Correction Feuille 8 : Limites et continuité des fonctions

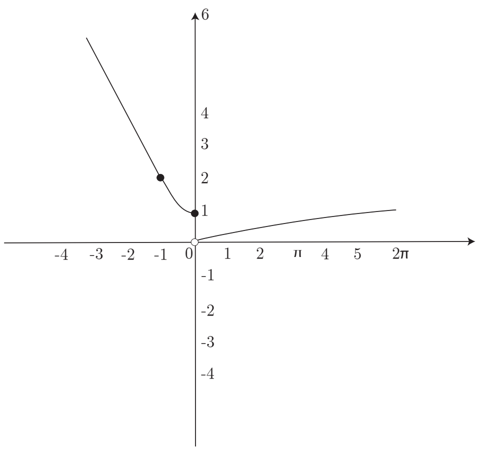
Exercice 8-1 Soit $f(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } x \leq -1 \\ x^2+1 & \text{si } -1 < x \leq 0 \\ \sin(x/4) & \text{si } x > 0. \end{cases}$

1. Dessiner le graphe de f.
2. Calculer les limites suivantes :

a) $\lim_{x\to -1-} f(x)$ c) $\lim_{x\to 0-} f(x)$ e) $\lim_{x\to \pi-} f(x)$
b) $\lim_{x\to -1+} f(x)$ d) $\lim_{x\to 0+} f(x)$ f) $\lim_{x\to \pi+} f(x)$

Est-ce que les limites suivantes existent ? Si oui donner leur valeur.
a) $\lim_{x\to -1} f(x)$ b) $\lim_{x\to 0} f(x)$ c) $\lim_{x\to \pi} f(x)$

Correction exercice 8-1



Quand $x \to -1^-$, $f(x) = -2x \to (-2)\cdot(-1) = 1$, tandis que quand $x \to -1^+$, $f(x) = x^2+1 \to (-1)^2+1 = 1+1 = 2$.

De façon analogue, quand $x \to 0^-$, $f(x) \to 0^2+1 = 1$ et quand $x \to 0^+$, $f(x) \to \sin(0) = 0$ puis, quand $x \to \pi^-$, $f(x) \to \sin(\pi/4) = \sqrt{2}/2$ et idem quand $x \to \pi^+$.

On en déduit que les limites (a) et (c) existent, et elles valent respectivement 2 et $\sqrt{2}/2$, tandis que la limite (b) n'existe pas.

Exercice 8-2 Calculer les limites suivantes :

1) $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x-2}$ 2) $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^3-1}{x^2-1}$ 3) $\lim_{x\to 4} \dfrac{2x+5}{x-4}$

4) $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{3x^9-17}{x^7}$ 5) $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{3x^3-5x^2+7}{8+2x-5x^3}$ 6) $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{x^2+3}{x^3+2}$

7) $\lim_{x\to 1} |x-1|$ 8) $\lim_{x\to 1} \dfrac{1}{|x-1|}$ 9) $\lim_{x\to 5} \dfrac{1}{|x-1|}$

10) $\lim_{x\to 0} \dfrac{1}{\sqrt{1+x}-1}$ 11) $\lim_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{1-x} - \dfrac{1}{1-x^2}\right)$ 12) $\lim_{x\to +\infty} \sqrt{x^2+2x+5} - x$

13) $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{\sin x}{x}$ 14) $\lim_{x\to 0} x\sin(\dfrac{1}{x})$ 15) $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{x^2+\sin x}{x^2+\cos x}$

16) $\lim_{x\to 0+} x^x$ 17) $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{1+2\sin(x)}{1+\sqrt{x}}$ 18) $\lim_{x\to +\infty} e^{x-\sin x}$

Correction exercice 8-2 Dans certaines questions, on notera $f(x)$ l'expression dont la limite est demandée.

