Feuille 2 : Sur les applications

Ex 1) On note $A=\{1,2,3\}$ et $B=\{0,1,2,3\}$.

$A\cap B = \{1,2,3\} = A$

$A\cup B = \{0,1,2,3\} = B$.

2) $A=[1,3]$ et $B=[2,4]$ $\quad A\cap B=[2,3]$ $\quad A\cup B=[1,4]$.

3) $A=]-\infty,3]$ $\quad B=]-2,7]$ $\quad C=]-5,+\infty[$

$A\cap B =]-2,3]$ $\quad A\cup B =]-\infty,7]$

$B\cap C =]-2,7]$ $\quad B\cup C =]-5,+\infty[$

Ex 2 A, B deux ensembles, montrer l'équivalence

$A\subset B \iff A\cup B = B$.

"$\Rightarrow$" Supposons $A\subset B$ alors $\left.\begin{array}{l} A\cup B \subset B\cup B = B \\ \text{et } B\subset A\cup B \end{array}\right\}$ Donc $A\cup B=B$.

"$\Leftarrow$" Supposons $A\cup B=B$ alors si $x\in A$ $\quad x\in A\cup B = B$

Donc $A\subset B$.

Ex 3 Soit A, B et C trois ensembles

1) L'implication suivante est-elle vraie :

$$(A\cup B)\not\subset C \Rightarrow (A\not\subset C \text{ ou } B\not\subset C) \ ?$$

Supposons $(A\cup B)\not\subset C$ alors il existe $x\in A\cup B$ tel que $x\notin C$.

Ainsi si $x\in A$ alors $A\not\subset C$.

sinon $x\in B$ alors $B\not\subset C$.

Donc $A\not\subset C$ ou $B\not\subset C$. L'implication est vraie

2) On suppose que $A\cup B\subset A\cup C$ et $A\cap B\subset A\cap C$. Mq $B\subset C$

Soit $x\in B$. Si $x\in A\cap B$ alors $x\in A\cap C$ donc $x\in C$.

Si $x\in B$ et $x\notin A$ alors $x\in A\cup B$ donc $x\in A\cup C$ mais $x\notin A$ donc $x\in C$. Ainsi $B\subset C$.

IV 1) $\forall x \in \mathbb{R},\ (x = |x| \text{ ou } x = -|x|)$ <u>Vrai</u>

négation : $\exists x \in \mathbb{R}$ tq $(x \neq |x| \text{ et } x \neq -|x|)$

2) $(\forall x \in \mathbb{R},\ x = |x|) \text{ ou } (\forall x \in \mathbb{R},\ x = -|x|)$

négation $(\exists x \in \mathbb{R},\ x \neq |x|) \text{ et } (\exists x \in \mathbb{R},\ x \neq -|x|)$ <u>Vrai</u>

3) $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R},\ y - x + x^2 < 0$

négation $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}\quad y - x + x^2 \geq 0$ <u>Vrai</u>

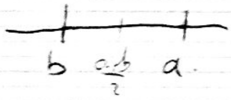
4) $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}\quad y - x + x^2 > 0$ <u>Vrai</u>

négation $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}\quad y - x + x^2 \leq 0$

V Par contraposée mq :

$\forall a, b \in \mathbb{R}\quad (\forall \varepsilon > 0,\ a \leq b + \varepsilon) \Rightarrow a \leq b.$

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ Supposons $a > b$ montrons que $(\exists \varepsilon > 0$ tq $a > b + \varepsilon)$



Comme $a > b$ alors $\dfrac{a-b}{2} > 0$

On pose $\varepsilon = \dfrac{a-b}{2}$

Alors $b + \varepsilon = \dfrac{a+b}{2} < \dfrac{2a}{2} = a.$

Ainsi $a > b \Rightarrow (\exists \varepsilon > 0,\ a > b + \varepsilon).$

VI Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur I à valeurs réelles.

1) f s'annule : $\exists x \in I,\ f(x) = 0.$

2) f est l'application nulle : $\forall x \in I\quad f(x) = 0$

3) f n'est pas une application constante : $\exists x \in I\ \exists y \in I,\ f(x) \neq f(y).$

4) f ne prend jamais deux fois la même valeur :

$\forall x, y \in I\quad (x \neq y) \Rightarrow (f(x) \neq f(y))$ (ou $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$)

5) f s'annule au plus une fois : $|f^{-1}(\{0\})| \leq 1$ $\quad \exists x \in I \mid \forall y \in I\ (f(y) = 0 \Rightarrow x = y)$

VII $f(x) = 3x+1$ $g(x) = x^2 - 1$

1) $f\circ g(x) = f(x^2-1) = 3(x^2-1)+1 = 3x^2-2$

$g\circ f(x) = g(3x+1) = (3x+1)^2 - 1 = 9x^2 + 6x = 3x(3x+2)$

Rmq : $f\circ g \neq g\circ f$

2) Déterminer u, v tq $h = u\circ v$ en précisant leur ensemble de départ et d'arrivée.

a) $h(x) = \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$

$u : x \mapsto \sin(x)$ $\quad \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$.

