

Feuille 3 : Bases de logique (corrections)

Exercice 1.

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$\text{non}(P \Rightarrow Q)$
0	0	1	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	1	1	0

P	Q	$\text{non} Q$	$P \vee (\text{non} Q)$
0	0	1	1
0	1	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1

Exercice 2.

P	Q	R	$\text{non} R$	$P \Rightarrow Q$	$(\text{non} R) \wedge P$	$(P \Rightarrow Q) \vee ((\text{non} R) \wedge P)$
0	0	0	1	1	0	1
0	0	1	0	1	0	1
0	1	0	1	1	0	1
0	1	1	0	1	0	1
1	0	0	1	0	1	1
1	0	1	0	0	0	0
1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	0	1	0	1

Exercice 3

$$\begin{aligned}
 1. P \Rightarrow (Q \Rightarrow R) &\text{ équivaut à } \neg P \text{ ou } (Q \Rightarrow R) \\
 &\equiv \neg P \text{ ou } (\neg Q \text{ ou } R) \\
 &\equiv (\neg P \text{ ou } \neg Q) \text{ ou } R \\
 &\equiv \neg(P \wedge Q) \text{ ou } R \\
 &\equiv (P \wedge Q) \Rightarrow R
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2. (P \text{ ou } Q) \Rightarrow R &\equiv \neg(P \vee Q) \vee R \\
 &\equiv (\neg P \wedge \neg Q) \vee R \\
 &\equiv (\neg P \vee R) \wedge (\neg Q \vee R) \\
 &\equiv (P \Rightarrow R) \wedge (Q \Rightarrow R)
 \end{aligned}$$

$\neg = \text{non}, \vee = \text{ou}, \wedge = \text{et}$

Exercice 4  $P \Rightarrow (Q \Rightarrow (P \wedge Q))$

équivalent à  $\neg P \vee (\neg Q \vee (P \wedge Q))$

$\equiv (\neg P \vee \neg Q) \vee (P \wedge Q)$

$\equiv \underbrace{\neg(P \wedge Q) \vee (P \wedge Q)}_{\text{c'est une tautologie car } S \vee \neg S \text{ l'est.}}$

Donc  $P \Rightarrow (Q \Rightarrow (P \wedge Q))$  est une tautologie.

Exercice 5 — 1.  $\forall x \in \mathcal{E}, \exists i \in \mathcal{S}, h_i(x) \leq 8$

2.  $\exists x \in \mathcal{E}, \forall i \in \mathcal{S}, h_i(x) > 8$ . Il existe au moins un étudiant qui se réveille tous les jours après 8 heures.

Exercice 6 — 1.  $\exists x \in E, (x \in A \text{ et } x \in B)$

2.  $\forall x \in E, (x \in A \Rightarrow x \in B)$

3.  $\exists x \in E, (x \in B \text{ et } x \notin A)$ .

4.  $\forall x \in E, x \notin A$

Exercice 7 — L'ensemble  $E$  a une infinité d'éléments car  $E = [0, 1[$ . L'ensemble  $F$  a un seul élément car  $F = \{0\}$ .

Exercice 8 — 1.  $\forall M \in \mathbf{R}, \exists x \in \mathbf{R}, |f(x)| > M$ .

2. La fonction  $f$  est croissante si :

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbf{R}, (x_1 \leq x_2) \Rightarrow (f(x_1) \leq f(x_2)).$$

La fonction  $f$  n'est pas croissante si :

$$\exists x_1, x_2 \in \mathbf{R}, (x_1 \leq x_2) \text{ et } (f(x_1) > f(x_2)).$$

Exercice 9 —

Soit  $\mathcal{P}_n$  la propriété :  $(u_n \leq 3^n \text{ et } u_{n+1} \leq 3^{n+1})$ .

– (Initialisation) La propriété  $\mathcal{P}_0$  est vraie :  $1 \leq 3^0$  et  $3 \leq 3^1$ .

– (Hérédité) Supposons  $\mathcal{P}_n$  vraie pour un certain  $n$ . Alors

$$u_{n+2} = 4u_n + u_{n+1} \leq 4 \cdot 3^n + 3^{n+1} = 7 \cdot 3^n \leq 3^{n+2}.$$

De plus, d'après  $\mathcal{P}_n, u_{n+1} \leq 3^{n+1}$ . La propriété  $\mathcal{P}_{n+1}$  est vraie.

– Pour tout  $n \in \mathbf{N}, \mathcal{P}_n$  est donc vraie.

Nous avons ainsi démontré que  $\mathcal{P}_n$  est vraie pour tout  $n \in \mathbf{N}$ .

