

Feuille 4 Fonctions usuelles

I Divers

Exercice 4.1.

1. Montrer que $1 + \sin(x) = \left(\cos\left(\frac{x}{2}\right) + \sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2$.
2. Exprimer $\cos(4x)$ et $\sin(4x)$ en fonction de $\cos(x)$ et de $\sin(x)$.
3. Exprimer en fonction de $\tan(x)$ uniquement les fonctions

$$f_1: x \mapsto f_1(x) = \cos^2(x); \quad f_2: x \mapsto f_2(x) = \frac{\sin^4(x) + \cos^4(x)}{\sin^4(x) - \cos^4(x)};$$

$$f_3: x \mapsto f_3(x) = \frac{\sin^3(x) - \cos^3(x)}{\sin(x) - \cos(x)} \quad \text{et} \quad f_4: x \mapsto f_4(x) = \cos^2(x) - \sin(x) \cos(x)$$

Correction exercice 4.1.

1.

$$\begin{aligned} \left(\cos\left(\frac{x}{2}\right) + \sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 &= \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) + 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) \\ &= \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) + \sin\left(2 \times \frac{x}{2}\right) = 1 + \sin(x) \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} \cos(4x) &= \cos(2 \times 2x) = 2\cos^2(2x) - 1 = 2(2\cos^2(x) - 1)^2 - 1 \\ &= 2(4\cos^4(x) - 4\cos^2(x) + 1) - 1 = 8\cos^4(x) - 8\cos^2(x) + 1 \end{aligned}$$

Mais ce n'est pas la seule solution.

$$\sin(4x) = \sin(2 \times 2x) = 2\sin(2x)\cos(2x) = 4\sin(x)\cos(x)(\cos^2(x) - \sin^2(x))$$

Mais ce n'est pas la seule solution.

3.

$$f_1(x) = \cos^2(x) = \frac{\cos^2(x)}{1} = \frac{\cos^2(x)}{\cos^2(x) + \sin^2(x)} = \frac{1}{\frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)}} = \frac{1}{1 + \tan^2(x)}$$

$$f_2(x) = \frac{\sin^4(x) + \cos^4(x)}{\sin^4(x) - \cos^4(x)} = \frac{\cos^4(x) \left(\frac{\sin^4(x)}{\cos^4(x)} + 1\right)}{\cos^4(x) \left(\frac{\sin^4(x)}{\cos^4(x)} - 1\right)} = \frac{\tan^4(x) + 1}{\tan^4(x) - 1}$$

$$\begin{aligned}
f_3(x) &= \frac{\sin^3(x) - \cos^3(x)}{\sin(x) - \cos(x)} = \frac{\cos^3(x) \left(\frac{\sin^3(x)}{\cos^3(x)} - 1 \right)}{\cos(x) \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)} - 1 \right)} = \cos^2(x) \frac{\tan^3(x) - 1}{\tan(x) - 1} \\
&= \frac{1}{1 + \tan^2(x)} \frac{\tan^3(x) - 1}{\tan(x) - 1} = \frac{1}{1 + \tan^2(x)} \frac{(\tan(x) - 1)(\tan^2(x) + \tan(x) + 1)}{\tan(x) - 1} \\
&= \frac{\tan^2(x) + \tan(x) + 1}{1 + \tan^2(x)} = \frac{1 + \tan^2(x) + \tan(x)}{1 + \tan^2(x)} = 1 + \frac{\tan(x)}{1 + \tan^2(x)}
\end{aligned}$$

Avec la formule $a^3 - 1 = (a - 1)(a^2 + a + 1)$

Autre méthode avec la formule $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

$$\begin{aligned}
f_3(x) &= \frac{\sin^3(x) - \cos^3(x)}{\sin(x) - \cos(x)} = \frac{(\sin(x) - \cos(x))(\sin^2(x) + \cos(x)\sin(x) + \cos^2(x))}{\sin(x) - \cos(x)} \\
&= \sin^2(x) + \cos(x)\sin(x) + \cos^2(x) = \sin^2(x) + \cos^2(x) + \cos(x)\sin(x) \\
&= 1 + \cos(x)\sin(x) = 1 + \cos^2(x) \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = 1 + \frac{1}{1 + \tan^2(x)} \tan(x) \\
&= 1 + \frac{\tan(x)}{1 + \tan^2(x)}
\end{aligned}$$

$$f_4(x) = \cos^2(x) - \sin(x)\cos(x) = \cos^2(x)(1 - \tan(x)) = \frac{1 - \tan(x)}{1 + \tan^2(x)}$$

Exercice 4.2.

1. Calculer

$$\operatorname{ch}\left(\frac{1}{2}\ln(3)\right) \quad \text{et} \quad \operatorname{sh}\left(\frac{1}{2}\ln(3)\right)$$

2. A l'aide de la formule $\operatorname{ch}(a + b) = \operatorname{ch}(a)\operatorname{ch}(b) + \operatorname{sh}(a)\operatorname{sh}(b)$, déterminer les solutions de l'équation :

$$2 \operatorname{ch}(x) + \operatorname{sh}(x) = \sqrt{3} \operatorname{ch}(5x)$$

Correction exercice 4.2.

1.

$$\operatorname{ch}\left(\frac{1}{2}\ln(3)\right) = \frac{e^{\frac{1}{2}\ln(3)} + e^{-\frac{1}{2}\ln(3)}}{2} = \frac{e^{\ln(\sqrt{3})} + e^{-\ln(\sqrt{3})}}{2} = \frac{\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}}{2} = \frac{3 + 1}{2\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\operatorname{sh}\left(\frac{1}{2}\ln(3)\right) = \frac{e^{\frac{1}{2}\ln(3)} - e^{-\frac{1}{2}\ln(3)}}{2} = \frac{e^{\ln(\sqrt{3})} - e^{-\ln(\sqrt{3})}}{2} = \frac{\sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}}}{2} = \frac{3 - 1}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

2.

$$\begin{aligned}
2 \operatorname{ch}(x) + \operatorname{sh}(x) &= \sqrt{3} \operatorname{ch}(5x) \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{3}}{3} \operatorname{ch}(x) + \frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{sh}(x) = \frac{\sqrt{3}}{3} \times \sqrt{3} \operatorname{ch}(5x) \\
&\Leftrightarrow \operatorname{ch}\left(\frac{1}{2} \ln(3)\right) \operatorname{ch}(x) + \operatorname{sh}\left(\frac{1}{2} \ln(3)\right) \operatorname{sh}(x) = \operatorname{ch}(5x) \Leftrightarrow \operatorname{ch}\left(\frac{1}{2} \ln(3) + x\right) \\
&= \operatorname{ch}(5x) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} \ln(3) + x = 5x \\ \frac{1}{2} \ln(3) + x = -5x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x = \frac{1}{2} \ln(3) \\ 6x = -\frac{1}{2} \ln(3) \end{cases} \\
&S = \left\{ \frac{1}{8} \ln(3), -\frac{1}{12} \ln(3) \right\}
\end{aligned}$$

Exercice 4.3. u et v étant deux réels, établir les formules suivantes :

$$\operatorname{ch}^2(u) + \operatorname{sh}^2(v) = \operatorname{sh}^2(u) + \operatorname{ch}^2(v) = \operatorname{ch}(u+v) \operatorname{ch}(u-v)$$

$$\operatorname{ch}^2(u) - \operatorname{ch}^2(v) = \operatorname{sh}^2(u) - \operatorname{sh}^2(v) = \operatorname{sh}(u+v) \operatorname{sh}(u-v)$$

