Exercice 1
Après tests sur quelques petites valeurs on émet l'hypothèse suivante :

$$(H_n) \qquad P_n = 1 + X + X^2 + \cdots + X^{2^{n+1}-1}.$$

On la montre par récurrence :
* Pour $n = 0$, vu que $P_0 = 1 + X$, l'hypothèse (H_0) est vérifiée.
* Soit $n \geq 0$ un entier, supposons (H_n). On calcule alors :

$$\begin{aligned} P_{n+1} &= P_n(1 + X^{2^{n+1}}) = (1 + X + X^2 + \cdots + X^{2^{n+1}-1})(1 + X^{2^{n+1}}) \\ &= (1 + X + X^2 + \cdots + X^{2^{n+1}-1}) + (X^1 + X^{n+1} + X^{n+2} + \cdots + X^{2^{n+2}-1}) \end{aligned}$$

et on constate la véracité de (H_{n+1}).
Par le principe de récurrence, la formule (H_n) est donc vraie pour tout entier $n \geq 0$.

Exercice 2

1) Soit P un polynôme qui répond à la question, et soit d son degré. On vérifie, de façon plus ou moins laborieuse, que le degré de $P(X^2 + 1)$ est $2d$, et on en déduit que $d = 2d$ donc que $d = -\infty$ ou $d = 0$, donc que P est constant. Réciproquement, les polynômes constants vérifient clairement la condition proposée.

2) Soit P un polynôme non nul qui répond à la question. Notons d son degré et λ son coefficient dominant. On vérifie, de façon plus ou moins laborieuse, que le degré de $P(2X+1)$ est également d et que son coefficient dominant est $2^d\lambda$. On en déduit que $(1-2^d)\lambda = 0$. Un coefficient dominant n'est pas nul, donc $1 - 2^d = 0$ et donc P est constant. Réciproquement, les polynômes constants vérifient clairement la condition proposée.

Exercice 3
Soit a, b des réels. Dans un premier temps, supposons que P_{ab} soit le carré d'un polynôme Q, de degré d. Le degré de Q^2 est $2d$ tandis que celui de P est 4 donc $d = 2$ et le polynôme Q est de la forme $\alpha X^2 + \beta X + \gamma$ pour trois constantes $\alpha \in \mathbf{R}^*$, $\beta \in \mathbf{R}$ et $\gamma \in \mathbf{R}$. Dans l'identité $P_{ab} = (\alpha X^2 + \beta X + \gamma)^2$, on peut identifier les coefficients de X^4 d'une part, de X d'autre part et enfin les termes constants. On obtient les trois relations $\alpha^2 = 1$, $\beta\gamma = 1$ et $\gamma^2 = 1$, autrement dit $\alpha = \pm 1$ et $\beta = \gamma = \pm 1$. Le polynôme P_{ab} est donc égal soit à $(X^2 + X + 1)^2$, soit à $(X^2 - X - 1)^2$ (il est superflu d'énumérer les deux autres possibilités $(-X^2 + X + 1)^2$ et $(-X^2 - X - 1)^2$, qui représentent les deux mêmes polynômes sous une autre forme). En développant les carrés, on obtient $P_{ab} = X^4 + 2X^3 + 3X^2 + 2X + 1$ ou $P_{ab} = X^4 - 2X^3 - X^2 + 2X + 1$, et donc $(a, b) = (1, 3)$ ou $(a, b) = (-1, -1)$.
Réciproquement, si $(a, b) = (1, 3)$ alors $P_{ab} = X^4 + 2X^3 + 3X^2 + 2X + 1 = (X^2 + X + 1)^2$ est un carré, et si $(a, b) = (-1, -1)$ alors $P_{ab} = X^4 - 2X^3 - X^2 + 2X + 1 = (X^2 - X - 1)^2$.

Exercice 4

1) a) Le degré de $P(2X)$ est encore δ. Si le degré de P est 0 ou 1, le polynôme $P'P''$ est nul donc de degré $-\infty$. Sinon, son degré est $(\delta - 1) + (\delta - 2) = 2\delta - 3$. Comme ces degrés sont égaux, on en déduit que $\delta = 2\delta - 3$ puis que $\delta = 3$.

b) Le coefficient dominant de $P(2X)$ est alors $8a$, celui de P' est $3a$ et celui de P'' est $6a$, donc celui de $P'P''$ est $18a^2$. Comme ces coefficients dominants sont égaux, on en déduit que $8a = 18a^2$; comme un coefficient dominant n'est pas nul on en déduit que $8 = 18a$ et on conclut que $a = 4/9$.

c) On note alors $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$, et on calcule $P'P'' = (3aX^2 + 2bX + c)(6aX + 2b) = 18a^2X^3 + 18abX^2 + (6ac + 2b^2)X + 2bc$. En rapprochant les écritures de P et de $P'P''$ ici fournies, on voit d'abord que $b = 18ab$ ce qui, compte tenu de la valeur de a entraîne la nullité de b, puis celle de $d = 2bc$. Enfin $c = 6ac + 2b^2 = 6ac$ dont on déduit, compte tenu de la valeur de a, que $c = 0$. Finalement $P = aX^3 = 4X^3/9$.