1. On a $x^2-4=(x-2)(x+2)$, donc, quand $x\to 2$
$$\frac{x^2-4}{x-2}=(x+2)\to 2+2=4.$$
2. Décomposer $x^2-1=(x-1)(x+1)$ et $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$ et simplifier.
3. La limite n'existe pas : étudier la limite quand $x\to 4^-$ et $x\to 4^+$.
4. $f(x)$ est quotient de fonctions polynomiales. La réponse est donc la même que si la question portait sur le quotient des monômes de plus haut degré, c'est-à-dire l'expression $3x^9/x^7$. Cette réponse est donc $+\infty$.
5. Comme le précédent : la limite vaut $-3/5$.
6. Encore comme le précédent. La limite vaut 0.
7. Quand $x\to 1$, $f(x)\to|1-1|=0$, la fonction valeur absolue étant continue.
8. $+\infty$.
9. $1/4$.
10. Le dénominateur tend vers 0 avec un signe variable selon que x tende vers 1 à gauche ou à droite, donc $f(x)$ tend vers l'infini avec un signe variable. La limite n'existe pas.
11. On a
$$\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1-x^2}=\frac{x}{(1-x)(1+x)},$$
ce qui permet de montrer que la limite n'existe pas.
12. On a, pour $x>0$,
$$\sqrt{x^2+2x+5}-x=\frac{2x+5}{\sqrt{x^2+2x+5}+x}=\frac{2x+5}{x\left(\sqrt{1+(2/x)+(5/x^2)}+1\right)}\longrightarrow_{x\to+\infty}1.$$
13. Pour $x>0$, $-\dfrac{1}{x}\le\dfrac{\sin x}{x}\le\dfrac{1}{x}$, la réponse est donc 0 par appel aux gendarmes.
14. Pour $x\neq 0$, $-|x|\le f(x)\le|x|$, la réponse est donc 0 par appel aux gendarmes.
15. Il suffit de mettre en facteur, au numérateur et au dénominateur, les quantités qui convergent à l'infini plus rapidement que les autres à savoir x^2. On trouve donc que la limite vaut 1.
16. On écrit
$$x^x=e^{x\ln x}\longrightarrow_{x\to 0^+}e^0=1.$$
17. On encadre $\dfrac{-1}{1+\sqrt{x}}\le f(x)\le\dfrac{3}{1+\sqrt{x}}$ puis on appelle les gendarmes qui font tendre tout le monde vers 0.
18. Pour tout x, $e^{x-1}\le e^{x-\sin x}$ et donc la réponse est $+\infty$.

Exercice 8-3 On rappelle que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ et $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$ et que $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)$.

Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(2x)}{\sqrt{x}}$	2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin(1/x)}{\sin x}$	3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}$
4) $\lim\limits_{x\to 1/2}\dfrac{\cos(\pi x)}{1-2x}$	5) $\lim\limits_{x\to 1/2}(2x^2+x-1)\tan(\pi x)$	6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{x^2}$
7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^2)}{\sin^2 x}$	8) $\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x}\ln^3 x$	9) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\exp(\ln^2 x)}{x^n}$, $n\in\mathbb{Z}$

Correction exercice 8-3

1. $\forall\, x>0$, $\dfrac{\sin(2x)}{\sqrt{x}}=2\sqrt{x}\,\dfrac{\sin(2x)}{2x}$. Or $2x\to 0$ quand $\to 0$.

   Donc $\dfrac{\sin(2x)}{2x}\to 1$. Par ailleurs $2\sqrt{x}\to 0$.

   Donc par produit, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(2x)}{\sqrt{x}}=0$.

2. $\dfrac{x^2\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)}{\sin(x)} = \left(\dfrac{x}{\sin(x)}\right)\left(x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\right) \to 1\times 0 = 0$ (en utilisant la question 14 de l'exercice 2 pour la deuxième limite).

3. Quand $x\to 0$, $\dfrac{\tan(x)}{x} = \dfrac{\tan(x)-\tan(0)}{x-0} \to \tan'(0) = 1$.

4. $\forall\, x \neq \dfrac{1}{2}$, $\dfrac{\cos(\pi x)}{1-2x} = -\dfrac{1}{2}\,\dfrac{\cos(\pi x)-\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right)}{x-\dfrac{1}{2}}$.