Correction exercice 4.3. Pour tous u et v deux réels.

$$\begin{aligned}
\operatorname{ch}^2(u) + \operatorname{sh}^2(v) &= \left(\frac{e^u + e^{-u}}{2}\right)^2 + \left(\frac{e^v - e^{-v}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2u} + 2 + e^{-2u} + e^{2v} - 2 + e^{-2v}}{4} \\
&= \frac{e^{2u} + e^{-2u} + e^{2v} + e^{-2v}}{4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{sh}^2(u) + \operatorname{ch}^2(v) &= \left(\frac{e^u - e^{-u}}{2}\right)^2 + \left(\frac{e^v + e^{-v}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2u} - 2 + e^{-2u} + e^{2v} + 2 + e^{-2v}}{4} \\
&= \frac{e^{2u} + e^{-2u} + e^{2v} + e^{-2v}}{4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{ch}(u+v) \operatorname{ch}(u-v) &= \frac{e^{u+v} + e^{-u-v}}{2} \times \frac{e^{u-v} + e^{-u+v}}{2} \\
&= \frac{e^{u+v+u-v} + e^{u+v-u+v} + e^{-u-v+u-v} + e^{-u-v-u+v}}{4} \\
&= \frac{e^{2u} + e^{-2u} + e^{2v} + e^{-2v}}{4}
\end{aligned}$$

on a bien

$$\operatorname{ch}^2(u) + \operatorname{sh}^2(v) = \operatorname{sh}^2(u) + \operatorname{ch}^2(v) = \operatorname{ch}(u+v) \operatorname{ch}(u-v)$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{ch}^2(u) - \operatorname{ch}^2(v) &= \left(\frac{e^u + e^{-u}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^v + e^{-v}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2u} + 2 + e^{-2u} - (e^{2v} + 2 + e^{-2v})}{4} \\
&= \frac{e^{2u} + e^{-2u} - e^{2v} - e^{-2v}}{4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{sh}^2(u) - \operatorname{sh}^2(v) &= \left(\frac{e^u - e^{-u}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^v - e^{-v}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2u} - 2 + e^{-2u} - (e^{2v} - 2 + e^{-2v})}{4} \\
&= \frac{e^{2u} + e^{-2u} - e^{2v} - e^{-2v}}{4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{sh}(u+v) \operatorname{sh}(u-v) &= \frac{e^{u+v} - e^{-u-v}}{2} \times \frac{e^{u-v} + e^{-u+v}}{2} \\ &= \frac{e^{u+v+u-v} + e^{u+v-u+v} - e^{-u-v+u-v} - e^{-u-v-u+v}}{4} \\ &= \frac{e^{2u} + e^{-2u} - e^{2v} - e^{-2v}}{4} \end{aligned}$$

on a bien

$$\operatorname{ch}^2(u) - \operatorname{ch}^2(v) = \operatorname{sh}^2(u) - \operatorname{sh}^2(v) = \operatorname{sh}(u+v) \operatorname{sh}(u-v)$$

Exercice 4.4. Montrer que pour tous x et y réels distincts :

$$e^{\frac{x+y}{2}} < \frac{e^x + e^y}{2}$$

Correction exercice 4.4. Pour tous x et y réels distincts

$$\frac{e^x + e^y}{2} - e^{\frac{x+y}{2}} = \frac{e^x - 2e^{\frac{x+y}{2}} + e^y}{2} = \frac{\left(e^{\frac{x}{2}}\right)^2 - 2e^{\frac{x}{2}}e^{\frac{y}{2}} + \left(e^{\frac{y}{2}}\right)^2}{2} = \frac{\left(e^{\frac{x}{2}} - e^{\frac{y}{2}}\right)^2}{2} > 0$$

car $x \neq y$

on a bien

$$e^{\frac{x+y}{2}} < \frac{e^x + e^y}{2}$$

Exercice 4.5. Calculer, lorsque c'est possible, la dérivée des fonctions f_i définies de la manière suivante :

$$f_1(x) = \ln|\cos(x)|; \quad f_2(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right); \quad f_3(x) = \cos^2(3x);$$

$$f_4(x) = e^{2x+1}, \quad f_5(x) = \tan(x^2), \quad f_6(x) = \sqrt{1-x^2}$$

Correction exercice 4.5.

$$f_1'(x) = -\frac{\sin(x)}{\cos(x)} = -\tan(x)$$

$$\begin{aligned} f_2(x) = \ln|1+x| - \ln|1-x| &\Rightarrow f_2'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{-1}{1-x} = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} \\ &= \frac{1-x+1+x}{(1+x)(1-x)} = \frac{2}{1-x^2} \end{aligned}$$

$$f_3(x) = 2 \cos(3x) \times (-3 \sin(3x)) = -6 \cos(3x) \sin(3x)$$

$$f_4'(x) = 2e^{2x+1}$$

$$f_5'(x) = (1 + \tan^2(x^2))2x = \frac{2x}{\cos^2(x^2)}$$

$$f_6'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

Exercice 4.6. Résoudre dans \mathbb{R}

$$3 \operatorname{ch}(x) - \operatorname{sh}(x) - 3 = 0$$

Correction exercice 4.6.

On pose $X = e^x$

$$\begin{aligned} 3 \operatorname{ch}(x) - \operatorname{sh}(x) - 3 = 0 &\Leftrightarrow 3 \frac{X + \frac{1}{X}}{2} - \frac{X - \frac{1}{X}}{2} - 3 = 0 \Leftrightarrow 3(X^2 + 1) - (X^2 - 1) - 6X \\ &= 0 \Leftrightarrow 2X^2 - 6X + 4 = 0 \Leftrightarrow X^2 - 3X + 2 = 0 \Leftrightarrow X = 1 \text{ ou } X = 2 \Leftrightarrow x \\ &= 0 \text{ ou } x = \ln(2) \end{aligned}$$

Exercice 4.7. Discuter en fonction de la valeur du réel x de l'existence de la valeur éventuelle de la limite de x^n quand n tend vers $+\infty$.

Correction exercice 4.7.

Si $x < -1$ alors x^n n'a pas de limite mais $\lim_{n \rightarrow +\infty} |x|^n = +\infty$

Si $x = -1$ alors $x^n = (-1)^n$ n'a pas de limite.

Si $|x| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} x^n = 0$

Si $x = 1$ alors $x^n = 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} x^n = 1$

Si $x > 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$

Exercice 4.8. Calculer les limites suivantes :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x}(\operatorname{ch}^3(x) - \operatorname{sh}^3(x)) \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln(\operatorname{ch}(x))) \end{aligned}$$

Correction exercice 4.8.

$$\begin{aligned} e^{-x}(\operatorname{ch}^3(x) - \operatorname{sh}^3(x)) &= e^{-x} \left(\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)^3 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)^3 \right) \\ &= \frac{e^{-x}}{8} (e^{3x} + 3e^x + 3e^{-x} + e^{-3x} - (e^{3x} - 3e^x + 3e^{-x} - e^{-3x})) \\ &= \frac{e^{-x}}{8} (6e^x + 2e^{-3x}) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}e^{-4x} \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x}(\operatorname{ch}^3(x) - \operatorname{sh}^3(x)) &= \frac{3}{4} \\ x - \ln(\operatorname{ch}(x)) &= x - \ln\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) = x - \ln\left(e^x \frac{1 + e^{-2x}}{2}\right) \\ &= x - \ln(e^x) - \ln\left(\frac{1 + e^{-2x}}{2}\right) = -\ln\left(\frac{1 + e^{-2x}}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + e^{-2x}}{2} = \frac{1}{2}$$

Donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln(\operatorname{ch}(x))) = -\ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln(2)$$

Exercice 4.9. Résoudre dans \mathbb{R}

$$3 \operatorname{ch}(x) - \operatorname{sh}(x) - 3 = 0$$

Correction exercice 4.9.