2) On vérifie sans douleur que tant $4X^3/9$ que 0 sont solutions de l'équation, et on a vu ci-dessus qu'il ne peut y en avoir d'autres.

Exercice 5

1) On remarque que 1 est racine. On effectue ensuite la division du polynôme proposé P par $X - 1$ pour obtenir $P = (X - 1)(X^2 - 6X + 8) = (X - 1)(X - 2)(X - 4)$. Sur cette écriture il est clair que les racines de P sont 1, 2 et 4, aussi bien dans $\mathbf{R}$ que dans $\mathbf{C}$.

2) C'est une recherche des racines 6-èmes d'un nombre complexe, à savoir le nombre 4. Par application directe du cours, les racines complexes sont au nombre de six, et ce sont les $\sqrt[3]{2}e^{\frac{2ik\pi}{6}}$ pour k variant entre 0 et 5. Les racines réelles sont au nombre de deux, à savoir $-\sqrt[3]{2}$ et $\sqrt[3]{2}$.

3) On commence par factoriser le polynôme auxiliaire $Y^2 - 13Y + 36 = (Y-9)(Y-4)$ (où on a noté l'indéterminée Y au lieu de X pour rendre la suite moins confuse). En substituant le polynôme X^2 à l'indéterminée Y, on obtient la factorisation $X^4-13X^2+36 = (X^2-9)(X^2-4) = (X+3)(X+2)(X-2)(X-3)$. Sur cette dernière expression les racines sont évidentes : ce sont -3, -2, 2 et 3 et ce qu'on travaille en réel ou en complexe.

4) Si on essaie de commencer comme à la question précédente, le polynôme auxiliaire $Y^2 + 6Y + 25$ a un discriminant strictement négatif et n'a donc pas de racine réelle. Soit r une racine réelle du polynôme de l'énoncé. En substituant r^2 dans le polynôme $Y^2 + 6Y + 25$ on constate que r^2 est alors racine réelle de $Y^2 + 6Y + 25$ qui n'en a pas, ce qui est assez absurde. On conclut ainsi que le polynôme de l'énoncé n'a pas de racine réelle. Pour l'étude sur $\mathbf{C}$, on peut factoriser le polynôme auxiliaire comme plus haut, puis extraire deux racines deuxièmes complexes, il est plus élégant de connaître une astuce pratique face à ce type de polynôme dits "bicarrés" : elle consiste à regrouper préalablement les termes en X^4 et les termes constants, puis y voir les termes extrêmes d'un carré. Exécutons :

$$X^4+6X^2+25 = [X^4+25]+6X^2 = [(X^2+5)^2-10X^2]+6X^2 = (X^2+5)^2-4X^2 = (X^2+2X+5)(X^2-2X+5).$$

On n'a plus qu'à rechercher séparément les racines des deux facteurs qui sont apparus ; on peut le faire par les formules du cours pour la résolution des équations du second degré ou, ce qui va peut-être finalement plus vite ici, en les redémontrant :

$$X^2 + 2X + 5 = [(X+1)^2 - 1] + 5 = (X+1)^2 + 4 = (X+1)^2 + (2i)^2 = (X+1+2i)(X+1-2i) \text{ et}$$

$$X^2 - 2X + 5 = [(X+1)^2 - 1] + 5 = (X-1)^2 + 4 = (X-1)^2 + (2i)^2 = (X-1+2i)(X-1-2i).$$

Finalement, on a trouvé les quatre racines complexes du polynôme de l'énoncé : ce sont $-1-2i$, $-1+2i$, $1-2i$ et $1+2i$.

Exercice 6

1) Le cours sur les nombres complexes nous a fait connaître les m racines complexes de $X^m - 1$, à savoir les $e^{\frac{2ik\pi}{m}}$ pour k variant entre 0 et $m-1$. Si on s'intéresse aux racines réelles, on peut remarquer que si x est une racine, $|x|^n = 1$ donc $|x| = 1$ donc $x = \pm 1$. On vérifie ensuite aussitôt que 1 est racine dans tous les cas, et que -1 l'est si et seulement si n est pair. On conclut que si n est impair, -1 est l'unique racine réelle de $X^n - 1$ tandis que si n est pair, -1 et 1 sont les deux seules racines réelles de $X^n - 1$.

