Université Claude Bernard Lyon 1 — UE Fondamentaux des maths I
Semestre d'automne 2019-20 — Groupe Math

Examen Partiel – Durée 90 min – le jeudi 21 novembre 2019

Les documents, les téléphones et les calculatrices ne sont pas autorisés.
La notation tiendra compte du soin apporté à la rédaction des réponses.
Les **réponses mal justifiées** ne permettront pas d'obtenir tous les points.
BIEN INDIQUER SON NUMÉRO DE GROUPE DE TD SUR LA COPIE
L'énoncé comporte trois exercices.

Exercice 1. Nombres complexes.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $z^4 = 1$.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $z^4 = 4$.
3. Calculer les parties réelles et imaginaires de
$$z = \frac{3+6i}{3-4i}.$$
4. Calculer le module et l'argument (dans $[0; 2\pi[$) de $z = -1 + i\sqrt{3}$.
5. Soit $z = a + ib$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$. On suppose que $b > 0$. Montrer que
$$\left|\frac{z-i}{z+i}\right|^2 < 1$$

Exercice 2. Fonctions usuelles.
On rappelle que $e = 2,718\cdots > 2$. On pose
$$\begin{array}{rccl} f : &]0; +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & e^{4-2x} + \frac{\ln(x)}{2}. \end{array}$$

1. Justifier que $\ln(2) < 1$.
2. Montrer que $f(1) > 2$ et $f(2) < 2$.
3. Calculer la fonction dérivée f'.
4. Montrer que sur l'intervalle $[1; 2]$, on a $-e^{4-2x} \leqslant -1$ et $\frac{1}{x} \leqslant 1$.
5. On déduire que f est strictement décroissante sur $[1; 2]$.

   On admettra par la suite que f est strictement décroissante et qu'il existe un unique $l \in [1; 2]$ tel que $f(l) = 2$.

Exercice 3. Une suite récurrente.
On pose
$$\begin{array}{rccl} \varphi : &]0; +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & 2 - \frac{\ln(x)}{2} \end{array}$$
et on définit par récurrence la suite
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \varphi(u_n). \end{cases}$$

1. Montrer que φ est décroissante.
2. Montrer que $\varphi([1; 2])$ est inclus dans $[1; 2]$.
   On note $\bar{\varphi}$ la restriction de φ à l'intervalle $[1; 2]$.

3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant u_n \leqslant 2$.
4. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une suite extraite convergente.
5. Montrer, si possible sans calculer de dérivée, que $\bar{\varphi} \circ \bar{\varphi}$ est croissante.
6. Montrer que la suite extraite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
   On admettra que la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
7. Montrer que les suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes.
   Notons l_0 et l_1 les limites respectives.
8. En admettant que $(\bar{\varphi} \circ \bar{\varphi})(l_0) = l_0$ et $(\bar{\varphi} \circ \bar{\varphi})(l_1) = l_1$, montrer que $l_0 = l_1 = l$, où l est le réel de l'exercice 2.
9. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l.

CORRECTION

Exercice 1.

1. On a vu en cours que l'ensemble des solutions est $\{1, \omega, \omega^2, \omega^3\}$ avec $\omega = e^{\frac{2i\pi}{4}}$. Or $\omega = i$. Donc l'ensemble des solutions est $\{1, i, -1, -i\}$.
2. On remarque $z = \sqrt{2}$ est solution. On effectue le changement d'inconnue $Z = \frac{z}{\sqrt{2}}$. Alors
$$z^4 = 4 \iff (Z\sqrt{2})^4 = 4 \iff Z^4 = 1.$$
Ainsi d'après la question 1, l'ensemble des solutions est $\{\sqrt{2}, i\sqrt{2}, -\sqrt{2}, -i\sqrt{2}\}$.
3. On multiplie le dénominateur par l'expression conjuguée :
$$z = \frac{3+6i}{3-4i} = \frac{(3+6i)(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)} = \frac{-15+30i}{25} = \frac{-3+6i}{5}.$$
4. Pour $z = -1 + i\sqrt{3}$. Si $z = \rho e^{i\varphi}$ avec $\rho \in \mathbb{R}^+$ et $\varphi \in [0; 2\pi[$, on a
$$\rho = |z| = \sqrt{1+3} = 2$$
et
$$\tan(\varphi) = -\sqrt{3}.$$
Or $-\sqrt{3} = \tan(-\frac{\pi}{3})$. Donc, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que
$$\varphi = -\frac{\pi}{3} + k\pi.$$
Par ailleurs, des signes des parties réelle et imaginaire de z, on déduit que $\varphi \in [\frac{\pi}{2}; \pi]$. On conclut que
$$\varphi = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}.$$
5. On a
$$\begin{aligned} |f(z)|^2 < 1 &\iff \tfrac{|a+i(b-1)|^2}{|a+i(b+1)|^2} < 1 \\ &\iff a^2 + (b-1)^2 < a^2 + (b+1)^2 \\ &\iff -2b < 2b \\ &\iff b > 0. \end{aligned}$$
De la deuxième ligne à la première, on a utilisé $z \neq -i$.