Exercice 10

$P(n) : " u_n = 3^n - 2^{n+1} "$

$P(0) : " u_0 = 3^0 - 2^1 = -1 "$

$P(1) : " u_1 = 3 - 2^2 = -1 "$

$P(0)$  et  $P(1)$  sont vrais.

Soit  $n \geq 2$ . On suppose  $P(k)$  vrai pour tout entier naturel  $k < n$ .

$$u_n = 5u_{n-1} - 6u_{n-2} = 5(3^{n-1} - 2^n) - 6(3^{n-2} - 2^{n-1})$$

$$u_n = 5 \cdot 3^{n-1} - 6 \cdot 3^{n-2} - 5 \cdot 2^n + 6 \cdot 2^{n-1} = 5 \cdot 3^{n-1} - 2 \cdot 3^{n-1} - 5 \cdot 2^n + 3 \cdot 2^n$$

$$u_n = 3 \cdot 3^{n-1} - 2 \cdot 2^n = 3^n - 2^{n+1}.$$

Ainsi  $P(n)$  est vrai.

En conclusion  $P(n)$  est vrai  $\forall n \in \mathbf{N}$ .

**Exercice 14** — Pour un entier naturel  $n \geq 1$ , désignons par  $H(n)$  la propriété

$$\forall m \in \mathbb{N}, (1 \leq m \leq n \implies u_m = 2^{m-1}).$$

Nous allons la démontrer par récurrence.

- (Initialisation) La propriété  $H(1)$  est vraie car  $u_1 = u_0 = 1 = 2^0 = 2^{1-1}$ .
- (Hérédité) Supposons que  $H(n)$  soit vraie pour un certain entier  $n \geq 1$ . Soit  $m$  un nombre entier compris entre 1 et  $n+1$ . Si  $m \leq n$ , alors  $u_m = 2^{m-1}$  en vertu de  $H(n)$ . Si  $m = n+1$ , alors

$$u_m = u_{n+1} = \sum_{k=0}^n u_k = u_0 + \sum_{k=1}^n u_k = 1 + \sum_{k=1}^n 2^{k-1} = 1 + \sum_{k=0}^{n-1} 2^k = 1 + (2^n - 1) = 2^n = 2^{m-1}.$$

La propriété  $H(n+1)$  est donc vraie.

Nous avons démontré la propriété  $H(n)$  pour tout entier  $n \geq 1$ ; en particulier,  $u_n = 2^{n-1}$  pour tout  $n \geq 1$ .

**Exercice 15** — 1. Supposons  $n \geq 3$  et  $P(n)$  vraie. Alors

$$2^{n+1} - (n+1)^2 = 2 \cdot 2^n - (n+1)^2 > 2n^2 - (n+1)^2 = n^2 - 2n - 1 > 0$$

car les racines du trinôme  $X^2 - X - 1$  sont  $1 \pm \sqrt{2}$ , et  $1 + \sqrt{2} < 1 + 2 = 3$ . La propriété  $P(n+1)$  est donc démontrée.

2. Les propriétés  $P(0)$  et  $P(1)$  sont vraies car  $2^0 = 1 > 0^2$  et  $2^1 = 2 > 1^2$ . Les propriétés  $P(2)$ ,  $P(3)$  et  $P(4)$  sont fausses car  $2^2 = 4 = 2^2$ ,  $2^3 = 8 < 9 = 3^2$  et  $2^4 = 16 = 4^2$ .

La propriété  $P(5)$  est vraie car  $2^5 = 32 > 25 = 5^2$ . On en déduit que la propriété  $P(n)$  est alors vraie pour tout entier  $n \geq 5$ , en raisonnant par récurrence : la propriété  $P(5)$  est vraie (initialisation) et, si  $P(n)$  est vraie pour un certain  $n \geq 5$ , alors  $P(n+1)$  est vraie en vertu de la question précédente (hérédité).

**Exercice 16** — Pour tout entier  $n \geq 2$ , désignons par  $P(n)$  la propriété « tout nombre entier  $m$  tel que  $2 \leq m \leq n$  est un produit de nombres premiers ». Nous allons démontrer que  $P(n)$  est vraie pour tout  $n \geq 2$  en raisonnant par récurrence.

