Université Claude Bernard Lyon 1 — UE Fondamentaux des maths I

Semestre d'automne 2018-19 — Groupe Math

**Examen 2 – Durée 45 min – le lundi 4 novembre 2019**

Les documents, les téléphones et les calculatrices ne sont pas autorisés.
La notation tiendra compte du soin apporté à la rédaction des réponses.
Les **réponses mal justifiées** ne permettront pas d'obtenir tous les points.
**BIEN INDIQUER SON NUMÉRO DE GROUPE DE TD SUR LA COPIE**
L'énoncé comporte 5 exercices. Le barème est sur 21 points.

---

**Exercice 1. (4 points = 1 + 1 + 2)**[1]. Posons

$$z = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}.$$

1. Calculer le module de $z$.
2. Déterminer les parties réelle et imaginaire de $\frac{1}{z}$.
3. Déterminer l'argument de $z$ dans l'intervalle $[0; 2\pi[$.

**Exercice 2. (4 points = 2 + 2)** Pour tout entier $n$ supérieur ou égal à 2, on note

$$U_n = \frac{2n + (-1)^n}{n + (-1)^n}.$$

1. En utilisant un théorème du cours, justifier que $\frac{(-1)^n}{n}$ tend vers 0.
2. En déduire que $U_n$ admet une limite que l'on déterminera.

**Exercice 3. (7 points = 1 + 1 + 1 + 2 + 2)** On définit la fonction $f$ suivante :

$$\begin{array}{rccl} f : & ]-1;1[ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \ln(\frac{1+x}{1-x}). \end{array}$$

1. Etudier la parité de $f$.
2. Montrer que pour tout $x \in ]-1;1[$, on a
$$f'(x) = \frac{2}{1-x^2}. \tag{1}$$
3. Montrer que la droite $x = 1$ est une asymptote à la courbe de $f$.
4. On admettra que la fonction $f$ est bijective.
Notons $g : \mathbb{R} \longrightarrow ]-1;1[$ la fonction réciproque de $f$. On admettra que $g$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Montrer que pour tout $y \in \mathbb{R}$, on a
$$2g'(y) + g(y)^2 - 1 = 0. \tag{2}$$
5. En résolvant l'équation
$$\ln(\frac{1+x}{1-x}) = y,$$
d'inconnue $x$, montrer que, pour tout $y \in \mathbb{R}$,
$$g(y) = \tanh(\frac{y}{2}).$$

[1] T.S.V.P.

**Exercice 4. Question préparée(3 points = 1 +2)** On admettra que la fonction exponentielle $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifie

$$\begin{cases} \exp' = \exp \\ \exp(0) = 1. \end{cases}$$

1. En considérant la fonction $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \exp(x)\exp(-x)$, montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\exp(x) \neq 0$ et
$$\frac{1}{\exp(x)} = \exp(-x).$$
2. En considérant, pour $y$ fixé, la fonction $k_y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \exp(x+y)\exp(-x)$, montrer que pour tout $x$ et $y$ dans $\mathbb{R}$, on a
$$\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y).$$

**Exercice 5. Question de cours (3 points)**

Soit $l$ un nombre réel et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Donner la définition de $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} l$.

# Liste de questions préparées pour le DS2.

1. Soit $l$ un nombre réel et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Donner la définition de $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} l$.

2. En admettant, que la fonction exponentielle $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifie

$$\begin{cases} \exp' = \exp \\ \exp(0) = 1 \end{cases}$$

   (a) En considérant la fonction $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \exp(x)\exp(-x)$, montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\exp(x) \neq 0$ et

$$\frac{1}{\exp(x)} = \exp(-x).$$

   (b) En considérant, pour $y$ fixé, la fonction $k_y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \exp(x+y)\exp(-x)$, montrer que pour tout $x$ et $y$ dans $\mathbb{R}$, on a

$$\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y).$$

3. Donner les domaines de définition et tracer les graphes des fonctions ln, tan et sh.

4. Soit $a$ et $b$ dans $\mathbb{R}$. Montrer par récurrence sur $n$ que, pour tout $n$ dans $\mathbb{N}^*$,

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

   On pourra utiliser sans démonstration la formule du triangle de Pascal suivante :

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}.$$

5. On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 5$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n. \tag{3}$$

   A l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 2^n + 3^n.$$

6. Enoncer et démontrer le théorème d'unicité de la limite d'une suite.

**Exercice 1.** Posons

$$z = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}.$$

1. $|z|^2 = \frac{6+2}{4} = 2$. Et $|z| = \sqrt{2}$.
2. On a
$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{\sqrt{6} + i\sqrt{2}}{4}.$$
3. On a vu que $|z| = \sqrt{2}$. Soit $\varphi \in [0; 2\pi[$ l'argument. On a $\tan\varphi = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$. Donc $\tan\varphi = \tan(-\frac{\pi}{6})$. Donc il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\varphi = k\pi - \frac{\pi}{6}$.
Vu les signes des parties réelle et imaginaire, $\varphi \in ]\frac{3\pi}{4}; 2\pi[$. Donc
$$\varphi = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}.$$

