

Feuille 6 : Suites réelles

Exercice 6-1

Déterminez les limites éventuelles des suites suivantes, définies par leur terme général.

- | | | | |
|--|--|---|--|
| 1. $u_n = \frac{n+2}{2n-1}$ | 4. $u_n = \frac{\sqrt{n+2}}{\sqrt{n-1}}$ | 7. $u_n = \sin n$ | 10. $u_n = \frac{n - (-1)^n}{2n + (-1)^n}$ |
| 2. $u_n = \frac{3n^2 - 2n + 3}{n^3 - 1}$ | 5. $u_n = \frac{\sqrt{n+5} + n}{\sqrt{n^2 + 1}}$ | 8. $u_n = \frac{\sin n}{\sqrt{n}}$ | 11. $u_n = \frac{3^n - 2^n}{2^n - 3^n}$ |
| 3. $u_n = \frac{3n^2 - 5}{n+4}$ | 6. $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ | 9. $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ | 12. $u_n = \frac{2^n}{n^{100}}$ |

Exercice 6-2

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de nombres réels définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n}.$$

- Montrez que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante.
- Montrez qu'elle converge et que sa limite l vérifie :

$$\frac{1}{2} \leq l \leq 1.$$

- En déduire que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \infty$.

Exercice 6-3

On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $u_0 = 8$ et la relation de récurrence $u_n = \frac{1}{2}u_{n-1} + 3$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

- On considère la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ donnée par $v_n = u_n + a$ où a est un réel quelconque. Écrivez v_n en fonction de v_{n-1} .
- Déterminez une valeur a pour laquelle la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique.
- Déterminez v_n en fonction de n .
- Déterminez u_n en fonction de n . Quelle est la limite de la suite ?

Exercice 6-4

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n + 8}{2u_n + 1}.$$

On pose alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n = \frac{u_n - 2}{u_n + 2}.$$

- Montrer que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $-\frac{3}{5}$.
- Exprimer v_n en fonction de n .
- En déduire l'expression de u_n en fonction de n .
- Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 6-5

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \sqrt{2u_n - 1}$.

1. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est minorée par 1.
2. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.
3. En déduire que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 6-6

On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $u_0 = 1$ et la relation de récurrence $u_n = \sqrt{1 + u_{n-1}}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 2$.
2. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.
3. En déduire que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 6-7

Étudiez la convergence et calculez l'éventuelle limite de :

1. $u_{n+1} = \frac{1}{6}u_n + 5$, $u_0 = 3$
2. $u_{n+1} = -2u_n + 1$, $u_0 = 0$
3. $u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}$, $u_0 = 8$
4. $u_{n+1} = \sqrt{4 + 3u_n}$, $u_0 = 2$
5. $u_{n+1} = u_n^2 + \frac{2}{9}$, $u_0 = 0$
6. $u_{n+1} = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}$, $u_0 = 2$

Exercice 6-8

On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $u_0 \in [0, 1]$ et $u_n = \frac{3 - u_{n-1}^2}{2}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

1. On considère la fonction $f(x) = \frac{3 - x^2}{2}$.
 - (a) Montrer que f est décroissante sur $[0, \infty[$.
 - (b) Montrer que l'intervalle $[0, \sqrt{3}]$ est laissé stable par f .
 - (c) Trouver $l \in [0, +\infty[$ tel que $f(l) = l$.
 - (d) On note $I_1 = [0, l]$ et $I_2 = [l, \sqrt{3}]$. Montrer que $f(I_1) \subset I_2$ et $f(I_2) \subset I_1$.
 - (e) Déduire de ce qui précède que $f \circ f$ est croissante sur $[0, \sqrt{3}]$, et qu'elle laisse stable les intervalles I_1 et I_2 .
2. Montrer que les suites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont respectivement croissante et décroissante.
3. En déduire que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 6-9

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels positifs telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{1 + u_n} = 0$. Montrez que $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$.

Exercice 6-10

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ trois suites telles que $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n = u_n + v_n$.