- La propriété  $P(2)$  est vraie car 2 est un nombre premier.
- Supposons que  $P(n)$  soit vraie pour un certain entier  $n \geq 2$ . Pour démontrer  $P(n+1)$ , il suffit de prouver que  $n+1$  est un produit de nombres premiers. Si  $n+1$  est premier, c'est vrai. Sinon, nous pouvons écrire  $n+1 = ab$  avec  $a, b$  deux entiers tels que  $2 \leq a, b \leq n$ . Chacun des entiers  $a, b$  est un produit de nombres premiers en vertu de  $P(n)$ , donc leur produit également.

Dans tous les cas de figure,  $n+1$  est un produit de nombres premiers et la propriété  $P(n+1)$  est vraie.

La propriété  $P(n)$  est donc vraie pour tout nombre entier  $n \geq 2$ . En particulier, tout nombre entier  $n \geq 2$  est un produit de nombres premiers.

**Exercice 17** — 1. On va démontrer le principe des tiroirs en raisonnant par l'absurde. Supposons que cela soit faux. Il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que l'on puisse ranger  $n+1$  paires de chaussettes dans  $n$  tiroirs avec au plus 1 paire de chaussettes dans chaque tiroir. Soit  $T_i$  le nombre de chaussette dans le tiroir  $i$ . On compte alors les paires de chaussettes :

$$n+1 = \sum_{i=1}^n T_i \leq \sum_{i=1}^n 1 = n$$

et nous aboutissons à une contradiction. Le principe des tiroirs est donc vrai.

2. Les vingt-six lettres de l'alphabet latin permettent de former  $26^4 = 456\,976$  mots différents de quatre lettres, donc les 500 000 mots de ce fichiers ne peuvent pas être tous différents.

**Exercice 18** — Soit  $n \geq 1$  un entier naturel. On se donne  $n+1$  nombres réels  $x_0, x_1, \dots, x_n$  dans  $[0, 1]$  vérifiant  $0 \leq x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n \leq 1$ . On veut démontrer par l'absurde la propriété suivante : « deux de ces réels sont distants de moins de  $\frac{1}{n}$  ».

1.  $\exists i \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_i - x_{i-1} \leq \frac{1}{n}$

2.  $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_i - x_{i-1} > \frac{1}{n}$

3. Supposons que la propriété (P) soit fautive, auquel cas  $x_i - x_{i-1} > \frac{1}{n}$  pour tout  $i \in \{2, \dots, n\}$ . En sommant, on obtient :

$$x_n - x_0 = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) > \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} = 1.$$

Or  $x_n - x_0 \leq 1$ . Contradiction !

On a donc :  $\exists i \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_i - x_{i-1} \leq \frac{1}{n}$ .

**Exercice 16** — Nous allons démontrer l'irrationalité de  $\sqrt{2}$  en raisonnant par l'absurde. Supposons donc que  $\sqrt{2}$  soit un nombre rationnel et écrivons  $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$  avec  $p, q \in \mathbb{N}$  non nuls.

1. Si  $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ , alors  $p = \sqrt{2} \cdot q$  et  $p^2 = 2q^2$ .

2. Soit  $d$  le pgcd de  $p$  et  $q$ . Nous pouvons écrire  $p = dp'$  et  $q = dq'$ , où  $p'$  et  $q'$  sont deux entiers premiers entre eux. Puisque  $\sqrt{2} = \frac{p}{q} = \frac{p'}{q'}$ , nous pouvons remplacer  $p, q$  par  $p', q'$  et donc nous ramener au cas où  $p$  et  $q$  sont premiers entre eux. C'est ce que l'on suppose par la suite.

3. L'égalité  $p^2 = 2q^2$  montre que  $p^2$  est pair. On en déduit que  $p$  est pair car un nombre entier et son carré ont la même parité.

4. Comme  $p$  est pair, nous pouvons écrire  $p = 2u$ . De  $p^2 = 2q^2$ , nous déduisons  $4u^2 = 2q^2$  puis  $q^2 = 2u^2$ . Le nombre entier  $q$  est donc pair.

5. Les deux entiers  $p$  et  $q$  sont pairs. Comme nous avons supposés  $p$  et  $q$  premiers entre eux, nous avons abouti à une contradiction.

Le nombre réel  $\sqrt{2}$  est donc irrationnel.

**Exercice 17** — 1. Si Jules ment, alors ce qu'il dit est faux et donc tous les deux disent la vérité. Ceci est une contradiction, donc Jules est sincère. Puisque Jules est sincère, ce qu'il dit est vrai et l'un des deux est un menteur ; comme ce n'est pas Jules, c'est donc Jim.

2. Si Anne est sincère, alors ce qu'elle dit est vrai et toutes les trois sont des menteuses ; en particulier, Anne est une menteuse et ceci est une contradiction. Anne est donc une menteuse.