$v : x \mapsto x+\frac{\pi}{2}$ $\quad \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

b) $h(x) = \dfrac{1}{x+7}$

$v : \begin{cases} \mathbb{R}\setminus\{-7\} \longrightarrow \mathbb{R}\setminus\{0\} \\ x \longmapsto x+7. \end{cases}$

$u : \begin{cases} \mathbb{R}\setminus\{0\} \longrightarrow \mathbb{R}\setminus\{0\} \\ x \longmapsto \frac{1}{x}. \end{cases}$

c) $h(x) = \sqrt{3x-1}$

$v : \begin{cases} [\frac{1}{3}, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}_+ = [0,+\infty[\\ x \longmapsto 3x-1 \end{cases}$

$u : \begin{cases} \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x \longmapsto \sqrt{x} \end{cases}$

VIII $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $x \mapsto 2x+1$. Déterminer $\forall x\in\mathbb{R}$ $(\underbrace{f\circ\cdots\circ f}_{n\in\mathbb{N}^*})(x)$

$f(x) = 2x+1$ $\quad f^2(x) = 2(2x+1)+1 = 4x+3$ $\quad f^3(x) = 2(4x+3)+1 = 8x+7$

$f^n(x) = 2^n x + 2^n - 1$

Par rec : I : $n=0$ ok

H. $f^{n+1}(x) = 2f^n(x)+1 = 2(2^n x + 2^n - 1) = 2^{n+1}x + 2^{n+1} - 2 + 1 = 2^{n+1}x + 2^{n+1} - 1$

IV injectives surjectives bijectives ?

1) $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ non non non 2: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, $x \mapsto x^2$ ~~non~~ oui non

6) $\mathbb{R} \to \{14\}$, $x \mapsto 14$ non oui non 3)

10) $\{1\} \to \{\frac{1}{2}\}$, $x \mapsto \frac{1}{x+1}$ oui oui oui

4)

1) $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ non non non

2) $\mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, $x \mapsto x^2$ non oui non

3) $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $n \mapsto n$ oui oui oui

4) $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 2x$ oui non non

5) $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 8x+3$ oui oui oui

6) $\mathbb{R} \to \{14\}$, $x \mapsto \{14\}$ non oui non

7) $\{17\} \to \{12, 17\}$, $x \mapsto 17$ oui non ~~non~~

8) $\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$ oui non non

9) $\{x\} \to \{0\}$, $x \mapsto 0$ oui oui oui

10) $\{1\} \to \{\frac{1}{2}\}$, $x \mapsto \frac{1}{x+1}$ oui oui oui

11) $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $n \mapsto n+1$ oui non non

12) $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $n \mapsto n+1$ oui oui oui

13) $\mathbb{R}\setminus\{1\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{x+1}{x-1}$ oui non non

X 1) $f: \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, $(m,n) \mapsto mn$ injective non: $f(2,3) = f(3,2)$ bijective non.
surjective oui. $f(1,n) = n$

2) $g: \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$, $k \mapsto (k, (k+1)^2)$ injective oui bijective non.
surjective non.

~~XI~~ Soient I, J des parties de $\mathbb{R}$ $f : \begin{array}{l} I \to J \\ x \mapsto x^2 \end{array}$

1) $[0,1] \longmapsto [0,2]$

2) $[-1,1] \longmapsto [0,1]$

3) $[-1,1] \longrightarrow [0,2]$

4) $[0,1] \longmapsto [0,1]$

~~XII~~ 1) $q_1, q_2 \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ Mq $-\frac{1}{2} < \frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_2} < \frac{1}{2}$

. Si $q_1 = q_2$ $\quad \frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_2} = 0 \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$.