Exercice 2.

1. On a $e > 2$. Comme ln est croissante, on obtient $\ln(e) = 1 > \ln(2)$.
2. On a $f(1) = e^2 \geqslant 2^2 > 2$. Et $f(2) = e^0 + \frac{\ln 2}{2} = 1 + \frac{\ln 2}{2} < 1,5 < 2$.
3. On a
$$f'(x) = -2e^{4-2x} + \frac{1}{2x}.$$
4. La fonction $x \longmapsto -e^{4-2x}$ est croissante comme composée de la fonction décroissante $-\exp$ et de la fonction affine décroissante $4 - 2x$. Donc sur $[1; 2]$ elle est inférieure à sa valeur en 2 :
$$-e^{4-2x} \leqslant -e^0 = -1 \qquad \forall x \in [1; 2].$$
La fonction $x \longmapsto 1/x$ est décroissante sur $[1; 2]$. Donc sur $[1; 2]$ elle est inférieure à sa valeur en 1 :
$$\frac{1}{x} \leqslant 1 \qquad \forall x \in [1; 2].$$

5. On multiplie la première égalité de la question précédente par 2, la deuxième par 1/2 et on les additionne. On obtient :

$$-2e^{4-2x} + \frac{1}{2x} \leqslant -2\frac{1}{2} \leqslant -1,5 < 0 \qquad \forall x \in [1;2].$$

Ainsi f' est strictement négative sur l'intervalle donc f est strictement décroissante.

Exercice 3.

1. Comme ln est croissante, $-\ln$ puis φ sont décroissantes.
2. On a $\varphi(1) = 2$ et $2 > \varphi(2) = 2 - \frac{\ln(2)}{2} > 1$. Comme ln est croissante φ est décroissante. En particulier, pour tout $x \in [1;2]$, on a $1 \leqslant \varphi(2) \leqslant \varphi(x) \leqslant \varphi(1) < 2$.
3. Montrons par récurrence que
$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n \in [1;2].$$
Pour $n = 0$, $u_0 = 1$ et l'assertion est triviale. Supposons que $u_n \in [1;2]$. Alors par la question précédente
$$u_{n+1} = \varphi(u_n) \in [1;2].$$
4. D'après la question précédente, u_n est bornée. Mais alors, le théorème de Bolzano-Weierstrass assure l'existence d'une suite extraite convergente.
5. On a déjà vu que φ et donc $\bar{\varphi}$ sont décroissantes. Mais alors, $\bar{\varphi} \circ \bar{\varphi}$ est croissante.
En effet, si $x \leqslant y$. On a $\bar{\varphi}(x) \geqslant \bar{\varphi}(y)$, et donc $\bar{\varphi}(x) \leqslant \bar{\varphi}(y)$.
6. On a $u_{2n} = (\bar{\varphi} \circ \bar{\varphi})(u_{2(n-1)})$. Montrons par récurrence que, pour tout n, $u_{2(n+1)} \geqslant u_{2n}$.
Comme $u_2 \in [1;2]$ et $u_0 = 1$, on a bien $u_2 \geqslant u_0$. Supposons que $u_{2(n+1)} \geqslant u_{2n}$. En appliquant, la fonction croissante $\bar{\varphi} \circ \bar{\varphi}$ à cette égalité on obtient
$$u_{2(n+2)} = (\bar{\varphi} \circ \bar{\varphi})(u_{2(n+1)}) \geqslant \bar{\varphi} \circ \bar{\varphi}(u_{2n}) = u_{2(n+1)}.$$
Ainsi u_{2n} est croissante.
7. Les suites $u_{2(n+1)}$ et u_{2n} sont monotones par la question précédente et bornées par la question 2. Elles sont donc convergentes par théorème du cours.
8. On a
$$(\bar{\varphi} \circ \varphi)(x) = 2 - \frac{1}{2}\ln(2 - \frac{\ln(x)}{2}).$$
Donc $(\bar{\varphi} \circ \varphi)(x) = x$ si et seulement si
$$2 - \frac{1}{2}\ln(2 - \frac{\ln(x)}{2}) = x,$$
si et seulement si
$$4 - 2x = \ln(2 - \frac{\ln(x)}{2}),$$
si et seulement si
$$e^{4-2x} = 2 - \frac{\ln(x)}{2},$$
si et seulement si
$$e^{4-2x} + \frac{\ln(x)}{2} = 2.$$
On reconnait l'équation $f(x) = 2$. On a vu que cette équation a une unique solution l dans $[1;2]$. Donc $l_0 = l = l_1$.
9. C'est une application directe du théorème du cours : les deux suites extraites complémentaires tendent vers la même limite l donc u_n tend vers l.