Puisque Anne ment, ce qu'elle dit est faux et l'une des trois (au moins) n'est pas une menteuse. Si Émilie ment, alors ce qu'elle dit est faux et donc au moins deux d'entre elles sont sincères. Comme Anne ment, il s'agit nécessairement de Charlotte et d'Émilie et nous aboutissons à une contradiction au sujet de cette dernière. Émilie est donc sincère.

Comme Émilie est sincère, ce qu'elle dit est vrai et une seule des trois est sincère. Il s'agit donc d'Émilie, ce qui signifie que Charlotte est une menteuse.

**Exercice 18** — (Observations préliminaires) La droite  $(D_1)$  d'équation  $x + y = 1$  est la droite passant par les points de coordonnées  $(0, 1)$  et  $(1, 0)$ . La partie  $P_1$  est le demi-plan délimité par cette droite et contenant le point  $(0, 0)$ .

La droite  $(D_2)$  d'équation  $x - y = 1$  est la droite passant par les points de coordonnées  $(0, -1)$  et  $(1, 0)$ . La partie  $P_2$  est le demi-plan délimité par cette droite et contenant le point  $(0, 0)$ .

La droite  $(D_3)$  d'équation  $-x + y \leq 1$  est la droite passant par les points de coordonnées  $(0, 1)$  et  $(-1, 0)$ . La partie  $P_3$  est le demi-plan délimité par cette droite et contenant le point  $(0, 0)$ .

La droite  $(D_4)$  d'équation  $-x - y \leq 1$  est la droite passant par les points de coordonnées  $(-1, 0)$  et  $(0, -1)$ . La partie  $P_4$  est le demi-plan délimité par cette droite et contenant le point  $(0, 0)$ .

1. La partie  $P_1 \cap P_2$  est le demi-cône de sommet  $(1, 0)$ , délimité par les droites  $(D_1)$  et  $(D_2)$ , et contenant  $(0, 0)$ . La partie  $P_3 \cap P_4$  est le demi-cône de sommet  $(-1, 0)$ , délimité par les droites  $(D_3)$  et  $(D_4)$ , et contenant  $(0, 0)$ . La partie  $(P_1 \cap P_2) \cap (P_3 \cap P_4)$  est le carré plein de sommets  $(0, 1), (1, 0), (0, -1)$  et  $(-1, 0)$ .

2. On peut observer sur un dessin les relations

$$(P_1 \cup P_2)^c = P_1^c \cap P_2^c \subsetneq (P_1 \cap P_2)^c = P_1^c \cup P_2^c.$$

Toutes se démontrent facilement en revenant aux définitions des symboles  $\cap, \cup, ^c$ .

**Exercice 19** — Les éléments du produit cartésien  $A \times B$  sont tous les couples  $(a_i, b_j)$  avec  $1 \leq i \leq 3$  et  $1 \leq j \leq 4$ ; il y en a  $3 \times 4 = 12$ .

L'ensemble  $A \times B$  contient  $2^{12} = 4\,096$  parties.

**Exercice 20** —  $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{1\}, \{5\}, E\}$

$$\mathcal{P}(E \cap G) = \{\emptyset, \{1\}\}$$

$$\mathcal{P}(F \cap G) = \{\emptyset\}$$

$$\mathcal{P}(E \cup G) = \{\emptyset, \{1\}, \{4\}, \{5\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{4, 5\}, \{1, 4, 5\}\}$$

$$\mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(F) = \{(\emptyset, \emptyset), (\emptyset, \{2\}), (\emptyset, \{3\}), (\emptyset, F), (\{1\}, \emptyset),$$

$$(\{1\}, \{2\}), (\{1\}, \{3\}), (\{1\}, F), (\{5\}, \emptyset), (\{5\}, \{2\}), (\{5\}, \{3\}), (\{5\}, F), (E, \emptyset), (E, \{2\}), (E, \{3\}), (E, F)\}.$$

$$\mathcal{P}(F \times (E \cap G)) = \{\emptyset, \{(2, 1)\}, \{(3, 1)\}, \{(2, 1), (3, 1)\}\}.$$

L'ensemble  $\mathcal{P}(E)$  contient quatre éléments, donc  $\mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$  en contient  $2^4 = 16$ . Les voici :

$$\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{1\}\}, \{\{5\}\}, \{E\}, \{\emptyset, \{1\}\}, \{\emptyset, \{5\}\}, \{\emptyset, E\}, \{\{1\}, \{5\}\}, \{\{1\}, E\}, \{\{5\}, E\},$$

$$\{\emptyset, \{1\}, \{5\}\}, \{\emptyset, \{1\}, E\}, \{\emptyset, \{5\}, E\}, \mathcal{P}(E).$$

