différence :

$$\frac{1}{2}(x^2 + y^2) - |xy| = \frac{x^2 - 2|xy| + y^2}{2} = \frac{|x|^2 - 2|x||y| + |y|^2}{2} = \frac{(|x| - |y|)^2}{2} \geq 0,$$

ce qui prouve l'inégalité proposée.

Exercice 1-12

Soit x un réel avec $-1 \leq x \leq 1$. On peut alors écrire :

$$\begin{aligned} |1 - x^7| &= |(1-x)(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)| = |1-x||1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6| \\ &\leq |1-x|\left(1 + |x| + |x^2| + |x^3| + |x^4| + |x^5| + |x^6|\right) \leq |1-x|(1+1+1+1+1+1+1) = 7|1-x| \end{aligned}$$

Exercice 1-13

Soit x un réel. En se concentrant sur la formule qui définit $f(x)$ on est amené à distinguer deux cas :

* Si $0 \leq 1 - x \iff x \leq 1$, alors $f(x) = |2 - (1-x)| = |x+1|$, ce qui mène à distinguer deux sous-cas :
  - Si $x + 1 < 0 \iff x < -1$, $f(x) = -x - 1$.
  - Si $0 \leq x + 1 \iff -1 \leq x$, $f(x) = x + 1$;
* Si $1 - x < 0 \iff 1 < x$, alors $f(x) = |2 + (1-x)| = |3 - x|$, ce qui mène à distinguer deux sous-cas :
  - Si $0 \leq 3 - x \iff x \leq 3$, $f(x) = 3 - x$;
  - Si $3 - x < 0 \iff 3 < x$, $f(x) = x - 3$.

Exercice 1-14

Soit x un réel.

* Si $0 \leq 2 - x \iff x \leq 2$, alors $|2 - x| \leq 3 - x \iff 2 - x \leq 3 - x \iff 2 \leq 3$: c'est donc toujours vrai.
* Si $2 - x < 0 \iff 2 < x$, alors $|2 - x| \leq 3 - x \iff x - 2 \leq 3 - x \iff 2x \leq 5 \iff x \leq \frac{5}{2}$.

On conclut que l'inéquation proposée est vraie si et seulement si $x \leq \frac{5}{2}$.

Exercice 1-15

Une recherche au brouillon mène à l'hypothèse selon laquelle $a = 1$, $b = -2$ et $c = 4$ qu'on n'a plus qu'à vérifier en effectuant, pour x réel, le produit $(x+1)(x^2 - 2x + 4)$.

Ceci étant connu, on est amené, comme à l'exercice précédent, à distinguer deux cas en fonction du signe de $x + 1$; après les avoir traités soigneusement on conclut que l'inéquation est vraie si et seulement si $-1 < x$.

Exercice 1-16

1) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^k1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n$

tandis que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k1^{n-k} = (1-1)^n = 0^n = 0$ (du moins pour $1 \leq n$, pour $n = 0$ la réponse est 1).

2) a) Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et soit p entier avec $1 \leq p \leq n$. On peut alors écrire :

$$p\binom{n}{p} = p\frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n\cdot(n-1)!}{(p-1)![(n-1)-(p-1)]!} = n\binom{n-1}{p-1}.$$

b) Soit $n \in \mathbf{N}$, alors :

$$\sum_{p=0}^{n}p\binom{n}{p} = \sum_{p=1}^{n}p\binom{n}{p} = \sum_{p=1}^{n}n\binom{n-1}{p-1} = n\sum_{q=0}^{n-1}\binom{n-1}{q} = n2^{n-1}.$$

3) Une solution astucieuse (parmi beaucoup d'autres) est d'ajouter à la somme à calculer une deuxième somme choisie pour exploiter la formule du triangle de Pascal.
On examine ainsi :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\binom{p+k}{k-1} + \sum_{k=0}^{n}\binom{p+k}{k} &= \binom{p+0}{0} + \sum_{k=1}^{n}\left(\binom{p+k}{k-1} + \binom{p+k}{k}\right)\\
&= 1 + \sum_{k=1}^{n}\binom{p+k+1}{k}\\
&= 1 + \sum_{l=2}^{n+1}\binom{p+l}{l-1} \quad \text{(on fait } l = k-1\text{)}\\
&= \binom{p+1}{0} + \sum_{l=2}^{n}\binom{p+l}{l-1} + \binom{p+n+1}{n}\\
&= \sum_{l=1}^{n}\binom{p+l}{l-1} + \binom{p+n+1}{n}\\
&= \sum_{k=1}^{n}\binom{p+k}{k-1} + \binom{p+n+1}{n} \quad \text{(on change le nom de l'indice).}
\end{aligned}$$

En retranchant $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\binom{p+k}{k-1}$ aux deux côtés de l'égalité, on obtient le résultat souhaité.