On pose $X = e^x$

$$\begin{aligned} 3 \operatorname{ch}(x) - \operatorname{sh}(x) - 3 = 0 &\Leftrightarrow 3 \frac{X + \frac{1}{X}}{2} - \frac{X - \frac{1}{X}}{2} - 3 = 0 \Leftrightarrow 3(X^2 + 1) - (X^2 - 1) - 6X \\ &= 0 \Leftrightarrow 2X^2 - 6X + 4 = 0 \Leftrightarrow X^2 - 3X + 2 = 0 \Leftrightarrow X = 1 \text{ ou } X = 2 \Leftrightarrow x \\ &= 0 \text{ ou } x = \ln(2) \end{aligned}$$

Exercice 4.10.

Soit $\operatorname{sh} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

1. Montrer que sh est une bijection continue et soit sh^{-1} sa bijection réciproque.
2. Calculer $(\operatorname{sh}^{-1})'$ à l'aide de la formule du cours.
3. Déterminer explicitement $\operatorname{sh}^{-1}(x)$ et retrouver le résultat du 2.

Correction exercice 4.10.

1. $\operatorname{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ donc sh est définie, continue et dérivable sur \mathbb{R}
 $\operatorname{sh}'(x) = \operatorname{ch}(x) > 0$ donc sh est strictement croissante

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{sh}(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{sh}(x) = +\infty$$

Donc $\operatorname{sh} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une bijection continue.

2. On rappelle que

$$\begin{aligned} (f^{-1})'(x) &= \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \\ \operatorname{sh}'(x) &= \operatorname{ch}(x) \end{aligned}$$

Par conséquent

$$(\operatorname{sh}^{-1})'(x) = \frac{1}{\operatorname{ch}(\operatorname{sh}^{-1}(x))}$$

Comme pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\operatorname{ch}^2(\alpha) - \operatorname{sh}^2(\alpha) = 1 \Leftrightarrow \operatorname{ch}^2(\alpha) = \operatorname{sh}^2(\alpha) + 1$$

Et que $\operatorname{ch}(\alpha) > 0$, on $\operatorname{ch}(\alpha) = \sqrt{\operatorname{sh}^2(\alpha) + 1}$, d'où

$$\operatorname{ch}(\operatorname{sh}^{-1}(x)) = \sqrt{\operatorname{sh}^2(\operatorname{sh}^{-1}(x)) + 1} = \sqrt{x^2 + 1}$$

Et enfin

$$(\operatorname{sh}^{-1})'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

- 3.

$$\begin{cases} y = \text{sh}(x) \\ x, y \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \\ x, y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

On pose $X = e^x$ et donc $e^{-x} = \frac{1}{X}$

$$\begin{cases} y = \text{sh}(x) \\ x, y \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{X - \frac{1}{X}}{2} \\ x, y \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{X^2 - 1}{2X} \\ x, y \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2yX = X^2 - 1 \\ x, y \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X^2 - 2yX - 1 = 0 \\ x, y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Il s'agit d'une équation du second degré dont le discriminant vaut $\Delta = 4y^2 + 4 = 4(y^2 + 1) > 0$
Et dont les racines sont

$$X_1 = \frac{2y - 2\sqrt{y^2 + 1}}{2} = y - \sqrt{y^2 + 1} < 0 \quad \text{et} \quad X_2 = \frac{2y + 2\sqrt{y^2 + 1}}{2} = y + \sqrt{y^2 + 1} > 0$$

Comme $X = e^x > 0$ la seule solution possible est :

$$X = e^x = y + \sqrt{y^2 + 1}$$

$$\begin{cases} y = \text{sh}(x) \\ x, y \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^x = y + \sqrt{y^2 + 1} \\ x, y \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1}) \\ x, y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

D'où on déduit que

$$\forall y \in \mathbb{R}, \text{sh}^{-1}(y) = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1})$$

Ce qui s'écrit encore

$$\forall x \in \mathbb{R}, \text{sh}^{-1}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

Et enfin

$$(\text{sh}^{-1})'(x) = \frac{1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}}}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{\frac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{\sqrt{x^2 + 1}}}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{\sqrt{x^2 + 1}(x + \sqrt{x^2 + 1})} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

Concavité, convexité, points d'inflexion

Exercice 4.11.

Soient $f(x) = x^3 - 3x^2 + 6x$

- Déterminer l'intersection du graphe avec l'axe des abscisses.
- Déterminer les points où le graphe admet une tangente horizontale.
- Montrer que f admet un point d'inflexion. Préciser la concavité de la courbe selon les valeurs de x .

Correction exercice 4.11.

- On cherche les valeurs de x qui vérifient $f(x) = 0$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 3x + 6) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{ou} \\ x^2 - 3x + 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0$$

Car l'équation du second degré $x^2 - 3x + 6$ a un discriminant négatif et donc n'a pas de racine réelle.
Il n'y a que le point (0,0) comme intersection entre le graphe et l'axe des abscisses.

- $f'(x) = 3x^2 - 6x + 6$, et on cherche les valeurs de x qui annulent $f'(x)$, le discriminant est négatif donc la dérivée n'est jamais nulle, il n'y a donc pas de point avec une tangente horizontale.
- $f''(x) = 6(x - 1)$, la dérivée seconde s'annule en $x = 1$ et change de signe, il y a donc un point d'inflexion en $(1, f(1))$. Si $x < 1$ alors $f''(x) < 0$ la courbe est donc concave et si $x > 1$ alors $f''(x) > 0$ la courbe est convexe.

Exercice 4.12.

Soient $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$

- Déterminer les points où le graphe admet une tangente horizontale.
- Montrer que f admet un point d'inflexion. Préciser la concavité de la courbe selon les valeurs de x .

Correction exercice 4.12.

- $f'(x) = 3x^2 - 12x + 11$, et on cherche les valeurs de x qui annulent $f'(x)$, le discriminant est

$$\Delta = 12^2 - 4 \times 3 \times 11 = 144 - 132 = 12$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{12 - 2\sqrt{3}}{2} = 6 - \sqrt{3} \text{ ou } x = \frac{12 + 2\sqrt{3}}{2} = 6 + \sqrt{3}$$

Il y a deux points d'intersection avec l'axe des abscisses $(6 - \sqrt{3}, f(6 - \sqrt{3}))$ et $(6 + \sqrt{3}, f(6 + \sqrt{3}))$

- $f''(x) = 6(x - 2)$, la dérivée seconde s'annule en $x = 2$ et change de signe, il y a donc un point d'inflexion en $(2, f(2))$. Si $x < 2$ alors $f''(x) < 0$ la courbe est donc concave et si $x > 2$ alors $f''(x) > 0$ la courbe est convexe.

Études de fonctions complètes

Exercice 4.13. On définit la fonction $f: \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x + 3}{x + 1}$$

- Étudier les variations de f .
- Calculer les limites de f au bord de l'ensemble de définition.
- Calculer les limites en $-\infty$ et $+\infty$ de l'expression

$$f(x) - (x + 2)$$

En déduire que la droite d'équation $y = x + 2$ est asymptote au graphe de f .