**Exercice 21** — 1. Si  $a_0 \notin A$ , alors  $f(A) = A \cup \{a_0\}$  contient un élément de plus que  $A$  et donc  $\text{Card}(f(A)) = \text{Card}(A) + 1$ . Si  $a_0 \in A$ , alors  $f(A) = A \setminus \{a_0\}$  contient un élément de moins que  $A$  et donc  $\text{Card}(f(A)) = \text{Card}(A) - 1$ . Dans tous les cas de figure,  $\text{Card}(f(A))$  et  $\text{Card}(A)$  sont de parités différentes.

2. Soit  $A$  une partie de  $E$ . Si  $a_0 \notin A$ , alors  $f(A) = A \cup \{a_0\}$  est une partie de  $E$  contenant  $a_0$  et donc  $f(f(A)) = f(A) \setminus \{a_0\} = A$ . Si  $a_0 \in A$ , alors  $f(A) = A \setminus \{a_0\}$  est une partie de  $E$  contenant  $a_0$  et donc  $f(f(A)) = f(A) \cup \{a_0\} = A$ . Dans tous les cas de figure,

$$(f \circ f)(A) = f(f(A)) = A.$$

3. Nous avons obtenu  $f \circ f = \text{id}_{\mathcal{P}(E)}$  à la question précédente, donc  $f$  est une bijection (on peut appliquer la question 6(c) de l'exercice 2-11, ou bien plus simplement observer que  $f$  est sa propre bijection réciproque).

4. Soit  $\mathcal{P}(E)_p$  l'ensemble des parties de  $E$  de cardinal pair et  $\mathcal{P}(E)_i$  l'ensemble des parties de  $E$  de cardinal impair. Puisque  $f$  est une bijection telle que  $f(\mathcal{P}(E)_p) = \mathcal{P}(E)_i$ , l'application  $f$  réalise une bijection entre  $\mathcal{P}(E)_p$  et  $\mathcal{P}(E)_i$ . On en déduit que les deux ensembles finis  $\mathcal{P}(E)_p$  et  $\mathcal{P}(E)_i$  ont le même cardinal, c'est-à-dire que  $E$  contient autant de parties de cardinal pair que de parties de cardinal impair.

**Exercice 22** — 1. L'ensemble  $A \times B$  est la partie de  $E \times F$  formée des couples  $(e, f)$  tels que  $e \in A$  et  $f \in B$ .

2. Notons  $x_1, x_2$  deux éléments distincts de  $E$  et  $y_1, y_2$  deux éléments distincts de  $F$ . L'ensemble  $X = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2)\}$  est une partie de  $E \times F$  qui n'est pas de la forme  $A \times B$  avec  $A \subset E$  et  $B \subset F$ . On peut le justifier en raisonnant par l'absurde. Si  $X = A \times B$ , alors nécessairement  $A$  contient  $x_1$  et  $x_2$  puisque  $A \times B$  contient  $(x_1, y_1)$  et  $(x_2, y_2)$ ; de même,  $B$  doit contenir  $y_1$  et  $y_2$ . On en déduit alors que  $A \times B$  contient les quatre éléments  $(x_1, y_1), (x_1, y_2), (x_2, y_1)$  et  $(x_2, y_2)$ , ce qui n'est pas le cas.

**Exercice 23** — 1. Soit  $E$  un ensemble à  $m$  éléments et  $F$  un ensemble à  $n$  éléments. Se donner une partie de  $E \cup F$  équivaut à se donner une partie  $X$  de  $E$  et une partie  $Y$  de  $F$ , puis à considérer  $X \cup Y$ . Autrement dit, l'application

$$f : \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(F) \rightarrow \mathcal{P}(E \cup F), \quad (X, Y) \mapsto X \cup Y$$

est une bijection dont la bijection réciproque est l'application

$$\mathcal{P}(E \cup F) \rightarrow \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(F), \quad Z \mapsto (Z \cap E, Z \cap F).$$