Exercice 1-17

1) Soit k entier avec $0 \leq k \leq n$. Alors :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n!}{(n-k)![n-(n-k)]!} = \binom{n}{n-k}.$$

2) Soit k entier avec $0 \leq k \leq n-1$. Alors :

$$\frac{\binom{2n}{k}}{\binom{2n}{k+1}} = \frac{\left(\frac{(2n)!}{k!(2n-k)!}\right)}{\left(\frac{(2n)!}{(k+1)!(2n-k-1)!}\right)} = \frac{(k+1)!}{k!}\cdot\frac{(2n-k-1)!}{(2n-k)!} = \frac{k}{2n-k}.$$

L'inégalité $k \leq n-1$ fournit $1-n \leq -k$ puis, en ajoutant $2n$, on obtient : $n+1 \leq 2n-k$. D'où on conclut que $0 \leq k \leq n-1 < n+1 \leq 2n-k$ et enfin que $\dfrac{k}{2n-k} < 1$.

On sait donc désormais que $\dfrac{\binom{2n}{k}}{\binom{2n}{k+1}} < 1$. En multipliant par le nombre positif $\binom{2n}{k+1}$ on obtient l'inégalité proposée.

On a ainsi montré la chaîne d'inégalités :

$$\binom{2n}{0} < \binom{2n}{1} < \cdots < \binom{2n}{n-1} < \binom{2n}{n}.$$

En réécrivant chacun des coefficients binomiaux qui y figurent à l'aide de la question 1, on obtient :

$$\binom{2n}{2n} < \binom{2n}{2n-1} < \cdots < \binom{2n}{n+1} < \binom{2n}{n}.$$

Ces deux chaînes d'inégalités montrent bien que $\binom{2n}{n}$ est le plus grand des nombres $\binom{2n}{k}$ où k varie entre 0 et $2n$.

3) À l'aide de la question précédente, on peut écrire la majoration :

$$\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} \leq \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{n} = (2n+1)\binom{2n}{n}.$$

Par ailleurs $\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} = 2^{2n}$ (c'est une conséquence de la question 1 de l'exercice précédent).

En rapprochant ces deux informations, on obtient l'inégalité proposée.

Exercice 1-101

1) Comme au 1-4 on cherche au brouillon des valeurs plausibles. Après avoir émis l'hypothèse qu'il est bon de prendre $a = \dfrac{1}{2}$ et $b = 1$ on teste ces valeurs sur l'expression de droite et on constate qu'elles conviennent.

2) Vu la préparation faite à la question précédente, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k}\right) - \left(\frac{1}{2}+\sum_{k=2}^{n-1}\frac{1}{(k+1)}+\frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n-2}\frac{1}{k+2}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\sum_{l=3}^{n}\frac{1}{l}\right) - \left(\frac{1}{2}+\sum_{l=3}^{n}\frac{1}{l}+\frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{2}\left(\sum_{l=3}^{n}\frac{1}{l}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right)$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2(n+2)}.$$

Exercice 1-102

1) On copie-colle la réponse à la question 3 de l'exercice 7, sans calculer la somme S ; ceci donne :

$$\sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{n}\mathrm{Max}(i,j)\right) = \sum_{k=0}^{n}(2k+1)k = 2\sum_{k=0}^{n}k^2 + \sum_{k=0}^{n}k = 2S + \frac{n(n+1)}{2}.$$

2) a) On remarque que pour $0 \leq j \leq i$ on a : $\text{Max}(i,j) = i$ tandis que pour $i+1 \leq j \leq n$, on a : $\text{Max}(i,j) = j$. On peut donc découper :

$$\sum_{j=0}^{n} \text{Max}(i,j) = \sum_{j=0}^{i} \text{Max}(i,j) + \sum_{j=i+1}^{n} \text{Max}(i,j) = \sum_{j=0}^{i} i + \sum_{j=i+1}^{n} j.$$

b) D'une part, $\displaystyle\sum_{j=0}^{i} i = i \sum_{j=0}^{i} 1 = i(i+1)$ et d'autre part $\displaystyle\sum_{j=i+1}^{n} j = \sum_{j=0}^{n} j - \sum_{j=0}^{i} j = \frac{n(n+1)}{2} - \frac{i(i+1)}{2}$.