- Déterminer la position du graphe par rapport à l'asymptote d'équation $y = x + 2$.
- Tracer le graphe de f .

Correction exercice 4.13.

- $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$$f'(x) = \frac{(2x + 3)(x + 1) - (x^2 + 3x + 3)}{(x + 1)^2} = \frac{2x^2 + 2x + 3x + 3 - x^2 - 3x - 3}{(x + 1)^2} = \frac{x^2 + 2x}{(x + 1)^2} = \frac{x(x + 2)}{(x + 1)^2}$$

x	$-\infty$	-2	-1	0	$+\infty$	
x	$-$	$-$	$-$	0	$+$	
$x + 2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$

Donc f est croissante sur $]-\infty, -2[$, f est décroissante sur $]-2, -1[$, f est décroissante sur $]-1, 0[$ et f est croissante sur $]0, +\infty[$.

-

$$\lim_{x \rightarrow -1} (x^2 + 3x + 3) = 1$$

Donc

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty$$

Et d'autre part

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x} = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x} = +\infty$$

3. $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$$f(x) - (x + 2) = \frac{x^2+3x+3}{x+1} - (x + 2) = \frac{x^2+3x+3-(x+2)(x+1)}{x+1} = \frac{x^2+3x+3-x^2-x-2x-2}{x+1} = \frac{1}{x+1} \text{ alors}$$

Par conséquent

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - (x + 2)) = 0$$

La différence entre le graphe de f et la droite d'équation $y = x + 2$ tend vers 0 en $-\infty$ et $+\infty$, cela montre que la droite d'équation $y = x + 2$ est asymptote au graphe de f .

4.

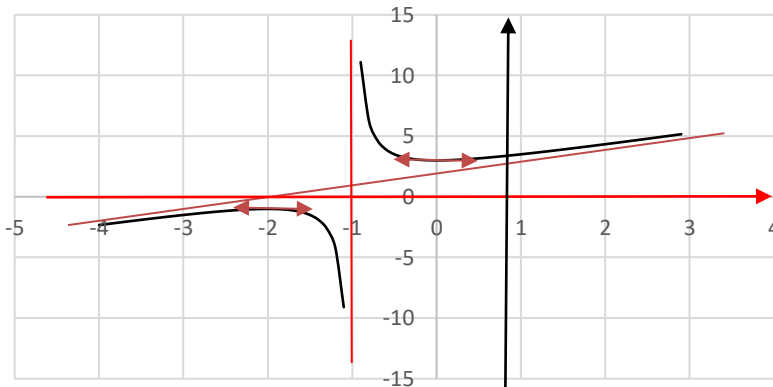
Si $x < -1$ alors $f(x) - (x + 2) = \frac{1}{x+1} < 0$ donc le graphe est dessous la droite.

Si $x > -1$ alors $f(x) - (x + 2) = \frac{1}{x+1} > 0$ donc le graphe est dessus la droite.

5.

x	$-\infty$	-2	-1	0	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	-1	$-\infty$	$+\infty$	3	$+\infty$

$$f(-2) = -1 \quad \text{et} \quad f(0) = 3$$



Exercice 4.14.

On note f la fonction définie sur $[0,1[$ par $f(x) = (1 - x) \ln(1 - x) + x$ et g la fonction définie sur $]0,1[$ par $g(x) = -\frac{\ln(1-x)}{x}$.

1. Etudier les variations de f sur $[0,1[$ et en déduire que f est à valeurs positives.
2. Etudier les variations de g sur $]0,1[$.
3. Déterminer les limites éventuelles de $g(x)$ pour x tendant vers 0 et pour x tendant vers 1.

Correction exercice 4.14.

1. $0 \leq x < 1 \Rightarrow -1 < -x \leq 0 \Rightarrow 0 < 1 - x \leq 1$

Ce qui montre que f est définie, continue et dérivable sur $[0,1[$

$$\forall x \in [0,1[, f'(x) = -\ln(1-x) + (1-x) \times \frac{-1}{1-x} + 1 = -\ln(1-x)$$

Ce qui montre que $f'(x)$ est strictement négative pour $0 < x < 1$ et nulle pour $x = 0$ et donc que f est strictement croissante.

Comme $f(0) = (1 - 0) \ln(1 - 0) + 0 = \ln(1) = 0$, pour tout $x > 0$ (et $x < 1$, bien sûr)

$$f(x) > f(0) = 0$$

2. Pour tout $x \in]0,1[$

$$g'(x) = -\frac{\frac{-1}{1-x} \times x - 1 \times \ln(1-x)}{x^2} = -\frac{-x - (1-x)\ln(1-x)}{(1-x)x^2} = \frac{x + (1-x)\ln(1-x)}{(1-x)x^2}$$

$$= \frac{f(x)}{(1-x)x^2}$$

Le dénominateur est strictement positif et $f(x)$ aussi donc pour tout $x > 0$ et $x < 1$, $g'(x) > 0$ sur l'intervalle $]0,1[$ donc g est strictement croissante sur cet intervalle.

3. En 1.

$$g(x) = -\frac{\ln(1-x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 1} +\infty$$

car $X \ln(X) \rightarrow 0$ lorsque $X \rightarrow 0$ est une limite indéterminée connue

En 0, on rappelle que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$$

On pose $h = -x$, alors

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-x)}{-x} = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 1$$

Exercice 4.15. Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right) e^{-x^2}$.

- Déterminer les limites éventuelles de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
- Etudier les variations de f .
- Tracer sommairement la courbe représentative de f .

Correction exercice 4.15.

- Si $x < 0$ on pose $x^2 = X \Leftrightarrow x = -\sqrt{X}$, donc $f(x) = \left(-\sqrt{X} + \frac{1}{2}\right) e^{-X} \xrightarrow{X \rightarrow +\infty} 0$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

Si $x > 0$ on pose $x^2 = X \Leftrightarrow x = \sqrt{X}$, donc $f(x) = \left(\sqrt{X} + \frac{1}{2}\right) e^{-X} \xrightarrow{X \rightarrow +\infty} 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

Ceci dit dans ce cas les limites sont presque évidentes.

- $f'(x) = e^{-x^2} + \left(x + \frac{1}{2}\right) (-2x) e^{-x^2} = (-2x^2 - x + 1) e^{-x^2}$

Le polynôme $-2X^2 - X + 1$ admet $X_1 = -1$ et $X_2 = \frac{1}{2}$ comme racines donc