Avec les notations précédentes,  $\text{Card}(X \cup Y) = \text{Card}(X) + \text{Card}(Y)$ . Ainsi, le sous-ensemble  $\mathcal{P}_k(E \cup F)$  des parties à  $k$  éléments de  $E \cup F$  est en bijection via  $f$  avec la réunion des sous-ensembles  $\mathcal{P}_i(E) \times \mathcal{P}_{k-i}(F)$ , avec  $0 \leq i \leq k$ . On en déduit l'identité

$$\begin{aligned} \binom{n+m}{k} &= \text{Card}(\mathcal{P}_k(E \cup F)) \\ &= \text{Card}\left(\bigcup_{i=0}^k \mathcal{P}_i(E) \times \mathcal{P}_{k-i}(F)\right) \\ &= \sum_{i=0}^k \text{Card}(\mathcal{P}_i(E)) \times \text{Card}(\mathcal{P}_{k-i}(F)) \\ &= \sum_{i=0}^k \binom{n}{i} \binom{m}{k-i} \end{aligned}$$

2. Il suffit d'appliquer l'identité précédente avec  $k = m = n$  et d'utiliser l'égalité  $\binom{n}{n-i} = \binom{n}{i}$ .

**Exercice 24** — Soit  $E$  l'ensemble des pays et soit  $f : E \rightarrow \mathbb{N}$  l'application associant à chaque pays son nombre de voisins. Notons  $n = \text{Card}(E)$  le nombre de pays (supposé fini). Puisque chaque pays a au moins un voisin et au plus  $n - 1$  voisins, l'application  $f$  est à valeurs dans l'ensemble  $\{1, \dots, n - 1\}$ . Comme

$$\text{Card}(\{1, \dots, n - 1\}) = n - 1 < n = \text{Card}(E),$$

l'application  $f$  ne peut pas être injective et il existe donc deux pays distincts ayant le même nombre de voisins.

Exercice 3-10-1  $P \text{ NAND } Q = \neg(P \wedge Q)$

1.

P	Q	$P \wedge Q$	$P \text{ NAND } Q$
0	0	0	1
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0

$P \text{ NAND } Q$  se note aussi  $P \uparrow Q$

2.  $\neg P = \neg(P \wedge P) = P \text{ NAND } P$

$$P \wedge Q = \neg(P \text{ NAND } Q) = (P \text{ NAND } Q) \text{ NAND } (P \text{ NAND } Q)$$

$$P \vee Q = \neg(\neg P) \vee \neg(\neg Q) = \neg(\neg P \wedge \neg Q) = (\neg P) \text{ NAND } (\neg Q)$$

$$= (P \text{ NAND } P) \text{ NAND } (Q \text{ NAND } Q).$$

3.  $P \text{ NOR } Q = \neg(P \vee Q)$

$P \text{ NOR } Q$  se note aussi  $P \downarrow Q$ .

P	Q	$P \vee Q$	$P \text{ NOR } Q$
0	0	0	1
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	1	0

$$\neg P = \neg(P \vee P) = P \text{ NOR } P$$

$$P \wedge Q = \neg(\neg P) \wedge \neg(\neg Q) = \neg((\neg P) \vee (\neg Q)) = (\neg P) \text{ NOR } (\neg Q)$$

$$= (P \text{ NOR } P) \text{ NOR } (Q \text{ NOR } Q).$$

$$P \vee Q = \neg(P \text{ NOR } Q) = (P \text{ NOR } Q) \text{ NOR } (P \text{ NOR } Q)$$

**Exercice 3-10~~2~~** — 1. Les parties  $X$  de  $E$  contenant  $A$  sont en bijection avec les parties  $Y$  de  $A^c$  via l'application

$$\mathcal{P}(A^c) \rightarrow \mathcal{P}(E), \quad X \mapsto A \cup Y.$$

Il y a donc  $2^{n-p}$  parties de  $E$  contenant  $A$ .

2. Les parties de  $E$  à  $m$  éléments contenant  $A$  sont en bijection avec les parties de  $A^c$  à  $m-p$  éléments; il y en a donc  $\binom{n-p}{m-p}$ .
3. Les couples  $(X, Y)$  de parties de  $E$  telles que  $X \cap Y = A$  sont en bijection avec les couples  $(X', Y')$  de parties de  $A^c$  telles que  $X' \cap Y' = \emptyset$  via l'application  $\mathcal{P}(A^c) \times \mathcal{P}(A^c) \rightarrow \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E)$ ,  $(X', Y') \mapsto (A \cup X', A \cup Y')$ . Il y en a donc  $3^{n-p}$ .