. Si $q_1 \neq q_2$ $\quad \frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_2} = \frac{q_2 - q_1}{q_1 q_2}$

Ainsi $\left| \frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_2} \right| = \frac{|q_2 - q_1|}{q_1 q_2} \leq \frac{\max(q_1, q_2)}{q_1 q_2} = \frac{1}{\min(q_1, q_2)}$

2) On définit $f : \mathbb{Z} \times (\mathbb{N} \setminus \{0,1\}) \to \mathbb{Q}$
$(p, q) \longmapsto p + \frac{1}{q}$

Soit $(p_1, q_1), (p_2, q_2)$ tq $p_1 + \frac{1}{q_1} = p_2 + \frac{1}{q_2}$

$$p_1 + \frac{1}{q_1} - p_2 - \frac{1}{q_2} = \underbrace{p_1 - p_2}_{\in \mathbb{N}} + \underbrace{\frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_2}}_{\in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[} = 0$$

Ainsi $\frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_2} = 0 \iff q_1 = q_2$

Donc $p_1 - p_2 = 0$ donc $p_1 = p_2$

Donc $\underline{f \text{ injective}}$

Par l'absurde . alors $\exists p, q$ tq $\frac{2}{3} = p + \frac{1}{q}$

On n'est pas atteint car si $f(p,q) = 0$ alors $p = \frac{1}{q} \in \mathbb{Z}$ $\neq 0$ donc $q \in \{-1, 1\}$ absurde

$2q = 3pq + 3$ $\quad q(2 - 3p) = 3$ $\neq 0$ car q est absurde

~~Si $p > 0$ alors $2 - 3p < 0$ donc $q(2 - 3p) \leq 0$.~~ $\lightning$

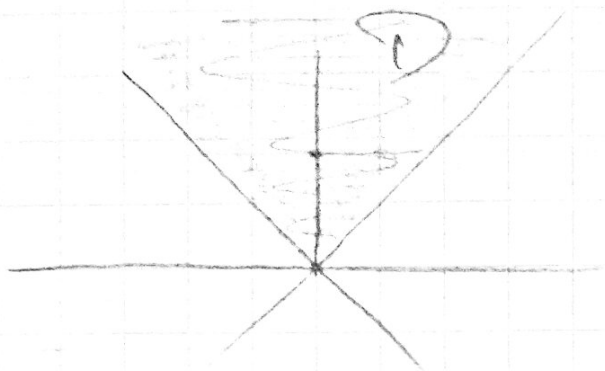
injective

Donc ~~$p \leq 0$~~ ainsi $2 - 3p \geq 2$ donc $2q = 3$ ainsi $2 | 3$ $\lightning$

pas surjective

XIII $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -y \le x \le y\}$ $\quad f : D \to \mathbb{R}^2$

$(x,y) \mapsto (x^2+y^2, 2xy)$

1) 

2) a) Si (x_1,y_1) (x_2,y_2) vérifient alors $x_1 = x_2$

$y_1 = y_2$

$$\begin{cases} L_1 : x_1+y_1 = x_2+y_2 \\ L_2 : x_1-y_1 = x_2-y_2 \end{cases}$$

$L_1 + L_2$: $2x_1 = 2x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$

$L_1 - L_2$: $2y_1 = 2y_2 \Rightarrow y_1 = y_2$.

b) Déduire f injective

Si $f((x_1,y_1)) = f((x_2,y_2))$ alors $\begin{cases} L_1 : x_1^2+y_1^2 = x_2^2+y_2^2 \\ L_2 : 2x_1y_1 = 2x_2y_2 \end{cases}$

D'où (x_1,y_1) et (x_2,y_2) vérifient :

$L_1 + L_2$: $x_1^2+y_1^2+2x_1y_1 = x_2^2+y_2^2+2x_2y_2$.

ie. $(x_1+y_1)^2 = (x_2+y_2)^2$ d. $x_1+y_1 = x_2+y_2 \ge 0$ ou $-(x_2+y_2) \le 0$.

Or (x_1,y_1) et $(x_2,y_2) \in D$ donc $x_1+y_1 \ge 0$ et $x_2+y_2 \ge 0$

Ainsi $x_1+y_1 = x_2+y_2$.

Montre de même que $x_1-y_1 = x_2-y_2$ (avec $x_1-y_1 \le 0$ et $x_2-y_2 \le 0$)

3) f surjective ?

Non car $f(D) \subset \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$.

Feuille 2 : Sur les applications

XVII

1) $\tan(\{0\}) = \{0\}$ 2) $\sin^{-1}(\{2\}) = \emptyset$ 3) $\exp(]-\infty, 2]) =]0, e^2]$

4) $\exp^{-1}([-1, e]) =]-\infty, 1]$ 5) $\ln(\mathbb{R}^{+*}) =]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$.