2) Remarquons prélablement que 1 n'est pas racine de $X^n + X^{n-1} + \cdots + X + 1$. Soit maintenant $z \in \mathbf{C}$. Alors z est racine de $X^n + X^{n-1} + \cdots + X + 1$ si et seulement si $z^n + z^{n-1} + \cdots + z + 1 = 0$, ce qui entraîne $(z-1)(z^n + z^{n-1} + \cdots + z + 1) = 0$ soit $z^{n+1} - 1 = 0$. Réciproquement, si $z^{n+1} - 1 = 0$ et $z \neq 1$ on peut simplifier par $z - 1$ et obtenir $z^n + z^{n-1} + \cdots + z + 1 = 0$. On conclut que les racines de $X^n + X^{n-1} + \cdots + X + 1$ sont exactement celles des racines de $X^{n+1} - 1$ qui sont différentes de 1. On va alors se référer au 1) et on conclut que les racines complexes de $X^n + X^{n-1} + \cdots + X + 1$ sont les $e^{\frac{2ik\pi}{n+1}}$ pour k variant entre 1 et n, qu'il n'y a pas de racine réelle si n est pair et que -1 est l'unique racine réelle si n est impair.

Exercice 7

Ce polynôme admet dans $\mathbf{R}[X]$ une décomposition en facteurs irréductibles, et on sait que les polynômes irréductibles de $\mathbf{R}[X]$ sont de degré 1 ou 2. Un produit de facteurs tous de degré deux est de degré pair, ce que n'est pas le polynôme proposé, de degré 163. C'est donc que celui-ci admet au moins un facteur irréductible du premier degré. Ce facteur irréductible admet alors une racine réelle, qui est aussi racine du polynôme décomposé.

Exercice 8

Pour chaque k entier strictement positif, si on substitue $2k\pi$ à x dans l'identité supposée, on obtient $V(2k\pi) = 0$. Le polynôme V admet donc une infinité de racines, et est donc nul. On agit ensuite de même avec subtitution de $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ et la nullité de U tombe.

Exercice 9

1) On va montrer par récurrence l'énoncé suivant :

$$(H_n) \qquad \text{Le degré de } P_n \text{ est } n \text{ et celui de } P_{n+1} \text{ est } n+1.$$

* Pour $n = 0$, vu les valeurs fournies pour P_0 et P_1, l'hypothèse (H_0) est vérifiée.
* Soit $n \geq 0$ un entier, supposons (H_n). On constate alors que le degré de XP_{n+1} est $n+2$, strictement supérieur au degré de P_n et donc que le degré de $P_{n+2} = XP_{n+1} - P_n$ est lui aussi $n+2$. Ce qui démontre (H_{n+1}).

Par le principe de récurrence, la formule (H_n) est donc vraie pour tout entier $n \geq 0$. En particulier, le degré de P_n est n.

2) Soit z un complexe non nul. On note :

$$(H_n) \qquad P_n\left(z+\frac{1}{z}\right) = z^n + \frac{1}{z^n} \text{ et } P_{n+1}\left(z+\frac{1}{z}\right) = z^{n+1} + \frac{1}{z^{n+1}}.$$

* Pour $n = 0$, vu les valeurs fournies pour P_0 et P_1, l'hypothèse (H_0) est vérifiée.
* Soit $n \geq 0$ un entier, supposons (H_n). On calcule alors :

$$\begin{aligned} P_{n+2}\left(z+\frac{1}{z}\right) &= \left(z+\frac{1}{z}\right)P_{n+1}\left(z+\frac{1}{z}\right) - P_n\left(z+\frac{1}{z}\right) = \left(z+\frac{1}{z}\right)\left(z^{n+1}+\frac{1}{z^{n+1}}\right) - \left(z^n + \frac{1}{z^n}\right) \\ &= z^{n+2} + z^n + \frac{1}{z^n} + \frac{1}{z^{n+2}} - z^n - \frac{1}{z^n} = z^{n+2} + \frac{1}{z^{n+2}}, \end{aligned}$$

ce qui prouve (H_{n+1}).

Par le principe de récurrence, les formules de (H_n) sont donc vraies pour tout entier $n \geq 0$. En particulier, la formule à prouver est vraie.

3) Il suffit d'appliquer la question précédente à $z = e^{i\theta}$. On obtient :

$$P_n(2\cos\theta) = e^{in\theta} + e^{-in\theta} = 2\cos(n\theta).$$

4) On commence par rechercher celles des racines de P_n qui sont des réels de l'intervalle $[-2, 2]$. Pour chacune de celles-ci, il existe un (et même plusieurs) réels θ permettant de les écrire sous la forme $\cos(2\theta)$.

Or pour tout θ réel :

$$P_n(2\cos\theta) = 0 \iff 2\cos(n\theta) = 0 \iff n\theta \equiv \frac{\pi}{2} \quad [\pi] \iff \theta \equiv \frac{\pi}{2n} \quad [\frac{\pi}{n}].$$

On a donc identifié certaines racines de P_n, qui sont les $2\cos\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right)$.

On remarque alors que quand k varie entre 0 et $n-1$, l'angle dans la formule précédente varie dans l'intervalle $]0, \pi[$ de façon strictement croissante comme fonction de k : les n réels $2\cos\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right)$, où k varie de 0 à $n-1$ sont donc n racines distinctes de P_n. Vu le degré de P_n, connu depuis la question 1, on a en fait trouvé là toutes les racines, il n'y a pas lieu à investigations supplémentaires.