   Donc, quand $x\to\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{\cos(\pi x)}{1-2x} \to -\dfrac{1}{2}\,\pi\left(-\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\right) = \dfrac{\pi}{2}$.

5. $\forall\, x \in \left[0;\dfrac{1}{2}\right[\cup\left]\dfrac{1}{2};1\right]$, $(2x^2+x-1)\tan(\pi x) = \dfrac{2x-1}{\cos(\pi x)}\,(x+1)\sin(\pi x)$.

   D'après la question précédente, $\displaystyle\lim_{x\to\frac{1}{2}} (2x^2+x-1)\tan(\pi x) = -\dfrac{2}{\pi}\times\dfrac{3}{2}\times 1 = -\dfrac{3}{\pi}$.

6. $\forall\, x\in\mathbb{R}^*$, $\dfrac{\cos x - 1}{x^2} = \dfrac{-2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x^2} = -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}\right)^2$.

   Donc, $\displaystyle\lim_{x\to 0}\dfrac{\cos x - 1}{x^2} = -\dfrac{1}{2}$.

7. $\forall x \in]-\pi;0[\cup]0;\pi[$, $\dfrac{\ln(1+x^2)}{\sin^2 x} = \left(\dfrac{x}{\sin(x)}\right)^2\dfrac{\ln(1+x^2)}{x^2}$.

   Or, $x^2\to 0$ quand $\to 0$, donc $\dfrac{\ln(1+x^2)}{x^2}\to 1$.

   Donc, $\displaystyle\lim_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^2)}{\sin^2 x} = 1$.

8. Quand $x\to 0$, $\sqrt{x}\ln^3 x = \left(x^{\frac{1}{6}}\ln x\right)^3 \to 0$ par croissance comparée.

9. $\forall\, x>0$, en posant $X=\ln x$ on a $\dfrac{\exp(\ln^2 x)}{x^n} = \dfrac{e^{X^2}}{e^{nX}} = e^{X^2-nX}$.

   Or $X\to+\infty$ quand $x\to+\infty$.

   Donc, pour tout $n\in\mathbb{Z}$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\dfrac{\exp(\ln^2 x)}{x^n} = \lim_{X\to+\infty} e^{X^2-nX} = +\infty$.

<u>**Exercice 8-4**</u> Dans cet exercice, la notation $E(x)$ désigne la partie entière d'un réel x. Calculer :

1) $\displaystyle\lim_{x\to 0} E(x+1)$ 2) $\displaystyle\lim_{x\to 0} xE(\frac{1}{x})$ 3) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} xE(\frac{1}{x})$

<u>**Correction exercice 8-4**</u>

1. Comme $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} E(x) = -1$ tandis que $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} E(x) = 0$, et que pour $|x| < \dfrac{1}{2}$ ("suffisamment proche" de 0) $\dfrac{1}{2} < x+1 < \dfrac{3}{2}$, on a $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} E(x+1) = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} E(x+1) = 1$.

2. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a $E(x)\leq x < E(x)+1$. Par conséquent, pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, $E(\frac{1}{x}) \leq \frac{1}{x} < E(\frac{1}{x})+1$, ou encore, $\frac{1}{x}-1 < E(\frac{1}{x}) \leq \frac{1}{x}$. Alors, $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x(\frac{1}{x}-1) \leq \lim_{x\to 0^+} xE(\frac{1}{x}) \leq \lim_{x\to 0^+} x\frac{1}{x}$. Par les gendarmes, $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} xE(\frac{1}{x}) = 1$. Quant aux valeurs négatives de x, le même raisonnement donne les inégalités $x\frac{1}{x} \leq xE(\frac{1}{x}) < x(\frac{1}{x}-1)$. Encore une fois, la limite est 1.

3. Quand $x\to+\infty$, $1/x\to 0$ donc $E(1/x) = 0$ et puis $xE(1/x) = 0 \to 0$.

Exercice 8-5

1) Si $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{f(x)-5}{x-2} = 5$, trouver $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$. 2) Si $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x^2} = -2$, trouver $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x}$.