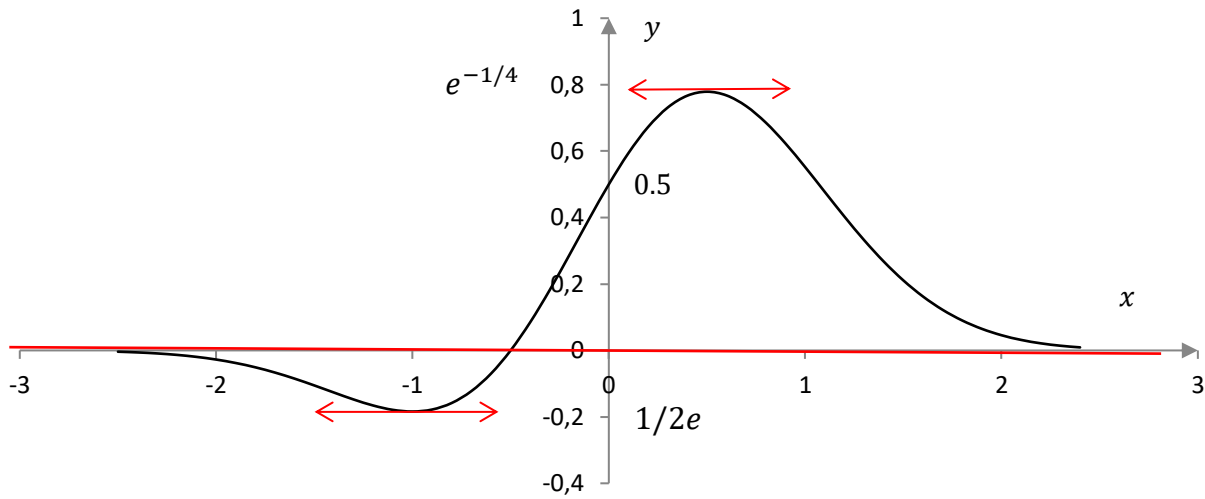
$$-2X^2 - X + 1 = -2(X+1)\left(X - \frac{1}{2}\right)$$

par conséquent $f'(x) = -2(x+1)\left(x - \frac{1}{2}\right) e^{-x^2}$

on en déduit le tableau de variation de f

x	$-\infty$	-1	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0
$f(x)$	0	$\frac{-1}{2e}$	$e^{-\frac{1}{4}}$	0

- $\frac{-1}{2e} \approx -0,2$ en gros et $e^{-\frac{1}{4}} \approx 0,8$ en gros.



Exercice 4.16. Soit f la fonction définie par

$$f(u) = \frac{4 - 5 \operatorname{ch}(u)}{\operatorname{sh}(u)}$$

1. Montrer que f est bien définie, continue et dérivable sur \mathbb{R}^* . Est-elle paire, impaire ?
2. Déterminer les limites éventuelles de f en $+\infty$ et en 0^+ .
3. Etudier les variations de f sur \mathbb{R}^* . On veillera à donner une expression très simple des points où f' s'annule.
4. Dresser le tableau de variation de f et tracer son graphe.

Correction exercice 4.16.

1. f est définie, continue et dérivable si et seulement si $\operatorname{sh}(u) \neq 0$, donc sur \mathbb{R}^* .

$$f(-u) = \frac{4 - 5 \operatorname{ch}(-u)}{\operatorname{sh}(-u)} = \frac{4 - 5 \operatorname{ch}(u)}{-\operatorname{sh}(u)} = -f(u)$$

de plus l'ensemble de définition est symétrique par rapport à 0 donc f est impaire.

- 2.

$$\begin{cases} \lim_{u \rightarrow 0^+} (4 - 5 \operatorname{ch}(u)) = -1 \\ \lim_{u \rightarrow 0^+} \operatorname{sh}(u) = 0^+ \end{cases} \Rightarrow \lim_{u \rightarrow 0^+} f(u) = -\infty$$

Limite en $+\infty$

Première méthode, on pose $X = e^u$

$$f(u) = \frac{4 - 5 \frac{e^u + e^{-u}}{2}}{\frac{e^u - e^{-u}}{2}} = \frac{8 - 5 \left(e^u + \frac{1}{e^u} \right)}{e^u - \frac{1}{e^u}} = \frac{8 - 5X - \frac{5}{X}}{X - \frac{1}{X}} = \frac{8X - 5X^2 - 5}{X^2 - 1} = \frac{-5X^2 + 8X - 5}{X^2 - 1}$$

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} f(u) = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{-5X^2 + 8X - 5}{X^2 - 1} = -5$$

Deuxième méthode

$$f(u) = \frac{4}{\operatorname{sh}(u)} - 5 \frac{\operatorname{ch}(u)}{\operatorname{sh}(u)} = \frac{4}{\operatorname{sh}(u)} - 5 \frac{1}{\operatorname{th}(u)}$$

$$\begin{cases} \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{4}{\operatorname{sh}(u)} = 0 \\ \lim_{u \rightarrow +\infty} \operatorname{th}(u) = 1 \end{cases} \Rightarrow \lim_{u \rightarrow +\infty} f(u) = -5$$

3. Pour tout $u > 0$.

$$f'(u) = \frac{-5 \operatorname{sh}(u) \times \operatorname{sh}(u) - (4 - 5 \operatorname{ch}(u)) \times \operatorname{ch}(u)}{\operatorname{sh}^2(u)} = \frac{-5 \operatorname{sh}^2(u) - 4 \operatorname{ch}(u) + 5 \operatorname{ch}^2(u)}{\operatorname{sh}^2(u)}$$

$$= \frac{5(\operatorname{ch}^2(u) - \operatorname{sh}^2(u)) - 4 \operatorname{ch}(u)}{\operatorname{sh}^2(u)} = \frac{5 - 4 \operatorname{ch}(u)}{\operatorname{sh}^2(u)}$$

On cherche la ou les valeur(s) de $u > 0$ qui annule $f'(u)$ et on pose $X = e^u$

$$5 - 4 \operatorname{ch}(u) = 0 \Leftrightarrow 5 - 4 \frac{e^u + e^{-u}}{2} = 0 \Leftrightarrow 5 - 2X - \frac{2}{X} = 0 \Leftrightarrow -2X^2 + 5X - 2 = 0$$

le discriminant vaut : $\Delta = 25 - 4(-2)(-2) = 9$

il y a donc deux solutions

$$X_1 = \frac{-5 - 3}{-4} = 2 \quad \text{et} \quad X_2 = \frac{-5 + 3}{-4} = \frac{1}{2}$$

On revient en « u »

$$u_1 = \ln(2) > 0 \quad \text{et} \quad u_2 = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln(2) < 0$$

ensuite comme $u \mapsto 4 - 5 \operatorname{ch}(u)$ est décroissante sur \mathbb{R}^+

$$0 < u < \ln(2) \Rightarrow 4 - 5 \operatorname{ch}(u) > 4 - 5 \operatorname{ch}(\ln(2)) = 0 \Rightarrow f'(u) > 0$$

$$\ln(2) < u \Rightarrow 4 - 5 \operatorname{ch}(\ln(2)) < 4 - 5 \operatorname{ch}(u) = 0 \Rightarrow f'(u) < 0$$

4.

u	0	$\ln(2)$	$+\infty$	
$f'(u)$		+	0	-
$f(u)$		$-\infty$	$f(\ln(2))$	-5

Avec

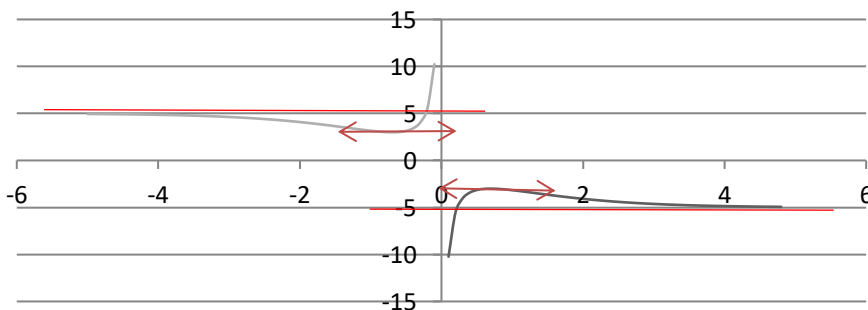
$$f(\ln(2)) = \frac{4 - 5 \operatorname{ch}(\ln(2))}{\operatorname{sh}(\ln(2))}$$

$$\operatorname{ch}(\ln(2)) = \frac{5}{4}$$

$$\operatorname{sh}(\ln(2)) = \frac{e^{\ln(2)} - e^{-\ln(2)}}{2} = \frac{2 - \frac{1}{2}}{2} = \frac{3}{4}$$

par conséquent

$$f(\ln(2)) = \frac{4 - 5 \times \frac{5}{4}}{\frac{3}{4}} = -\frac{9}{3} = -3$$



Exercice 4.17. Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = 2 \sin(x) + \sin(2x)$.