Exercice 10

1) Notons $Q = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$. Alors :

$$Q(P_1) - Q(P_2) = \sum_{k=0}^{d} a_k (P_1^k - P_2^k) = \sum_{k=1}^{d} a_k (P_1^k - P_2^k) = \sum_{k=1}^{d} a_k (P_1 - P_2)(\sum_{j=0}^{k-1} P_1^j P_2^{k-1-j})$$
$$= (P_1 - P_2) \left(\sum_{k=1}^{d} a_k (\sum_{j=0}^{k-1} P_1^j P_2^{k-1-j}) \right).$$

Cette relation montre la divisibilité attendue.

2) On applique la première question en prenant $P_1 = P$, $P_2 = X$ et $Q = P$. On découvre alors que $P - X$ divise $P(P) - P$. Comme par ailleurs et de façon évidente $P - X$ divise $P - X$, on conclut que $P - X$ divise la somme $[P(P) - P] + [P - X] = P(P) - X$.

Exercice 11

Dans chacune des questions, il est prudent de commencer par se rendre compte que tout diviseur d'un polynôme non nul de degré d est de degré compris au sens large entre 0 et d. Dans chacune des questions, on commencera par rechercher les diviseurs de degré 0, c'est-à-dire les diviseurs constants non nuls. Comme pour tout polynôme P de $\mathbf{R}[X]$ et tout réel λ non nul on a $P = \lambda(P/\lambda)$, toutes les constantes non nulles sont des diviseurs de P, et itou en remplaçant les réels par des complexes. Les diviseurs de degré 0 sont donc exactement les constantes non nulles dans chacune des quatre questions. On recherche ensuite les diviseurs de degré maximal. En notant P le polynôme dont on recherche les diviseurs, si un polynôme Q de même degré le divise, le quotient est de degré 0 donc est une constante non nulle qu'on peut noter $1/\lambda$; on en déduit que $Q = \lambda P$. Et réciproquement, pour λ non nul, λP divise P puisque $P = (1/\lambda)(\lambda P)$. Les diviseurs de degré maximal sont donc identifiés. Il ne reste plus, dans trois questions sur six, qu'à rechercher les polynômes de degré 1 qui divisent P. C'est particulièrement facile à la question 4 : si le polynôme $X^2 + 1$ admettait un diviseur de degré 1, il admettrait au moins une racine, ce qu'il ne fait pas. Point de diviseur de degré 1 dans ce cas, donc. Pour la question 2, soit $\lambda X - \mu$ un diviseur de $X^2 - 1$ (où $\lambda \neq 0$). L'unique racine $\frac{\mu}{\lambda}$ du diviseur est racine du divisé, donc est égale à ± 1 et donc $\mu = \pm\lambda$. On vérifie très facilement que, réciproquement, $\lambda(X \pm 1)$ est un diviseur de $X^2 - 1$. On en a donc dressé la liste complète. La question 3 est pareille, avec quelques i qui s'y glissent. Finalement :

* aux questions 1 et 4, les diviseurs sont les λ et les λP, où λ est un réel non nul ;
* à la question 2, ce sont les λ , les λP, les $\lambda(X + 1)$ et les $\lambda(X - 1)$, où λ est un réel non nul ;
* à la question 3, ce sont les λ , les λP, les $\lambda(X + i)$ et les $\lambda(X - i)$, où λ est un complexe non nul.

Exercice 12

Toutes les congruences écrites ci-dessous le sont modulo $X^5 - 1$.

1) $X^5 \equiv 1$ donc $X^{5n} \equiv 1^n = 1$. Le reste cherché est donc lui aussi congru à 1. Comme il est de degré strictement inférieur à 5, il est égal à 1.

2) En multipliant la congruence $X^{95} \equiv 1$ par X^4, on obtient $X^{99} \equiv X^4$ et on fait de même pour tous les autres termes. Le polynôme proposé est donc congru à $X^4 + 2X^2 - 0 - 2X^2 + 3 = X^4 + 3$; le reste l'est donc aussi. Vu son degré strictement supérieur à 5, il lui est même égal.

Exercice 13

Notons Q le quotient de la division euclidienne pratiquée. Alors : $(*)$ $P = Q(X - 7) + R$, où le degré de R est strictement inférieur à 1 autrement dit R est un polynome constant. En substituant 7 à l'indéterminée dans $(*)$ on obtient alors : $P(7) = R(7)$; comme R est constant, $R = R(7)$ et finalement $R = P(7)$.

Exercice 14

(À réécrire !) On refait l'exercice précédent en remplaçant $\mathbf{R}$ par $\mathbf{C}$, P par A, a par i et b par $-i$. On a alors $\lambda = A(i) = (e^{ia})^n = e^{nia}$ et $\mu = A(-i) = (e^{-ia})^n = e^{-nia}$.