Correction exercice 8-5

1. On pose $g(x) = \dfrac{f(x)-5}{x-2}$ pour $x \neq 2$. Alors, $f(x) = (x-2)g(x)+5$ pour $x \neq 2$, et donc $f(x) \to 0 \times 5 + 5 = 5$ quand $x \to 2$ avec $x \neq 2$.
2. En posant $g(x) = \dfrac{f(x)}{x^2}$ pour $x \neq 0$, on observe que $\dfrac{f(x)}{x} = xg(x) \to 0 \times (-2) = 0$ quand $x \to 0$.

Exercice 8-6 Étudier la continuité à gauche, la continuité à droite et la continuité des fonctions suivantes en chaque point de leur domaine de définition.

1. $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 2x-1 & \text{si } 1 < x \leq 2 \end{cases}$
2. $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = x + \dfrac{\sqrt{x^2}}{x}$ si $x \neq 0$ et $g(0) = 1$.

Correction exercice 8-6

1. Si $x_0 \in [0,1[$, alors $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} x^2 = x_0^2 = f(x_0)$. En un tel point, f est continue. Un raisonnement similaire donne la même conclusion pour $x_0 \in]1,2]$. Il reste à vérifier la continuité au point $x = 1$. Alors, $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} x^2 = 1$ ainsi que $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} (2x-1) = 1$. Comme $f(1) = 1^2 = 1$, on conclut que f est continue en 1 aussi. Ainsi f est continue sur $[0,2]$.
2. On rappelle que $\sqrt{x^2} = |x|$. Alors, si $x > 0$, $\sqrt{x^2} = x$ tandis que si $x < 0$, $\sqrt{x^2} = -x$. Par conséquent, $g(x) = x+1$ si $x > 0$, et $g(x) = x-1$ si $x < 0$. Les limites de ces deux expressions quand x tend vers 0 sont 1 et -1 respectivement f n'est pas continue au point $x = 0$. Néanmoins, $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} x+1 = 1$. On en déduit que g est continue à droite en 0. Aux autres points, g est continue parce qu'elle est polynomiale.

Exercice 8-7

1. Déterminer les valeurs de $k \in \mathbb{R}$ pour lesquelles f_k définie par $f_k(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 2 \\ k - x^2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$ est une fonction continue.
2. Soit $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x) = \dfrac{1+x^3}{1+x}$. Trouver une application continue $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $g|_{\mathbb{R}\setminus\{-1\}} = f$

Correction exercice 8-7

1. La fonction est continue en tout point de $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ parce que sur chacun des deux intervalles ouverts qui forment cet ensemble elle coïncide avec une fonction polynomiale. Comme $\lim\limits_{x\to 2^-} f_k(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} x^2 = 4$ et que c'est aussi $f_k(2)$, pour que f_k soit continue en 2, il faut et il suffit que $\lim\limits_{x\to 2^+} f_k(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} k - x^2 = 4$. Ceci équivaut à $k = 8$.
2. On détermine d'abord $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$. Comme pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $\dfrac{1+x^3}{1+x} = 1 - x + x^2$, $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{1+x^3}{1+x} = \lim\limits_{x\to -1} 1 - x + x^2 = 3$. Il suffit alors de prendre g définie par $g(-1) = 3$ et $g(x) = f(x)$ pour tout $x \neq -1$.

Exercice 8-8 Montrer que l'équation $x^3 - 15x + 1 = 0$ a trois solutions dans l'intervalle $[-4, 4]$.

Correction exercice 8-8

On peut calculer quelques valeurs de f. Ainsi $f(-4) = -3$, $f(-3) = 19$, $f(0) = 1$, $f(1) = -13$, $f(3) = -7$, $f(4) = 5$. Les changements de signe et le théorème des valeurs intermédiaires nous montrent que f s'annule sur chacun des intervalles $[-4, -3]$, $[0, 1]$ et $[3, 4]$.