6) $\ln^{-1}([3, +\infty[) = [e^3, +\infty[$

7) $f^{-1}([0,1])$ $f : \begin{array}{l}\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2\end{array}$ $= [-1, 1]$

8) $f^{-1}([0,1])$ $f : \begin{array}{l}[-\frac{1}{2}, \frac{4}{3}] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2\end{array}$ $= [-1,1] \cap [-\frac{1}{2}, \frac{4}{3}] = [-\frac{1}{2}, 1]$.

9) $f^{-1}([0,1])$ $f : \begin{array}{l}\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2\end{array}$ $= [-1, 1] \cap \mathbb{R}^+ = [0, 1]$.

10) $(\cos|_{[0,\pi]})^{-1}([0,1]) = [0, \frac{\pi}{2}]$.

11) $(\cos|_{[3\pi, 7\pi]})^{-1}([0,1]) = [3\pi + \frac{\pi}{2}, 4\pi + \frac{\pi}{2}] \sqcup [5\pi + \frac{\pi}{2}, 6\pi + \frac{\pi}{2}]$.

12) $\cos^{-1}([0,1]) = \bigsqcup_{k \in \mathbb{Z}} [2k\pi - \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{\pi}{2}]$

XVIII E un ensemble $f : E \to E$ tq $f(f(E)) = E$

Mq f surjective.

Soit $u \in E$ alors il existe $v \in E$ tel que $f(f(v)) = u$.

Ainsi $y = f(v) \in E$ vérifie $f(y) = u$.

XIX $f : X \to Y$ application. Mq LASSE :

i) f injective ii) $\forall A_1, A_2$ parties de X $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$.

"$\Rightarrow$" Soit A_1, A_2 deux parties de X.

On a toujours $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$.

Soit $y \in f(A_1) \cap f(A_2)$, alors il existe $x_1 \in A_1$ $x_2 \in A_2$ tq $y = f(x_1) = f(x_2)$

injectivité de f $\Rightarrow$ $x_1 = x_2$. donc $x_1 \in A_1 \cap A_2$ et $y = f(x_1) \in f(A_1 \cap A_2)$

"$\Leftarrow$" Soit $x_1, x_2 \in X$ tq $f(x_1) = f(x_2)$ $A_1 = \{x_1\}$ $A_2 = \{x_2\}$.

Alors $f(A_1) \cap f(A_2) = \{f(x_1)\} \neq \emptyset$ donc $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$ ainsi
$= f(A_1 \cap A_2)$

comme $A_1 \cap A_2 = \{x_1\} \Leftrightarrow x_1 = x_2$.

$\Rightarrow x_1 = x_2$

~~XX~~ 1) $f\left|\begin{array}{l}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto 3x+1\end{array}\right.$ $g:\left|\begin{array}{l}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto \frac{x-1}{3}\end{array}\right.$ $f\circ g = g\circ f = id_{\mathbb{R}}$

2) $g:\left|\begin{array}{l}]e,+\infty[\to\mathbb{R}\\ x\mapsto \ln(\ln(\ln(x)))\end{array}\right.$ $f:\left|\begin{array}{l}\mathbb{R}\to]e,+\infty[\\ \omega\mapsto \exp(\exp(\exp(\omega)))\end{array}\right.$ $g\circ f = id_{\mathbb{R}}$ $f\circ g = id_{]e,+\infty[}$

3) $a:\left|\begin{array}{l}\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2\\ (s,t)\mapsto(2s,3t)\end{array}\right.$ $b:\left|\begin{array}{l}\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2\\ (u,v)\mapsto(\frac{u}{2},\frac{v}{3})\end{array}\right.$

4) $b:\left|\begin{array}{l}\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2\\ (s,t)\mapsto(s+t,s-t)\end{array}\right.$ $a:\left|\begin{array}{l}\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2\\ (u,v)\mapsto(\frac{u+v}{2},\frac{u-v}{2})\end{array}\right.$

Ne pas faire le 5).

(5) $F:\left|\begin{array}{l}[1,10[\times\mathbb{Z}\to\mathbb{R}^{+*}\\ (t,n)\mapsto t\times 10^n\end{array}\right.$ $G:\left|\begin{array}{l}\mathbb{R}^{+*}\to[1,10[\times\mathbb{Z}\\ \omega\mapsto\end{array}\right.$

f Pas surjective)

~~XXI~~ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ bijective. Suppose $f \nearrow\nearrow$.