En notant R le reste cherché, on recopie alors les formules du 6 1, adaptées à ces nouvelles valeurs :

$$R = \frac{e^{nia} - e^{-nia}}{2i} X + \frac{ie^{-nia} + ie^{nia}}{2i} = X \sin(na) + \cos(na).$$

Exercice 15

1) Après calcul peu palpitant, le quotient est $3X^3 - 6X^2 + 3X + 16$ et le reste est $-41X - 47$.

2) Après calcul pas plus drôle, le quotient est $3X^2 + 2X - 3$ et le reste est $-9X^2 - X + 7$.

Exercice 16

La division euclidienne de P par Q donne : $P = Q - R$ où on note $R = 5X^3 - 7X^2 + 10X - 14$. On en déduit les relations $\mathrm{PGCD}(P, Q) = \mathrm{PGCD}(Q, R)$ et $R = Q - P$.

La division euclidienne de Q par R contient de désagréables dénominateurs. On la fait quand même et on obtient, en notant $T = X^2 + 2$ la relation $Q = (\frac{X}{5} + \frac{7}{25})R + \frac{24}{25}T$. On en déduit les relations $\mathrm{PGCD}(P, Q) = \mathrm{PGCD}(Q, R) = \mathrm{PGCD}(R, T)$ et : $25Q = (5X + 7)R + 24T = (5X + 7)(Q - P) + 24T$ d'où $24T = (5X + 7)P + (-5X + 18)Q$ et donc :

$$T = \frac{7 + 5X}{24}P + \frac{18 - 5X}{24}Q.$$

La division euclidienne de R par T fait découvrir que T divise R. Comme T est unitaire, c'est que T est le PGCD demandé ; la relation de Bézout cherchée est donc celle qu'on a écrite au-dessus de ce paragraphe.

Exercice 17

1) On a déjà étudié ce polynôme à l'exercice 5-10 : on connaît ainsi ses racines qui sont les n complexes distincts $e^{\frac{2i\pi k}{n+1}}$ pour k variant entre 1 et n. Chaque facteur irréductible $X - e^{\frac{2i\pi k}{n+1}}$ pour k variant entre 1 et n apparaît donc dans la factorisation de $X^n + X^{n-1} + \cdots + X + 1$; vu le degré de celui-ci et son caractère unitaire, on a fini l'investigation et on connaît désormais cette décomposition ; c'est :

$$X^n + X^{n-1} + \cdots + X + 1 = \prod_{k=1}^{n}(X - e^{\frac{2i\pi k}{n+1}}).$$

2) On sait identifier les 11 racines du polynôme proposé - ce sont les racines onzièmes de $(-2)^{11}$, qui sont elles-mêmes les opposées des racines onzièmes de 2^{11}. Sans écrire les détails du passage de la recherche de racines toutes distinctes à la factorisation (ce sont les mêmes qu'à la question 1), on conclut que :

$$X^{11} + 2^{11} = \prod_{k=0}^{10}(X + e^{\frac{2i\pi k}{11}}).$$

Pour obtenir ensuite la décomposition réelle, il convient de rapprocher l'une de l'autre les racines conjuguées du polynôme qu'on est en train de factoriser. Il est facile, notamment avec un petit dessin, de s'apercevoir que la racine -1 qui correspond à $k = 0$ est réelle, tandis que les autres sont deux à deux conjuguées, celle correspondant à un k compris entre 1 et 5 pouvant être appariée avec celle correspondant à l'indice $11 - k$. Cela remarqué, on arrive rapidement à :

$$X^{11} + 2^{11} = (X + 1)\prod_{k=1}^{5}(X^2 + 2\cos\left(\frac{2k\pi}{11}\right) + 1).$$

3) On recherche les racines quatrièmes de -4 par exemple selon la technique usuelle, en passant par la forme trigonométrique (ou en cherchant successivement les racines deuxièmes, puis les racines deuxièmes de celles-ci). Quelle que soit la méthode utilisée, on parvient à l'énumération suivante : $1 + i$, $1 - i$, $-1 + i$ et $-1 - i$. Comme dans les questions précédentes on en déduit la factorisation :

$$X^4 + 4 = (X - 1 - i)(X - 1 + i)(X + 1 - i)(X + 1 + i).$$

Pour la décomposition en irréductibles de $\mathbf{R}[X]$ il convient encore de regrouper les racines conjuguées et effectuer le produit correspondant. On obtient :

$$X^4 + 4 = (X^2 - 2X + 2)(X^2 + 2X + 2).$$

Cette décomposition peut aussi être obtenue par l'astuce assez anecdotique déjà mentionnée au 4 4 : on peut regrouper $X^4+4=(X^2+2)^2-4X^2$ puis appliquer l'identité remarquable a^2-b^2 à cette expression pour conclure.