3) Il découle de la question précédente que :

$$4\sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{n} \text{Max}(i,j)\right) = 4\sum_{i=0}^{n}\left(i(i+1) + \frac{n(n+1)}{2} - \frac{i(i+1)}{2}\right) = 2\sum_{i=0}^{n}(n(n+1) + i^2 + i)$$

4) On poursuit le calcul entrepris à la question précédente :

$$\begin{aligned}4\sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{n} \text{Max}(i,j)\right) &= 2\sum_{i=0}^{n}(n(n+1) + i^2 + i) \\ &= 2\sum_{i=0}^{n} n(n+1) + 2\sum_{i=0}^{n} i^2 + 2\sum_{i=0}^{n} i \cdot \\ &= 2n(n+1)^2 + 2S + n(n+1) \\ &= 2S + n(n+1)(2n+3)\end{aligned}$$

On soustrait à cette égalité l'égalité écrite au 1 et on obtient :

$$3\sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{n} \text{Max}(i,j)\right) = n(n+1)(2n+3) - \frac{n(n+1)}{2} = n(n+1)\frac{4n+6-1}{2} = \frac{n(n+1)(4n+5)}{2}.$$

Exercice 1-103

Notons (H_n) le prédicat : "$\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$".

* (H_0) est vrai, dès lors qu'elle se transcrit en $0 = 0$.

* Soit n un entier naturel, supposons (H_n) vrai. On obtient alors :

$$\sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \left(\sum_{k=0}^{n} k^2\right) + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.$$

L'énoncé (H_{n+1}) est donc également vrai.

Le principe de récurrence assure dès lors que pour tout $n \in \mathbf{N}$ l'énoncé (H_n) est vrai.

Exercice 1-104

1) Pour x réel, on sait factoriser $x^4 - 13x^2 + 36 = (x^2-4)(x^2-9) = (x+3)(x+2)(x-2)(x-3)$. On termine par un tableau de signes ; les solutions sont les x de $]-3,-2[\cup]2,3[$.

2) Soit $x \in \mathbf{R} \setminus \{-1, 3\}$. On calcule :

$$\frac{x+6}{x+1} - \frac{x-6}{3-x} = \frac{(x+6)(x-3)+(x+1)(x-6)}{(x+1)(x-3)} = \frac{2x^2-2x-24}{(x+1)(x-3)} = 2\frac{(x+3)(x-4)}{(x+1)(x-3)}.$$

Un tableau de signes permet de conclure : les solutions sont les x de $]-\infty,-3[\cup]-1,3[\cup]4,+\infty[$.

3) Soit x un réel.
* Si $x < 3$, $|x-7| = 7-x > 7-3 = 4$ et *a fortiori* $|x-3|+|x-7| > 4$. Le réel x n'est donc pas solution.
* Si $3 \leq x \leq 7$, alors $|x-3|+|x-7| = (x-3)+(7-x) = 4$ et le réel x est donc solution.
* Si $7 < x$, $|x-3| = x-3 > 7-3 = 4$ et *a fortiori* $|x-3|+|x-7| > 4$. Le réel x n'est donc pas solution.
Les solutions sont donc les x tels que $3 \leq x \leq 7$.

4) Soit x un réel. Par l'inégalité triangulaire,

$$1 = |2-1| = |(2-x)+(x-1)| \leq |2-x|+|x-1| = |x-1|+|x-2|.$$

Le réel x n'est donc pas solution.

Exercice 1-105

1) On observe $y - m = y - \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-x}{2}$. Comme on a supposé $x \leq y$ on conclut que la différence $y - m$ est elle aussi positive. Ceci prouve que $y \leq m$.

2) On étudie cette fois :

$$m - g = \frac{x+y}{2} - \sqrt{xy} = \frac{x - 2\sqrt{xy} + y}{2} = \frac{(\sqrt{x})^2 - 2\sqrt{x}\sqrt{y} + (\sqrt{y})^2}{2} = \frac{(\sqrt{y}-\sqrt{x})^2}{2} \geq 0.$$

Ceci prouve que $g \leq m$.

3) Dans cette question et la suivante, il peut être confortable de noter $a = 1/x$ et $b = 1/y$. Une demi-ligne de calcul montre que la différence $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{h}$ vaut $\dfrac{a-b}{2}$. Elle est donc positive. Tous les nombres intervenant dans l'exercice sont strictement positifs, on peut inverser et obtenir l'inégalité $x \leq h$.

4) Ici la différence $\dfrac{1}{h} - \dfrac{1}{g}$ attire notre regard et se révèle valoir $\dfrac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2}$. On conclut comme aux questions précédentes.