- Déterminer l'ensemble de définition de f , sa période et sa parité. En déduire un intervalle d'étude.
- Calculer la dérivée de f et déterminer son signe.
- Dresser le tableau de variation.
- Tracer la courbe représentative de f .

Correction exercice 4.17.

- f est définie (continue et dérivable) sur \mathbb{R} , 2π périodique et impaire (ce sont des évidences qu'il n'est pas nécessaire de développer), on étudiera f sur l'intervalle $[0, \pi]$, par parité on connaîtra les variations de f sur $[0, 2\pi]$, puis par périodicité sur \mathbb{R} .

2.

$$f'(x) = 2 \cos(x) + 2 \cos(2x) = 2(\cos(x) + 2 \cos^2(x) - 1) = 2(2 \cos^2(x) + \cos(x) - 1)$$

Le polynôme $2X^2 + X - 1$ admet $X_1 = -1$ et $X_2 = \frac{1}{2}$ comme racine donc

$$2X^2 + X - 1 = 2(X + 1)(X - \frac{1}{2}), \text{ on en déduit que } f'(x) = 4(\cos(x) + 1) \left(\cos(x) - \frac{1}{2} \right)$$

Dressons un tableau de signe :

x	0	$\frac{\pi}{3}$	π
$\cos(x) + 1$	+	+	0
$\cos(x) + \frac{1}{2}$	+	0	-
$f'(x)$	+	0	- 0

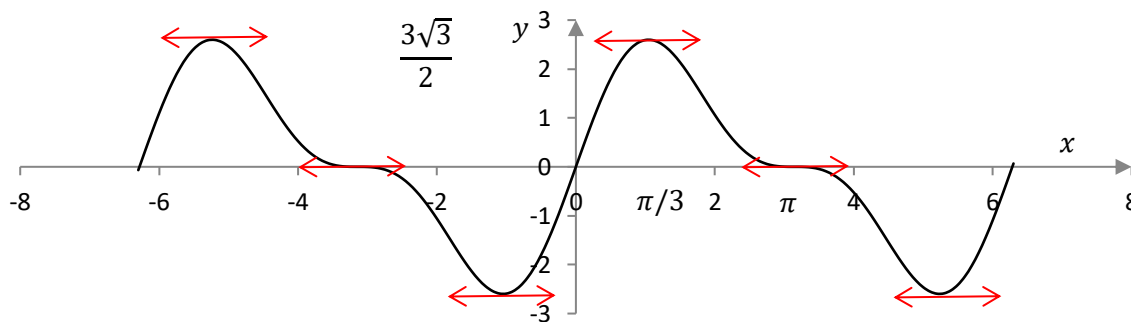
f est croissante sur $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{\pi}{3}, \pi\right]$.

- On en déduit le tableau de variation de f .

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2 \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 2 \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

x	0	$\frac{\pi}{3}$	π
$f'(x)$	+	0	- 0
$f(x)$	0	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	0

4.



Exercice 4.18. Soit f la fonction définie par $f(x) = x - \frac{\ln(x)}{x}$.

- Soit g la fonction numérique définie par $g(x) = x^2 - 1 + \ln(x)$. Dresser le tableau de variations de cette fonction, et en déduire qu'il existe un et un seul réel x_0 tel que $g(x_0) = 0$, déterminer x_0 .
- En déduire les variations de f .
- Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
- Déterminer les asymptotes au graphe de f .
- Tracer ce graphe et son asymptote en faisant figurer les tangentes remarquables.

Correction exercice 4.18.

- g est définie, continue et dérivable sur $]0, +\infty[$.

$$g'(x) = 2x + \frac{1}{x} > 0 \text{ car } x > 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$$

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	+	
$g(x)$	$-\infty$	$+\infty$

On en déduit que g est une bijection de $]0, +\infty[$ sur \mathbb{R} , donc 0 admet un unique antécédent x_0 , comme $x_0 = 1$ convient, c'est le seul.

2. f est définie, continue et dérivable sur $]0, +\infty[$

$$f'(x) = 1 - \frac{\frac{1}{x} \times x - 1 \times \ln(x)}{x^2} = 1 - \frac{1 - \ln(x)}{x^2} = \frac{x^2 - (1 - \ln(x))}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$$

car

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x)}{x} = -\infty$$

n'est pas une forme indéterminée.

$$f(1) = 1 - \frac{\ln(1)}{1} = 1$$

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$-\infty$	1	$+\infty$

3. Voir 2.

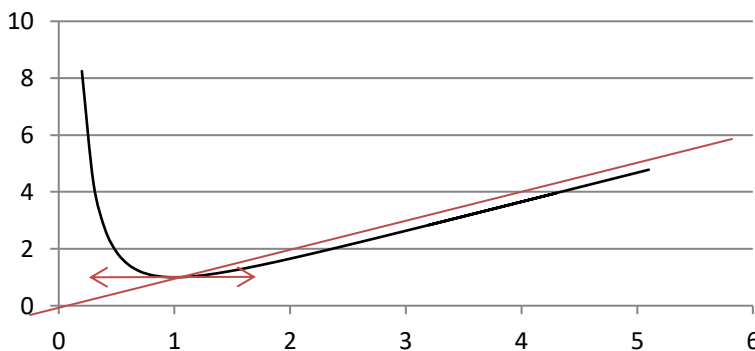
4. Comme

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = 0$$

Ce qui montre que la droite d'équation $y = x$ est asymptote au graphe de f en $+\infty$.

5.



Et même si ce n'est pas clair sur le graphe, il y a un point d'inflexion pour $x > 1$, point qui annule la dérivée seconde.

Exercice 4.101. Etablir la formule suivante :

$$\tan(x - y) + \tan(y - z) + \tan(z - x) = \tan(x - y) \tan(y - z) \tan(z - x)$$

Où x, y, z sont trois réels pour lesquels les trois tangentes apparaissant dans la formule sont définies.

Indication : on pourra appliquer judicieusement la formule donnant $\tan(a + b)$ en fonction de $\tan(a)$ et $\tan(b)$.

Correction exercice 4.101.

$$\begin{aligned} \tan(z-x) &= \tan((z-y) + (y-x)) = \frac{\tan(z-y) + \tan(y-x)}{1 - \tan(z-y)\tan(y-x)} \\ &\Leftrightarrow \tan(z-x)(1 - \tan(z-y)\tan(y-x)) = \tan(z-y) + \tan(y-x) \\ &\Leftrightarrow \tan(z-x)(1 - (-\tan(-z+y))(-\tan(-y+x))) = -\tan(-z+y) - \tan(-y+x) \\ &\Leftrightarrow \tan(z-x)(1 - \tan(y-z)\tan(x-y)) = -\tan(y-z) - \tan(x-y) \\ &\Leftrightarrow \tan(z-x) - \tan(z-x)\tan(y-z)\tan(x-y) = -\tan(y-z) - \tan(x-y) \\ &\Leftrightarrow \tan(z-x) + \tan(y-z) + \tan(x-y) = \tan(z-x)\tan(y-z)\tan(x-y) \end{aligned}$$

Exercice 4.102.