4) Les racines quatrièmes du complexe j peuvent certes s'exprimer de bien des façons ; parmi elles leur énumération comme j, ij, $-j$ et $-ij$ est agréablement concise. Si on les a présentées ainsi on peut conclure, sur le même modèle que les questions précédentes que :

$$X^4-j=(X-j)(X-ij)(X+j)(X+ij).$$

5) On peut s'y prendre de plusieurs façons. L'une peut être d'introduire le polynôme $Q=X^2+X+1$ qu'on sait factoriser sur $\mathbf{C}$ en $(X-j)(X-j^2)$ et en déduire que $X^8+X^4+1=(X^4-j)(X^4-j^2)$, puis factoriser chacun de ces facteurs, sachant que le premier a été traité à la question précédente et qu'on peut en déduire la factoriation du second, puis enfin regrouper les termes deux à deux conjugués.
Il est ici quand même beaucoup plus rapide de jongler avec la technique anecdotique de manipulation des polynômes dits bicarrés : on écrit d'abord $X^8+X^4+1=(X^4+1)^2-X^4=(X^4+X^2+1)(X^4-X^2+1)$ puis on factorise chacun des facteurs par la même technique : $X^4+X^2+1=(X^2+1)^2-X^2=(X^2+X+1)(X^2-X+1)$ tandis que $X^4-X^2+1=(X^2+1)^2-3X^2=(X^2+X\sqrt{3}+1)(X^2-X\sqrt{3}+1)$ et on rapproche le tout :

$$X^8+X^4+1=(X^2+X+1)(X^2-X+1)(X^2+X\sqrt{3}+1)(X^2-X\sqrt{3}+1).$$

Chacun des facteurs de la décomposition ci-dessus est irréductible, soit qu'on calcule explicitement les quatre discriminants et constate qu'ils sont tous strictement négatifs, soit qu'on remarque (sous sa forme orginelle) que la fonction polynomiale associée au polynôme X^8+X^4+1 ne prend sur $\mathbf{R}$ que des valeurs strictement positives, donc que le polynôme n'a pas de racine réelle.

6) Elle ressemble raisonnablement au 2 pour commencer, et on obtient encore plus rapidement la factorisation :

$$X^5-1=(X-1)(X^2-2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)+1)(X^2-2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)+1).$$

Exercice 18

1) Les polynômes P et Q sont tous deux donnés par leur décomposition en irréductibles de $\mathbf{R}[X]$. Il suffit de rapprocher ces deux décompositions pour observer quels irréductibles divisent les deux, et à quelles puissances. Il n'y a plus qu'à écrire la réponse, sans oublier que c'est par définition un polynôme unitaire : ici $\mathrm{PGCD}(P,Q)=(X-1)(X^2+1)$.

2) On factorise sans mal $Q=X(X+2)(X-1)$. On teste pour chacun des diviseurs irréductibles de Q s'il est ou non diviseur de P ce qui est très simple pour des diviseurs du premier degré : on constate que P a un terme constant non nul, donc n'est pas divisible par X, que $P(1)=0$, et donc que $X-1$ divise P et enfin que $P(-2)=0$ (ou, si on préfère, que $P=X^6(X+2)-(X+2)$) donc que $X+2$ divise P. On conclut que $\mathrm{PGCD}(P,Q)=(X-1)(X+2)$.

3) On supposera que $n\geq 1$, l'énoncé n'étant pas très clair si $n=0$. Là encore, on teste si les diviseurs irréductibles de Q divisent ou non P : ce n'est pas le cas de X, ce n'est pas le cas de $X-2$ ($P(2)$ est un entier impair, donc pas nul) et c'est le cas de $X-1$ puisque $P(1)=0$. On calcule ensuite P' puis $P'(1)=0$ et on voit que 1 est racine multiple de P. Tout cela permet de conclure que $\mathrm{PGCD}(P,Q)=(X-1)^2$.

4) Par l'exercice 13 1), on sait factoriser :
$-P(-X)=X^5+X^4+X^3+X^2+X+1=(X+1)(X-j)(X-j^2)(X+j)(X+j^2)$,
dont on déduit la factorisation de $P=(X-1)(X-j)(X-j^2)(X+j)(X+j^2)$.
On teste chacune des racines de P sur le polynôme Q. On constate que $Q(1)\neq 0$, que $Q(j)=j+j^2+8j+1+8j^2+8=9(1+j+j^2)=0$ et que $Q(-j)=-j-j^2+8j-1+8j^2+8=7(1+j+j^2)=0$; pour les deux racines restantes elles sont conjuguées de celles qu'on vient de tester et Q est à coefficients réels, donc elles sont aussi racines de Q. On conclut que $\mathrm{PGCD}(P,Q)=(X-j)(X-j^2)(X+j)(X+j^2)$.

Exercice 19

1) On écrit la condition $P(-1) = 0$ et on obtient : $1 - 4 + 8 - 10 + \alpha - 4 + 1 = 0$ donc $\alpha = 8$.