Un exercice auquel vous avez échappé.

Exercice 1. Soit

$$\begin{array}{rccc} f\ : & \mathbb{C} - \{-i\} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & z & \longmapsto & \frac{z-i}{z+i} \end{array}$$

1. Montrer que i est le seul antécédent de 0.
2. Soit $z = a + ib$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$. On suppose que $b > 0$. Montrer que
$$|f(z)|^2 < 1$$
3. Soit $z \neq i$ tel que $|f(z)| < 1$. Montrer que $\mathrm{Im}(z) > 0$.
4. Posons $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C}\ :\ \mathrm{Im}(z) > 0\}$ et $D = \{z \in \mathbb{C}\ :\ |z| < 1\}$. On définit l'application
$$\begin{array}{cccc} g & \mathbb{H} & \longrightarrow & D \\ & z & \longmapsto & f(z) \end{array}$$
Expliquer pourquoi g est bien définie.
5. Montrer que g est une bijection et calculer l'application réciproque.

CORRECTION

Exercice 1.

1. Il s'agit de voir que i est la seule solution de l'équation $f(z) = 0$. Mais, pour $z \neq -i$, $f(z) = 0$ si et seulement si $z - i = 0$.
2. On a
$$\begin{aligned} |f(z)|^2 < 1 &\iff \tfrac{|a+i(b-1)|^2}{|a+i(b+1)|^2} < 1 \\ &\iff a^2 + (b-1)^2 < a^2 + (b+1)^2 \\ &\iff -2b < 2b \\ &\iff b > 0. \end{aligned}$$
De la deuxième ligne à la première, on a utilisé $z \neq -i$.
3. On a raisonné par équivalences à la question précédente donc la réciproque est vrai.
4. Tout d'abord $\mathbb{H}$ ne contient pas $-i$, donc $f(z) \in \mathbb{C}$ est bien défini. De plus, d'après la question 2 si $z \in \mathbb{H}$ alors $f(z) \in D$.
5. Considérons l'équation
$$z' = \frac{z-i}{z+i}.$$
Ceci est équivalent pour $z \neq -i$, à
$$z'(z+i) = z - i,$$
cad à
$$z(z'-1) = -iz' - i$$
ou encore à
$$z = \frac{i(z'+1)}{1-z'}.$$
Ceci prouve l'injectivité car on a au plus une solution. Par ailleurs, pour tout $z' \in D$, la dernière équation définie bien un élément de $\mathbb{C}$ tel que $f(z) = z'$. Alors la question 3 montre que $z \in \mathbb{H}$. D'où la surjectivité.
La réciproque est
$$\begin{array}{rccc} g\ : & D & \longrightarrow & \mathbb{H} \\ & z & \longmapsto & i\frac{(z'+1)}{1-z'}. \end{array}$$