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{8 \operatorname{ch}(x)}{4e^x - 3}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f .
2. Calculer les limites de f au bord de l'ensemble de définition.
3. Etudier les variations de f .
4. Dresser le tableau de variation de f .
5. Tracer le graphe de f .

Correction exercice 4.102.

1. f est définie, continue et dérivable si et seulement si $4e^x - 3 \neq 0 \Leftrightarrow e^x \neq \frac{3}{4} \Leftrightarrow x \neq \ln\left(\frac{3}{4}\right)$

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ \ln\left(\frac{3}{4}\right) \right\}$$

2.

En $-\infty$,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} (4e^x - 3) &= -3 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{ch}(x) &= +\infty \end{aligned}$$

donc

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{8 \operatorname{ch}(x)}{4e^x - 3} = -\infty$$

en $+\infty$

On pose $X = e^x$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{8 \operatorname{ch}(x)}{4e^x - 3} = \frac{8 \frac{X + \frac{1}{X}}{2}}{4X - 3} = \frac{8(X^2 + 1)}{2X(4X - 3)} = \frac{8X^2 + 8}{8X^2 - 6X} \\ &\lim_{x \rightarrow +\infty} X = +\infty \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8X^2 + 8}{8X^2 - 6X} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8X^2}{8X^2} = 1 \\ &\lim_{x \rightarrow +\infty} X = +\infty \end{aligned}$$

En $\ln\left(\frac{3}{4}\right)^-$, $\operatorname{ch}\left(\ln\left(\frac{3}{4}\right)\right) > 1 > 0$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \ln\left(\frac{3}{4}\right)^-} (4e^x - 3) &= 0^- \\ \lim_{x \rightarrow \ln\left(\frac{3}{4}\right)^-} \frac{\operatorname{ch}(x)}{4e^x - 3} &= -\infty \end{aligned}$$

En $\ln\left(\frac{3}{4}\right)^+$, $\text{ch}\left(\ln\left(\frac{3}{4}\right)\right) \geq 1 > 0$

$$\lim_{x \rightarrow \ln\left(\frac{3}{4}\right)^+} (4e^x - 3) = 0^+$$

$$\lim_{x \rightarrow \ln\left(\frac{3}{4}\right)^+} \frac{\text{ch}(x)}{4e^x - 3} = +\infty$$

3.

$$f'(x) = 8 \frac{\text{sh}(x)(4e^x - 3) - 4 \text{ch}(x) e^x}{(4e^x - 3)^2} = 8 \frac{4e^x(\text{sh}(x) - \text{ch}(x)) - 3 \text{sh}(x)}{(4e^x - 3)^2}$$

On pose $X = e^x$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4e^x(\text{sh}(x) - \text{ch}(x)) - 3 \text{sh}(x) = 0 \Leftrightarrow 4X \left(\frac{X - \frac{1}{X}}{2} - \frac{X + \frac{1}{X}}{2} \right) - 3 \frac{X - \frac{1}{X}}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 4X((X^2 - 1) - (X^2 + 1)) - 3(X^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow 8X(-2) - 3X^2 + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow -3X^2 - 8X + 3 = 0$$

Le discriminant de cette équation est :

$$\Delta = (-8)^2 + 4 \times 3 \times 3 = 64 + 36 = 100$$

les racines sont

$$X_1 = \frac{8 - 10}{-6} = \frac{1}{3}$$

et

$$X_2 = \frac{8 + 10}{-6} = -3$$

Or $X = e^x > 0$ donc $f'(x) = 0$ n'a qu'une solution $e^x = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{1}{3}\right) = -\ln(3)$

Il reste à déterminer le signe de $4e^x(\text{sh}(x) - \text{ch}(x)) - 3 \text{sh}(x)$, cette fonction est continue et ne s'annule qu'en $-\ln(3)$, on prend une valeur simple 0, $4e^0(\text{sh}(0) - \text{ch}(0)) - 3 \text{sh}(0) = -4 < 0$

Donc pour tout $x < -\ln(3)$ $4e^x(\text{sh}(x) - \text{ch}(x)) - 3 \text{sh}(x) < 0$ et pour tout $x > -\ln(3)$,

$4e^x(\text{sh}(x) - \text{ch}(x)) - 3 \text{sh}(x) > 0$, il faut quand même faire attention au fait que f n'est pas définie

en $\ln\left(\frac{3}{4}\right)$

Comme $\frac{1}{3} < \frac{3}{4}$ alors $\ln\left(\frac{1}{3}\right) < \ln\left(\frac{3}{4}\right)$, on déduit de tout cela que :

Pour tout $x \in]-\infty, \ln\left(\frac{1}{3}\right)[$, f est décroissante.

Pour tout $x \in]\ln\left(\frac{1}{3}\right), \ln\left(\frac{3}{4}\right)[$, f est croissante.

Pour tout $x \in]\ln\left(\frac{3}{4}\right), +\infty[$, f est croissante.

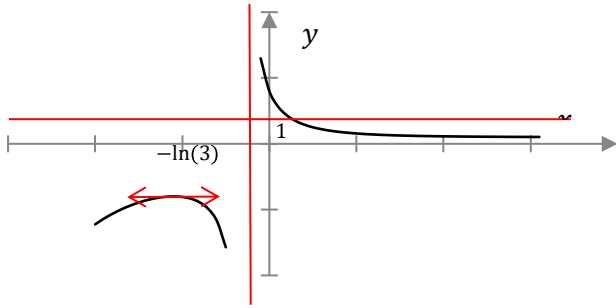
4.

x	$-\infty$	$\ln\left(\frac{1}{3}\right)$	$\ln\left(\frac{3}{4}\right)$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	-
$f(x)$	$-\infty$	-8	$-\infty$	1

car

$$f\left(\ln\left(\frac{1}{3}\right)\right) = \frac{8 \text{ch}\left(\frac{1}{3}\right)}{4e^{\ln\left(\frac{1}{3}\right)} - 3} = 4 \frac{e^{\ln\left(\frac{1}{3}\right)} + e^{-\ln\left(\frac{1}{3}\right)}}{\frac{4}{3} - 3} = 4 \frac{\frac{1}{3} + 3}{-\frac{5}{3}} = \frac{40}{-5} = -8$$

5.



Exercice 4.103.

-8

Soit f la fonction d'une variable réelle définie par :

$$f(u) = \frac{3 + 4 \operatorname{sh}(u)}{\operatorname{ch}(u)}$$

1. Préciser son domaine de définition.
2. Préciser ses limites quand u tend vers $+\infty$ et $-\infty$.
3. Etudier les variations de f . On veillera à fournir une expression très simple de la valeur u_0 pour laquelle $f'(u_0) = 0$ (l'expression attendue n'utilise pas de fonctions hyperboliques réciproque (Hors programme)).
4. Tracer le graphe de f .

Correction exercice 4.103.