2) On calcule $P' = 6X^5 + 20X^4 + 32X^3 + 30X^2 + 16X + 4$ puis $P'' = 30X^4 + 80X^3 + 96X^2 + 60X + 16$. On constate alors que $P'(-1) = -6 + 20 - 32 + 30 - 16 + 4 = 0$ et que $P''(-1) = 30 - 80 + 96 - 60 + 16$ finit par un 2 en base 10 donc n'est pas nul. On conclut que -1 est racine double de P.

3) En ayant en tête que $j^6 = j^3 = 1$, que $j^5 = j^2$ et que $j^4 = j$, on calcule $P(j) = 1 + 4j^2 + 8j + 10 + 8j^2 + 4j + 1 = 12(j^2 + j + 1) = 0$ puis $P'(j) = 6j^2 + 20j + 32 + 30j^2 + 16j + 4 = 36(j^2 + j + 1) = 0$ et on conclut que j est racine au moins double de P.

4) Le polynôme P est à coefficients réels ; le conjugué j^2 de sa racine j est donc également une racine, et elle est également multiple. On sait donc que -1 est racine double de P, j est racine au moins double et $-j$ est racine au moins double. Comptées avec multiplicité, les racines de P sont au nombre de six, ceci entraîne que j et j^2 sont exactement doubles. Enfin le coefficient dominant de P est 1. On obtient la décomposition en irréductibles de $\mathbf{C}[X]$:

$$P = (X + 1)^2(X - j)^2(X - j^2)^2.$$

Pour obtenir celle dans $\mathbf{R}[X]$, on regroupe ensemble les facteurs correspondant aux racines non réelles conjuguées, ici à j et j^2 et on conclut que :

$$P = (X + 1)^2(X^2 + X + 1)^2.$$

Exercice 20

Soit a, b et c trois réels. Le polynôme P admet 1 pour racine multiple si et seulement si $P(1) = 0$ et $P'(1) = 0$ c'est-à-dire si et seulement si $a + b + c = 0$ et $(n + 1)a + nb = 0$ c'est-à-dire si et seulement si il existe un t réel tel que $(a, b, c) = (nt, -nt - t, t)$. Il existe des t réels, donc il existe des polynômes P qui répondent à la question, et il en existe même des pas nuls, car si on accepte le polynôme nul la question est de peu d'intérêt. Dans la suite on supposera $t \neq 0$. On calcule P'', on a à traiter un cas particulier pour $n = 1$, dans ce cas, $P'' = 2a = 2t$ est une constante non nulle, et donc $P''(1) \neq 0$. Hors de ce cas particulier, $P'' = n(n + 1)[aX^{n-1} + bX^{n-2}]$ donc $P''(1) = n(n + 1)(a + b) = -n(n + 1)t$ n'est pas davantage nul. On conclut que 1 est racine double de P.

Exercice 21

Soit $a \in \mathbf{C}$.

1) Dans un premier temps on calcule $P_a' = 6(X^2+X+1)$, dont les racines sont j et j^2. Pour chacune d'entre elles, on discute si elle est ou non racine de P_a. Le complexe $P_a(j)$ est nul si et seulement si $2+3j^2+6j+a = 0$ c'est-à-dire si et seulement si $a = -2 - 6j - 3j^2 = -2 - 6j - 3(-1 - j) = 1 - 3j = \dfrac{5}{2} - \dfrac{3\sqrt{3}}{2}i$; ensuite $P_a(j^2)$ est nul si et seulement si $P_{\overline{a}}(\overline{j}^2) = 0$ c'est-à-dire $P_{\overline{a}}(j) = 0$ soit $\overline{a} = \dfrac{5}{2} - \dfrac{3\sqrt{3}}{2}i$ ou encore $a = \dfrac{5}{2} + \dfrac{3\sqrt{3}}{2}i$.

Il ressort de ces calculs que :

* si $a \neq \dfrac{5}{2} \pm \dfrac{3\sqrt{3}}{2}i$, le PGCD demandé est 1 ;

* si $a = \dfrac{5}{2} - \dfrac{3\sqrt{3}}{2}i$, le PGCD demandé est $X - j$;

* si $a = \dfrac{5}{2} + \dfrac{3\sqrt{3}}{2}i$, le PGCD demandé est $X - j^2$.

NB : on peut aussi faire avec l'algorithme d'Euclide ; on commence de la même façon en calculant P_a' puis, pour éviter de subir des fractions abrutissantes, on constate que $\mathrm{PGCD}(P_a, P_a') = \mathrm{PGCD}(P_a, \frac{1}{6}P_a')$. On effectue ensuite la division euclidienne de P_a par $X^2 + X + 1$ dont le reste se révèle être $3X + (a - 1)$ et on sait donc que $\mathrm{PGCD}(P_a, P_a') = \mathrm{PGCD}(P_a, X^2 + X + 1) = \mathrm{PGCD}(X^2 + X + 1, 3X + (a - 1))$. Là on ne croît plus trop à la pertinence de poursuivre les divisions euclidiennes et on s'interroge comme on l'a fait plus haut quant à savoir si j ou j^2 est la racine du polynôme $3X + (a - 1)$. Si tout va bien, on a la satisfaction de retrouver les mêmes solutions.