Mq f^{-1} est $\nearrow\nearrow$

Soit $u<v$ Il existe $x,y\in\mathbb{R}$ tel que $f(x)=u$ et $f(y)=v$

Ainsi $f(x)<f(y)$, par strict croissance on a $x<y$.

c'est-à-dire $f^{-1}(u)<f^{-1}(v)$.

~~XXII~~ E,F,G trois ensembles $f:E\to F$ $g:F\to G$ deux applis

Suppose g et $g\circ f$ bijective.

Mq f bijective.

$g\circ f$ bijective $\Rightarrow$ f injective

Mq f surjective

Soit $y\in F$ Il existe $u\in G$ tq $y=g^{-1}(u)$

Ainsi il existe $x\in E$ tq $g\circ f(x)=u$

D'où ~~$g^{-1}\circ g\circ f(x)$~~

$g^{-1}(g\circ f(x)) = g^{-1}(u) = y$

~~Par unicité de g^{-1}~~ ~~$g\circ f$~~ $= f(x)$

~~XIV~~

E, F, G trois ensembles $f : E \to F$ $g : F \to G$ deux applications.

1) Si f et g sont injectives alors $g \circ f$ injective.

Soit $x, y \in E$ tq $g \circ f(x) = g \circ f(y)$
alors $g(f(x)) = g(f(y)) \overset{g \text{ inject}}{\Rightarrow} f(x) = f(y) \overset{f \text{ inject}}{\Rightarrow} x = y$
donc $g \circ f$ injective.

2) f, g surjective $\Rightarrow g \circ f$ surjective.
Soit $\omega \in G$. surjectivité de g, il existe $v \in F$ tq $g(v) = \omega$
surjectivité de f $\exists\, x \in E$ tq $f(x) = v$
Ainsi $g \circ f(x) = \omega$

3) Ainsi si f, g bijective alors $g \circ f$ aussi.
4) Si $g \circ f$ injective alors f injective.

Soit $x, y \in E$ tq $f(x) = f(y)$ alors $g \circ f(x) = g \circ f(y)$
donc $x = y$, donc f injective
5) Si $g \circ f$ surjective alors g surjective.
Soit $\omega \in G$ et $x \in E$ tq $g \circ f(x) = \omega$ ainsi $g(f(x)) = \omega$
donc g surjective
6) $f : E \to F$ $g : F \to E$.

a) $g \circ f = Id_E$ $\quad Id_E$ injective $\Rightarrow f$ injective.
Surjective $\Rightarrow g$ surjective

b) $f \circ g = Id_F$ $\Rightarrow f$ surjective g injective.

c) $f \circ f = Id_E \Rightarrow f$ bijective.

XV

$f \begin{cases} \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ n \mapsto n^2 \end{cases}$

1) $\exists ?\ g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tq $f \circ g = Id_{\mathbb{N}}$

(A) Si un tel g existe alors

$$f(g(n)) = g(n)^2 = n.$$

Donc $g(n) = \sqrt{n}$ d'où $g(2) = \sqrt{2} \notin \mathbb{N}$ ↯

Donc $\boxed{NON}$

2) $\exists ?\ h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tq $h \circ f = Id_{\mathbb{N}}$

(A) Supposons qu'un tel h existe,

$h(f(n)) = n$ donc $h(n^2) = n \ \forall n \in \mathbb{N}$

$f(n) = h(n^2)$ ... $\underset{h(n^2)}{h(f(n))} = n$

(S) donc $\boxed{OUI}$: $h : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$

$$n \longmapsto \begin{cases} k & \text{si } n = k^2\ k \in \mathbb{N}. \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

XVI

$f : \{1,2,3,4\} \longrightarrow \{1,2,3,4\}$

$f(1) = 4 \quad f(2) = 1 \quad f(3) = 2 \quad f(4) = 2.$

1) a) $f(\{1\}) = \{4\}$ $\quad f(\{1,3\}) = \{4,2\}$

$f(\{3,4\}) = \{2\}$ $\quad f(\emptyset) = \emptyset.$

b) $f^{-1}(\{2\}) = \{3,4\}$ $\quad f^{-1}(\{1,2\}) = \{2,3,4\}$

$f^{-1}(\{3\}) = \emptyset.$

2) $f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{cases}$

$f^{-1}(\{1\}) = \{-1, 1\}$

$f^{-1}([1,2]) = [-\sqrt{2}, -1] \sqcup [1, \sqrt{2}].$