De manière générale, si  $F$  est un ensemble à  $m$  éléments, alors il existe  $3^m$  couples  $(X', Y')$  de parties de  $F$  telles que  $X' \cap Y' = \emptyset$ . Pour le démontrer, notons  $C_m$  le nombre de tels couples et observons que la condition  $Y' \cap X' = \emptyset$  équivaut à  $Y' \subset X'^c$ ; il s'agit donc de dénombrer les couples  $(X', Y')$  formés d'une partie  $X'$  de  $F$  et d'une partie  $Y'$  de  $X'^c$ . On en déduit :

$$C_m = \sum_{X' \subset F} \text{Card}(\mathcal{P}(X'^c)) = \sum_{X' \subset F} 2^{m - \text{Card}(X')} = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} 2^{m-k} = (1+2)^m = 3^m.$$

**Exercice 3-10~~3~~** —

$$u_n = \begin{cases} \frac{2^{k+1} - 1}{2^k} & \text{si } n = 2k \text{ est pair} \\ \frac{2^{k+1} - 1}{2^{k+1}} & \text{si } n = 2k + 1 \text{ est impair.} \end{cases}$$

Cette identité se démontre simplement par récurrence.

- Elle est vraie lorsque  $n = 0$  car  $u_0 = 1 = \frac{2^1 - 1}{2^0}$ .
- Supposons qu'elle soit vraie pour un entier  $n \geq 0$ . Si  $n+1$  est pair, alors  $n$  est impair et  $u_{n+1} = u_n + 1$ . En écrivant  $n = 2k + 1$ , l'hypothèse de récurrence permet d'écrire

$$u_{n+1} = u_n + 1 = \frac{2^{k+1} - 1}{2^{k+1}} + 1 = \frac{2^{k+2} - 1}{2^{k+1}}$$

ce qui est bien la formule souhaitée pour  $n+1 = 2(k+1)$ .

Si  $n+1$  est impair, alors  $n$  est pair et  $u_{n+1} = \frac{u_n}{2}$ . En écrivant  $n = 2k$ , l'hypothèse de récurrence permet d'écrire

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2^{k+1} - 1}{2^k} = \frac{2^{k+1} - 1}{2^{k+1}},$$

ce qui est bien la formule souhaitée pour  $n+1 = 2k + 1$ .

**Exercice 3-10~~4~~** — 1. On dénombre ces  $n$ -uplets en fonction de la valeur de la coordonnée  $x_p$ , qui est un nombre entier compris entre 0 et  $n$  :

$$\begin{aligned} D(p, n) &= \sum_{k=0}^n \text{Card}(\{(x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{N}^p \mid x_1 + \dots + x_p = n \text{ et } x_p = k\}) \\ &= \sum_{k=0}^n \text{Card}(\{(x_1, \dots, x_{p-1}) \in \mathbb{N}^{p-1} \mid x_1 + \dots + x_{p-1} = n - k\}) \\ &= \sum_{k=0}^n D(p-1, n-k). \end{aligned}$$



2. On peut déduire de la question précédente l'identité

$$D(p, n) = \binom{n+p-1}{p-1}$$

en raisonnant par récurrence sur  $p \geq 1$ . L'entier  $n \in \mathbb{N}$  est fixé.

- L'équation  $x_1 = n$  a une unique solution dans  $\mathbf{N}$ , donc  $D(n, 1) = 1$ . Comme  $\binom{1+p-1}{1-1} = 1$ , la formule est démontrée pour  $p = 1$ .
- Supposons que la formule soit démontrée pour un certain entier  $p \geq 1$ . D'après la question précédente et l'hypothèse de récurrence, nous pouvons écrire :

$$D(p+1, n) = \sum_{k=0}^n D(p, n-k) = \sum_{k=0}^n \binom{n-k+p-1}{p-1} = \sum_{\ell=0}^n \binom{p-1+\ell}{p-1}.$$

Il s'agit de la somme de tous les coefficients binomiaux situés sur la colonne  $p-1$  du triangle de Pascal, de la ligne  $p-1$  à la ligne  $n+p-1$ . On en déduit

$$D(p+1, n) = \binom{n+p}{p}$$

en vertu de la formule classique<sup>1</sup>

$$\sum_{\ell=0}^b \binom{a+\ell}{a} = \binom{a+b+1}{a+1}$$

pour tous les entiers naturels  $a, b$ .

**Exercice 3-10<sup>5</sup>**— 1. Un élément  $x$  de  $E$  appartient à  $A\Delta B$  si et seulement si  $x \in A \cup B$  — c'est-à-dire  $x$  appartient à  $A$  ou  $B$  — et  $x \notin A \cap B$  — c'est-à-dire  $x$  n'appartient pas à  $A$  et  $B$ . Cela revient à dire que  $x$  appartient à  $A \setminus B$  ou à  $B \setminus A$ , donc  $A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ .

2. (Unicité) Si une telle partie  $X$  existe, alors  $X = X\Delta X = \emptyset$  en vertu de la condition appliquée à la partie  $A = X$ .