Exercice 8-9 Montrer qu'il existe $x \in [3\pi/4, \pi]$ tel que

$$\tan x + \frac{x}{3} = 0.$$

Correction exercice 8-9

La fonction $f : x \mapsto \tan x + \dfrac{x}{3}$ est continue sur l'intervalle $[3\pi/4, \pi]$ et $f\left(\dfrac{3\pi}{4}\right) = -1 + \dfrac{\pi}{4} < 0$ et $f(\pi) = \dfrac{\pi}{3} > 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $[3\pi/4, \pi]$.

Exercice 8-11 Pour tout entier $n \geq 2$, on considère la fonction $f_n : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ donnée par

$$f_n(x) = x^n - x - 1$$

1. Soit $n \geq 2$. Montrer qu'il existe un unique $x_n > 1$ tel que $f_n(x_n) = 0$.
2. Soit $n \geq 2$. Montrer que $f_{n+1}(x_n) > 0$.
3. En déduire que la suite $(x_n)_{n\geq 2}$ est décroissante et converge vers une limite l.
4. Déterminer l.

Correction exercice 8-10

1. La fonction f_n est dérivable sur $[1, +\infty[$ et pour tout $x \geq 1$, $f_n'(x) = nx^{n-1} - 1$. Comme $n \geq 2$ et $x \geq 1$, f_n' est strictement positive sur $[1, +\infty[$ et f_n est strictement croissante sur $[1, +\infty[$. De plus, $f(1) = -1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$. Donc f_n réalise une bijection de $[1, +\infty[$ sur $[-1, +\infty[$ et comme $0 \in [-1, +\infty[$, il existe un unique $x_n > 1$ tel que $f_n(x_n) = 0$.
2. Par la définition de f_{n+1}, $f_{n+1}(x_n) = x_n^{n+1} - x_n - 1$. Or $f_n(x_n) = 0$, soit $x_n + 1 = x_n^n$. Donc $f_{n+1}(x_n) = x_n^{n+1} - x_n^n = x_n^n(x_n - 1)$. Comme $x_n > 1$, on a $f_{n+1}(x_n) > 0$.
3. Soit $n \geq 2$. Comme $f_{n+1}(x_{n+1}) = 0$, $f_{n+1}(x_n) > 0 \Leftrightarrow f_{n+1}(x_n) > f_{n+1}(x_{n+1})$. Or f_{n+1} est strictement croissante sur $[1, +\infty[$. Donc, $x_n > x_{n+1}$. Ceci étant vrai pour tout entier $n \geq 2$ la suite $(x_n)_{n\geq 2}$ est décroissante. Comme $(x_n)_{n\geq 2}$ est décroissante et minorée par 1, elle converge vers une limite $l \geq 1$.
4. Pour chaque $n \geq 2$, la relation $f_n(x_n) = 0$ peut être regroupée sous la forme $x_n^n = x_n + 1$, puis sous la forme $n \ln x_n = \ln(x_n + 1)$ et enfin sous la forme $\ln x_n = \dfrac{\ln(x_n + 1)}{n}$. Dans l'expression de droite, quand $n \to +\infty$, le numérateur tend vers le réel $\ln(1 + l)$ tandis que le dénominateur tend vers $+\infty$; l'expression tend donc vers 0. On sait ainsi que $\ln x_n \to 0$; en prenant les exponentielles on conclut que $x_n \to e^0 = 1$.
   Or $\lim\limits_{n\to+\infty} l^n = +\infty$, donc par comparaison, $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n^n = +\infty$. En contradiction avec $x_n^n = x_n + 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n + 1 = l + 1$. Donc, $l = 1$.

Exercice 8-11 Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$ et f une application de $[a, b]$ vers $[a, b]$.

1. On suppose que pour tout $(x, y) \in [a, b] \times [a, b]$ on a

   $$|f(x) - f(y)| \leq |x - y|$$

   Montrer que f est continue. En déduire qu'il existe au moins $u \in [a, b]$ tel que $f(u) = u$.