1. $u \mapsto 3 + 4 \operatorname{sh}(u)$ est définie sur \mathbb{R} . $\operatorname{ch}(u) \neq 0$ pour tout $u \in \mathbb{R}$ et ch est défini sur \mathbb{R} donc f est définie sur \mathbb{R} .
2. Première méthode

$$f(u) = \frac{3 + 4 \operatorname{sh}(u)}{\operatorname{ch}(u)} = \frac{3}{\operatorname{ch}(u)} + 4 \operatorname{th}(u)$$

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} \operatorname{ch}(u) = +\infty \text{ donc } \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{3}{\operatorname{ch}(u)} = 0 \text{ et } \lim_{u \rightarrow +\infty} \operatorname{th}(u) = 1 \text{ donc } \lim_{u \rightarrow +\infty} f(u) = 4$$

$$\lim_{u \rightarrow -\infty} \operatorname{ch}(u) = +\infty \text{ donc } \lim_{u \rightarrow -\infty} \frac{3}{\operatorname{ch}(u)} = 0 \text{ et } \lim_{u \rightarrow -\infty} \operatorname{th}(u) = -1 \text{ donc } \lim_{u \rightarrow -\infty} f(u) = -4$$

Deuxième méthode

$$f(u) = \frac{3 + 4 \operatorname{sh}(u)}{\operatorname{ch}(u)} = \frac{3 + 4 \frac{e^u - e^{-u}}{2}}{\frac{e^u + e^{-u}}{2}} = \frac{6 + 4(e^u - e^{-u})}{e^u + e^{-u}} = \frac{6e^u + 4(e^{2u} - 1)}{e^{2u} + 1}$$

en multipliant le numérateur et le dénominateur par 2, puis par e^u .

On pose $X = e^u$,

$$f(u) = \frac{6X + 4(X^2 - 1)}{X^2 + 1} = \frac{4X^2 + 6X - 4}{X^2 + 1}$$

si $u \rightarrow +\infty$ alors $X \rightarrow +\infty$

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} f(u) = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{4X^2 + 6X - 4}{X^2 + 1} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{4X^2}{X^2} = 4$$

si $u \rightarrow -\infty$ alors $X \rightarrow 0$

$$\lim_{u \rightarrow -\infty} f(u) = \lim_{X \rightarrow 0} \frac{4X^2 + 6X - 4}{X^2 + 1} = -4$$

3.

$$\begin{aligned} f'(u) &= \frac{4 \operatorname{ch}(u) \operatorname{ch}(u) - (3 + 4 \operatorname{sh}(u)) \operatorname{sh}(u)}{\operatorname{ch}^2(u)} = \frac{4 \operatorname{ch}^2(u) - 3 \operatorname{sh}(u) - 4 \operatorname{sh}^2(u)}{\operatorname{ch}^2(u)} \\ &= \frac{4(\operatorname{ch}^2(u) - \operatorname{sh}^2(u)) - 3 \operatorname{sh}(u)}{\operatorname{ch}^2(u)} = \frac{4 - 3 \operatorname{sh}(u)}{\operatorname{ch}^2(u)} \end{aligned}$$

$$\operatorname{sh}(u_0) = \frac{4}{3} \Leftrightarrow \frac{e^{u_0} - e^{-u_0}}{2} = \frac{4}{3}$$

On pose $X_0 = e^{u_0}$

$$\operatorname{sh}(u_0) = \frac{4}{3} \Leftrightarrow \frac{X_0 - \frac{1}{X_0}}{2} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow X_0 - \frac{1}{X_0} = \frac{8}{3} \Leftrightarrow X_0^2 - 1 = \frac{8}{3}X_0 \Leftrightarrow X_0^2 - \frac{8}{3}X_0 - 1 = 0$$

le discriminant vaut

$$\Delta = \frac{64}{9} + 4 = \frac{100}{9} = \left(\frac{10}{3}\right)^2$$

$$X_{0,1} = \frac{\frac{8}{3} - \frac{10}{3}}{2} = -\frac{1}{3} < 0$$

$$X_{0,2} = \frac{\frac{8}{3} + \frac{10}{3}}{2} = 3$$

donc

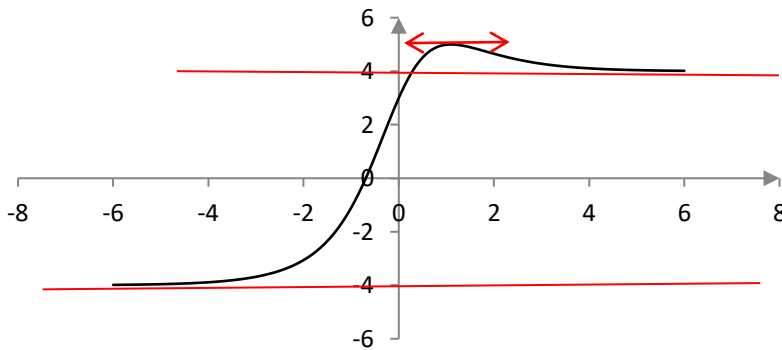
$$e^{u_0} = 3 \Leftrightarrow u_0 = \ln(3)$$

u	$-\infty$	$\ln(3)$	$+\infty$
$f'(u)$		+	0
$f(u)$	-4	5	4

$$\operatorname{ch}(\ln(3)) = \frac{e^{\ln(3)} + e^{-\ln(3)}}{2} = \frac{3 + \frac{1}{3}}{2} = \frac{5}{3}$$

$$f(\ln(3)) = \frac{3 + 4 \times \frac{4}{3}}{\frac{5}{3}} = 5$$

4. Graphe de $v = f(u)$



Exercice 4.104. Soit f la fonction définie sur $I = \mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \sin^2(x) + \frac{1}{2}\cos(x)$$

1. Etudier la parité de f et sa périodicité, en déduire un intervalle d'étude.
2. Montrer qu'il existe un unique $x_0 \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$ tel que $\cos(x_0) = \frac{1}{4}$
3. Etudier les variations de f sur $[0, \pi]$.
4. Dresser le tableau de variation de f et tracer le graphe de f .

Correction exercice 4.104.

1. f est paire et 2π périodique, on étudie f sur $[0, \pi]$

$$2. f'(x) = 2 \cos(x) \sin(x) - \frac{1}{2} \sin(x) = 2 \sin(x) \left(\cos(x) - \frac{1}{4} \right)$$

$$\forall x \in [0, \pi], \quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin(x) = 0 \\ \cos(x) = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Il y a deux valeurs qui annulent $\sin(x)$ dans $[0, \pi]$, ce sont 0 et π .

Pour $x \in [0, \pi]$, la fonction $\cos: [0, \pi] \mapsto [-1, 1]$ étant strictement décroissante, il s'agit d'une bijection, $\frac{1}{4}$ admet un unique antécédent x_0 , sur le signe de $\cos(x) - \frac{1}{4}$ est positif sur $[0, x_0]$ et négatif sur $[x_0, \pi]$.

x	0	x_0	π
$\sin(x)$	0	+	+ 0
$\cos(x) - \frac{1}{4}$		+	0 -
$f'(x)$	0	+	0 - 0

f est croissante sur $[0, x_0]$

f est décroissante sur $[x_0, \pi]$

3.

$$f(0) = \frac{1}{2}$$

$$f(x_0) = \sin^2(x_0) + \frac{1}{2} \cos(x_0) = 1 - \cos^2(x_0) + \frac{1}{2} \cos(x_0) = 1 - \frac{1}{16} + \frac{1}{8} = \frac{16 - 1 + 2}{16} = \frac{17}{16}$$

$$f(\pi) = -\frac{1}{2}$$

x	0	x_0	π
$f'(x)$	0	+	0 - 0
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{17}{16}$	$-\frac{1}{2}$