1. On suppose que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent. Que peut-on dire de $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$?
2. On suppose que $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas. Que peut-on dire de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$?
3. Donnez un exemple de deux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ divergentes telles que $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit convergente.

Exercice 6-11

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites telles que la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ donnée par $w_n = u_n^2 + u_n v_n + v_n^2$ soit convergente vers 0.

1. En utilisant une identité remarquable, écrire w_n comme la somme de 2 carrés.
2. En déduire que les deux carrés convergent vers 0.
3. En déduire que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent aussi vers 0.

Exercice 6-12

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite croissante telle que la sous suite $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ des termes pairs converge vers l . Montrez que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est aussi convergente.

Exercice 6-13

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs.

- On suppose que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 10$
 - Justifiez qu'il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$, $u_{n+1} \geq 5u_n$.
 - Montrez qu'alors, pour tout $n \geq N$, $u_n \geq 5^{n-N}u_N$.
 - En déduire que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.
- On suppose à présent que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0$
 - Justifiez qu'il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$, $u_{n+1} \leq \frac{1}{2}u_n$.
 - En raisonnant comme avant, montrez que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge cette fois vers 0.

Exercice 6-14

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites définies par :

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n}$$

- Montrez que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.
- Montrez que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont convergentes.

Exercice 6.101

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite croissante de limite l . On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = \frac{u_1 + \dots + u_n}{n}.$$

- Montrez que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.
- Montrez que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n \leq l$. En déduire que (v_n) converge.
- On note l' la limite de (v_n) . Peut-on donner une inégalité entre l et l' ?
- Établir que $v_{2n} \geq \frac{u_n + v_n}{2}$.
- En passant à la limite dans l'inégalité précédente, en déduire que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers l .

Exercice 6-102

- Montrez que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}.$$

- Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite définie pour tout $n > 0$ par

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}.$$

À l'aide de la question 1, montrez que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente et déterminez sa limite.

Exercice 6-103

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite réelle définie par $u_0 \in]1, 2[$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \frac{u_n^2}{4} + \frac{3}{4}$.

- Montrez que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 1$.
- Montrez que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq 2$.

- Montrez que la suite est monotone. En déduire sa convergence.
- Déterminez sa limite.

Exercice 6-104

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite réelle définie par $u_0 = \frac{3}{2}$ et par la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = (u_n - 1)^2 + 1.$$

- On introduit la fonction $f(x) = (x - 1)^2 + 1$. Montrer que f est croissante sur $[1, \infty[$. Déterminer l'image de l'intervalle $]1, 2[$ par f .
- En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 < u_n < 2$.
- Montrer que la suite (u_n) est monotone.
- En déduire que (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 6-105

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et par la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{6}u_n^2 + \frac{3}{2}.$$

- Montrez que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n > 0$.
- Si la suite (u_n) converge, quelle peut être sa limite éventuelle ?
- Montrez que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n < 3$.
- Montrez que (u_n) est croissante. Que peut-on en conclure ?

Exercice 6-106

On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $u_0 = 1$ et la relation de récurrence $u_n = 1 + \frac{1}{u_{n-1}}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

- Calculez u_1 , u_2 et u_3 .
- Montrez que $\forall n \in \mathbb{N}$, $1 \leq u_n \leq 2$.
- Montrez que les suites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes.
- Déterminez la limite l de la suite, à partir d'une équation qu'elle doit vérifier.

Exercice 6-107

Étudiez la monotonie des suites définies par les termes généraux suivants :

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \text{ (pour } n \geq 1), \quad n - 2^n, \quad \frac{e^n}{n!}, \quad (n+1)(n+2) \dots (n+n), \quad \frac{n-1}{n+3}, \quad n - \operatorname{sh}n.$$

Exercice 6-108

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites définies par :

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \quad v_n = u_n + \frac{1}{nn!}$$

- Montrez que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante
- Montrez que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont convergentes.