2. On suppose maintenant que pour tout $(x, y) \in [a, b] \times [a, b]$ avec $x \neq y$ on a

$$|f(x) - f(y)| < |x - y|$$

Montrer qu'il existe un unique $u \in [a, b]$ tel que $f(u) = u$.

Correction exercice 8-11

1. Soit $x_0 \in [a;\, b]$, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\eta = \epsilon > 0$ tel que

$$\forall x \in [a;\, b], \quad |x - x_0| < \epsilon \;\Rightarrow\; |f(x) - f(x_0)| \leq |x - x_0| < \epsilon$$

Cela montre que f est continue en x_0. Ceci étant vrai pour tout $x_0 \in [a;\, b]$, la fonction f est continue sur $[a;\, b]$. Soit φ la fonction définie sur $[a;\, b]$ par $\varphi(x) = f(x) - x$. On a $\varphi(a) = f(a) - a \geq 0$ car $f(a) \in [a;\, b]$ et $\varphi(b) = f(b) - b \leq 0$ car $f(b) \in [a;\, b]$. Comme la fonction φ est continue sur $[a;\, b]$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe $u \in [a;\, b]$ tel que $\varphi(u) = 0$, c'est-à-dire $f(u) = u$.

2. D'après la question 1., il existe $u \in [a;\, b]$ tel que $f(u) = u$. Montrons l'unicité de u. Par l'absurde, on suppose qu'il existe $u_1 \in [a;\, b]$ et $u_2 \in [a;\, b]$ avec $u_1 \neq u_2$ tels que $f(u_1) = u_1$ et $f(u_2) = u_2$. On a donc $|f(u_2) - f(u_1)| < |u_2 - u_1|$, soit $|u_2 - u_1| < |u_2 - u_1|$, ce qui est impossible. Donc, il existe un unique $u \in [a, b]$ tel que $f(u) = u$.

Exercice 8-12 Montrer que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue telle que $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, alors f est surjective.

Correction exercice 8-12

Comme $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue et telle que $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires, pour tout réel y, il existe un réel x tel que $f(x) = y$. Autrement dit, f est surjective.

Exercice 8-13 Vrai ou faux ?

1. Si f est continue sur un intervalle fermé borné $[a, b]$ vers $\mathbb{R}$, alors $f([a, b])$ est un intervalle fermé borné.
2. Si f est continue sur un intervalle ouvert borné $]a, b[$ vers $\mathbb{R}$, alors $f(]a, b[)$ est un intervalle ouvert borné.
3. Si f est continue sur un intervalle ouvert borné $]a, b[$ vers $\mathbb{R}$, alors $f(]a, b[)$ est un intervalle ouvert, mais pas forcément borné.
4. Si f est continue sur un intervalle ouvert borné $]a, b[$ vers $\mathbb{R}$, alors $f(]a, b[)$ est un intervalle, mais pas forcément ouvert ni borné.

Correction exercice 8-13

1. **Vrai** théorème des bornes atteintes.
2. **Faux** la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est continue sur $]0,\, 1[$ à valeurs dans $]1,\, +\infty[$.
3. **Faux** la fonction sinus est continue sur $]0,\, 2\pi[$ à valeurs dans $[-1,\, 1]$; un autre exemple est toute fonction constante sur $]a, b[$.
4. **Vrai** théorème des valeurs intermédiaires.

Exercice 8-14

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et périodique. Montrer que f est bornée.
2. En utilisant le résultat précédent, calculer la limite

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x(\sin^8 x + \cos^{14} x)}$$

Correction exercice 8-14

1. Soit $T>0$ une période de f. Sur $[0,T]$, $|f|$ est majorée par un certain M car f est continue sur un intervalle fermé borné. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $x-nT\in[0,T]$ pour $n=\mathrm{E}\left(\dfrac{x}{T}\right)$. Donc $|f(x)|=|f(x-nT)|\leq M$, ce qui montre que f est bornée sur $\mathbb{R}$.
2. La fonction $x\mapsto\dfrac{1}{\sin^8(x)+\cos^{14}(x)}$ est définie, continue, périodique et positive sur $\mathbb{R}$. Il existe donc un réel positif M tel que pour tout réel x, $\dfrac{1}{\sin^8(x)+\cos^{14}(x)}\leq M$. Donc pour tout réel $x>1$, $0\leq\dfrac{\ln x}{x(\sin^8 x+\cos^{14}x)}\leq M\dfrac{\ln x}{x}$. Par croissance comparée, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$. Donc par appel aux gendarmes, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x(\sin^8 x+\cos^{14}x)}=0$.