**Exercice 2.** Pour tout entier $n$ supérieur ou égal à 2, on note

$$U_n = \frac{2n + (-1)^n}{n + (-1)^n}.$$

1. On a
$$0 \leq |\frac{(-1)^n}{n}| \leq \frac{1}{n}.$$
Or la suite nulle et $\frac{1}{n}$ tendent vers la même limite 0. Donc d'après le théorème des gendarmes, $|U_n|$ tennd vers 0. Donc $U_n$ tennd vers 0.
2. On met $n$ en facteur pour faire apparaitre $\frac{(-1)^n}{n}$ :
$$\forall n \geq 2 \qquad U_n = \frac{2n + (-1)^n}{n + (-1)^n} = \frac{2 + (-1)^n/n}{1 + (-1)^n/n},$$
qui tend vers 2 grâce à la première question et aux opérations sur les limites.

**Exercice 3.** On définit la fonction $f$ suivante :

$$\begin{array}{rccl} f: & ]-1;1[ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \ln(\frac{1+x}{1-x}). \end{array}$$

1. On a, pour tout $x \in ]-1;1[$,
$$f(-x) = \ln(\frac{1-x}{1+x}) = -\ln(\frac{1+x}{1-x}) = -f(x).$$
Donc $f$ est impaire.
2. On calcule
$$f'(x) = \left(\frac{1+x}{1-x}\right)' \frac{1-x}{1+x} = \frac{1-x+1+x}{(1-x)^2} \times \frac{1-x}{1+x} = \frac{2}{1-x^2}.$$
3. Lorsque $x$ tend vers 1 par valeurs inférieures, $1-x$ tend vers 0 par valeurs supérieures donc $\frac{1+x}{1-x}$ tend vers $+\infty$ et $f$ tend vers $+\infty$. Ainsi, la droite $x = 1$ est une asymptote à la courbe de $f$.

4. Par définition, pour tout $y \in \mathbb{R}$, on a
$$f \circ g(y) = y$$
. En dérivant on obtient
$$g'(y).\frac{2}{1-(g(y)^2} = 1$$
puis
$$2g'(y) + g(y)^2 - 1 = 0.$$
5. Comme suggéré on part de
$$\ln(\frac{1+x}{1-x}) = y.$$
On applique exp :
$$e^y = \frac{1+x}{1-x}.$$
Donc
$$(1-x)e^y = 1+x,$$
et
$$e^y - 1 = x(1+e^y).$$
D'où
$$x = \frac{e^y - 1}{1+e^y}.$$
On met aux numérateur et dénominateur $e^{y/2}$ en facteur :
$$x = \frac{e^{y/2} - e^{-y/2}}{e^{-y/2} + e^{y/2}} = \tanh(\frac{y}{2}).$$
d'inconnue $y$, montrer que, pour tout $y \in \mathbb{R}$,
$$g(y) = \tanh(\frac{y}{2}).$$

**Exercice 4.** On admettra que la fonction exponentielle $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifie
$$\begin{cases} \exp' = \exp \\ \exp(0) = 1. \end{cases}$$

1. La fonction $h$ est dérivable et
$$h'(x) = \exp(x)\exp(-x) - \exp(x)\exp(-x) = 0$$
. Donc $h$ est constante sur l'inntervalle $\mathbb{R}$. Or $h(0) = 1$. Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$1 = \exp(x)\exp(-x).$$
D'où le résultat.
2. Fixons $y$. On dérive la fonction $k_y$ :
$$k_y'(x) = \exp(x+y)\exp(-x) - \exp(x+y)\exp(-x) = 0.$$
Donc $k_y$ est constante. On $k_y(-y) = e^y$. Donc pour tout $x$,
$$\exp(x+y)\exp(-x) = \exp(y)$$
et avec la première question
$$\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y).$$

**Exercice 5.**

La définition de $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} l$ est
$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists N \in \mathbb{N} \qquad \forall \geq N \qquad |u_n - l| \leq \varepsilon$$

Voici en complément la correection de la question préparée numéro 5.

**Question 5.** On fait une récurrence double. Notons $H_n$ l'assertion

$$U_n = 2^n + 3^n.$$

On vérifie que

$$U_0 = 2 = 2^0 + 3^0 \quad \text{et} \quad U_1 = 5 = 2^1 + 3^1.$$

Donc $H_0$ et $H_1$ sont vrai.

Fixons $n \geq 2$. Supposons que $H_{n-1}$ et $H_{n-2}$ sont vrai.
Si on préfère, on peut supposer que pour tout $0 \leq k \leq n-1$, $H_k$ est vrai.
Montrons que $H_n$ est vrai. On a

$$\begin{array}{rll} U_n = & 5U_{n-1} - 6U_{n-2} & \\ = & 5(2^{n-1} + 3^{n-1}) - 6(2^{n-2} + 3^{n-2}) & \text{d'aprs } H_{n-1} \text{ et } H_{n-2} \\ = & 10 \times 2^{n-2} + 15 \times 3^{n-2} - 6(2^{n-2} + 3^{n-2}) & \\ = & 2^n + 3^n. & \end{array}$$