2)
* Si $a \neq \frac{5}{2} \pm \frac{3\sqrt{3}}{2}i$, les polynômes P_a et P'_a n'ont aucune racine commune, donc P_a n'a pas de racine multiple, donc pas de racine double.
* Si $a = \frac{5}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i$, j est racine commune de P_a et P'_a, donc racine multiple de P_a ; vu le coefficient dominant de P_a il existe donc un nombre complexe c tel que $P_a = 2(X-j)^2(X-c)$. Le coefficient de X^2 dans ce dernier polynôme est $-4j-2c$ qui est donc égal à 3. On en tire $2c = -3-4j$ et finalement $c = -\frac{1}{2} - i\sqrt{3}$. On en conclut la factorisation :

$$P_a = 2(X-j)^2(X + \frac{1}{2} + i\sqrt{3}).$$

* Si $a = \frac{5}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i$, on prend la factorisation du paragraphe précédent, et on applique la conjugaison à tous les complexes qui y interviennent. On conclut que :

$$P_a = 2(X-j^2)^2(X + \frac{1}{2} - i\sqrt{3}).$$

Exercice 22
(À réécrire) On va résoudre la question dans $\mathbf{C}[X]$ dans un premier temps. Soit P un polynôme non constant qui répond à la question. Notons d son degré. Le degré de P' est $d-1$, puis le degré de $(P')^2$ est $2(d-1)$. On en déduit que $2(d-1) = d$ et donc $d = 2$. Par ailleurs, toute racine de P est une racine de $(P')^2$, qui a le même ensemble de racines que P' ; ainsi toute racine de P est une racine de P' et toute racine de P est donc au moins double. Comme on a décidé de travailler dans $\mathbf{C}[X]$, le polynôme P se factorise et a forcément la formue $\lambda(X-r)^2$ pour des constantes $\lambda \in \mathbf{C}^*$ et $r \in \mathbf{C}$. Enfin en comparant les coefficients dominants on montre que $\lambda = 1$; le polynôme P a donc la forme $(X-r)^2$ pour un $r \in \mathbf{C}$. Réciproquement, on constate que de tels polynômes vérifient la condition proposée. Enfin parmi les polynômes constants, on constate que seul le polynôme nul y répond. Les polynômes complexes qui répondent à la condition proposée sont donc le polynôme nul et les $(X-r)^2$, $r \in \mathbf{C}$. On revient alors à la question initiale en conservant uniquement ceux de ces polynômes qui sont à coefficients réels : ce sont le polynôme nul et les $(X-r)^2$, $r \in \mathbf{R}$.

Exercice 23
C'est un très simple calcul :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-\alpha} + \frac{1}{1-\beta} + \frac{1}{1-\gamma} &= \frac{(1-\alpha)(1-\beta) + (1-\beta)(1-\gamma)(1-\alpha)(1-\gamma)}{(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)} \\
&= \frac{1-\alpha-\beta+\alpha\beta+1-\beta-\gamma+\beta\gamma+1-\alpha-\gamma+\alpha\gamma}{P(1)} \\
&= \frac{3-2(\alpha+\beta+\gamma)+\alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma}{1} = 3 - 10 + 6 = 1.
\end{aligned}$$

Exercice 24
1) Soit x un réel. Alors $P(x)$ est la somme du réel $x^3 + 3x^2 + 2x$ et du non réel i, et n'est donc pas réel. En particulier $P(x)$ n'est pas nul, et x n'est donc pas racine de P.
2) En remarquant que son coefficient dominant est 1, on écrit :

$$P = (X-\alpha)(X-\beta)(X-\gamma) = X^3 - (\alpha+\beta+\gamma)X^2 + (\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)X - \alpha\beta\gamma.$$

En isolant les coefficients de X^2 on obtient dans un premier temps la relation :

$$\alpha + \beta + \gamma = -3.$$

Avec ceux de X on obtient :

$$\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = 2.$$

Pour la deuxième question il suffit alors de développer :

$$(\alpha + \beta + \gamma)^2 = (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) + 2(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma)$$

d'où on tire :

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = (\alpha + \beta + \gamma)^2 - 2(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma) = (-3)^2 - 2 \times 2 = 5.$$

Pour la somme des cubes le plus ingénieux est de remarquer que pour ω variant dans l'ensemble des trois racines, et vu la relation $P(\omega) = 0$ on a :

$$\omega^3 = -3\omega^2 - 2\omega - i$$

puis de sommer ça sur les trois valeurs de ω et conclure que :

$$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = -3(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) - 2(\alpha + \beta + \gamma) - 3i = -3 \times 5 - 2 \times (-3) - 3i = -9 - 3i.$$