(Existence) Vérifions que la partie  $X = \emptyset$  satisfait à notre condition. Pour toute partie  $A$  de  $E$ ,  $A\Delta\emptyset = (A \cup \emptyset) \setminus (A \cap \emptyset) = A \setminus \emptyset = A$ .

3. (Unicité) Fixons une partie  $A$  de  $E$  et supposons que  $A'$  soit une partie de  $E$  telle que  $A\Delta A' = E$ .

Alors, par la définition de l'opération  $\Delta$ , nous obtenons  $A \cup A' = E$  et  $A \cap A' = \emptyset$ , c'est-à-dire  $A' = A^c$ .

(Existence) Pour toute partie  $A$  de  $E$ , nous avons immédiatement  $A\Delta A^c = (A \cup A^c) \setminus (A \cap A^c) = E$ .

**Exercice 3-10<sup>6</sup>**— 1. L'implication de gauche à droite est évidente. Pour obtenir l'implication réciproque, il suffit d'observer que l'on peut écrire  $A = \{x \in E \mid f_A(x) = 1\}$ .

2. La condition  $A \subset B$  équivaut à la condition  $f_A \leq f_B$ .

3. On vérifie immédiatement les identités

$$f_{A \cap B} = f_A f_B = \min\{f_A, f_B\}, \quad f_{A \cup B} = \max\{f_A, f_B\} \quad \text{et} \quad f_{A^c} = 1 - f_A.$$

4. On a  $f_{A\Delta B} = \max\{f_A, f_B\} - \min\{f_A, f_B\} = f_A + f_B - 2f_A f_B$ .

5. Si  $A$  et  $X$  sont deux parties de  $E$ , la condition  $A\Delta X = A$  se traduit en termes de fonctions caractéristiques par  $f_X + f_A - 2f_A f_X = f_A$ , c'est-à-dire  $f_X(1 - 2f_A) = 0$ . Cette condition est vérifiée pour toute partie  $A$  de  $E$  si  $f_X = 0$ , et c'est la seule possibilité puisqu'on obtient  $f_X = 0$  en faisant  $A = \emptyset$ . Comme  $0 = f_\emptyset$ , on retrouve ainsi le résultat de la question 2 de l'exercice précédent.

De manière analogue, la condition  $A\Delta A' = E$  se traduit par  $f_A + f_{A'} - 2f_A f_{A'} = 1$ , c'est-à-dire  $f_{A'}(1 - 2f_A) = 1 - f_A$ . En passant aux valeurs absolues, on en déduit  $f_{A'} = 1 - f_A = f_{A^c}$  car  $|1 - 2f_A| = 1$ , donc  $A' = A^c$ .

**Exercice 3-10<sup>7</sup>**— 1. (Initialisation) Si  $\text{Card}(A) = 1$ , alors se donner une application de  $A$  dans  $B$  revient à choisir l'image dans  $B$  de l'unique élément de  $A$ ; il y a  $\text{Card}(B)$  choix possibles.

(Hérédité) Supposons que l'on sache qu'il existe  $\text{Card}(B)^m$  applications d'un ensemble à  $m$  éléments dans  $B$ . Soit  $A$  un ensemble à  $m+1$  élément. Fixons un élément  $a_0$  dans  $A$ . Se donner une application de  $A$  dans  $B$  revient à se donner une application  $g$  de  $A \setminus \{a_0\}$  dans  $B$ , puis à choisir l'image  $b_0$  de  $a_0$  dans  $B$ ; il y a  $\text{Card}(B)^m$  choix pour  $g$  et  $\text{Card}(B)$  choix pour  $b_0$ , donc il y a au final

$$\text{Card}(B)^m \cdot \text{Card}(B) = \text{Card}(B)^{m+1}$$

applications de  $A$  dans  $B$ .

2. Désignons par  $\{0, 1\}^E$  l'ensemble des applications de  $E$  dans  $\{0, 1\}$ . L'application

$$\mathcal{P}(E) \rightarrow \{0, 1\}^E, \quad A \mapsto f_A$$

est une bijection : elle est injective d'après la question 1 de l'exercice précédent, et elle est surjective car, si  $f$  est une application de  $E$  dans  $\{0, 1\}$ , alors  $f = f_A$  avec  $A = \{x \in E \mid f(x) = 1\} = f^{-1}(1)$ . On en déduit

$$\text{Card}(\mathcal{P}(E)) = \text{Card}(\{0, 1\}^E) = 2^{\text{Card}(E)}.$$