Exercice 8-101 Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x+5}-\sqrt{x-3}$ 2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x+1}-(x+1)$ 3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}$

4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin(2x)}{\sin(3x)}$ 5) $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln^2 x-\sqrt{x}$ 6) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(\cos(3x))}{\ln(\cos(2x))}$

7) $\lim\limits_{x\to1+}\ln x\ln(\ln x)$ 8) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x+1)}{\ln x}$ 9) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-\sqrt{x}}{\ln x+x}$

Correction exercice 8-101

1. $\forall x>3$, $\sqrt{x+5}-\sqrt{x-3}=\dfrac{8}{\sqrt{x+5}+\sqrt{x-3}}=\dfrac{1}{x}\dfrac{8}{\sqrt{1+\dfrac{5}{x}}+\sqrt{1-\dfrac{3}{x}}}$. Donc, $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x+5}-\sqrt{x-3}=0$.
2. $\forall x>0$, $\sqrt{x^2+x+1}-(x+1)=\dfrac{x^2-x}{\sqrt{x^2+x+1}+(x+1)}=\dfrac{x-1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}+1+\dfrac{1}{x}}$. Donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x+1}-(x+1)=+\infty$.
3. $\forall x>0$, $\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}}=\dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}}+1}$. Donc, $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}=\dfrac{1}{2}$.
4. $\forall x\in\left]-\dfrac{\pi}{3};0\right[\cup\left]0;\dfrac{\pi}{3}\right[$, $\dfrac{\sin(2x)}{\sin(3x)}=\dfrac{2}{3}\dfrac{\sin(2x)}{2x}\dfrac{3x}{\sin(3x)}$. Donc, d'après la question 2.1, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin(2x)}{\sin(3x)}=\dfrac{2}{3}$.
5. $\ln^2 x-\sqrt{x}=\sqrt{x}\left(\left(\dfrac{\ln(x)}{x^{\frac{1}{4}}}\right)^2-1\right)$. Par croissance comparée, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x)}{x^{\frac{1}{4}}}=0$. On en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln^2 x-\sqrt{x}=-\infty$.
6. $\dfrac{\ln(\cos(3x))}{\ln(\cos(2x))}=\dfrac{\ln\left(1-2\sin^2\left(\frac{3x}{2}\right)\right)}{\ln\left(1-2\sin^2(x)\right)}=\dfrac{\ln\left(1-2\sin^2\left(\frac{3x}{2}\right)\right)}{-2\sin^2\left(\frac{3x}{2}\right)}\times\dfrac{-2\sin^2 x}{\ln\left(1-2\sin^2 x\right)}\times\dfrac{-2\sin^2\left(\frac{3x}{2}\right)}{-2\sin^2 x}$.

   Or, $\lim\limits_{x\to0}\left(-2\sin^2\left(\dfrac{3x}{2}\right)\right)=0$ et $\lim\limits_{X\to0}\dfrac{\ln(1+X)}{X}=1$, soit par composée, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\left(1-2\sin^2\left(\frac{3x}{2}\right)\right)}{-2\sin^2\left(\frac{3x}{2}\right)}=1$.

   De même, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-2\sin^2 x}{\ln\left(1-2\sin^2 x\right)}=1$.

   Par la méthode de la question 4., on trouve $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-2\sin^2\left(\frac{3x}{2}\right)}{-2\sin^2 x}=\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\sin\left(\frac{3x}{2}\right)}{\sin x}\right)^2=\left(\dfrac{3}{2}\right)^2$.

   Par suite, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(\cos(3x))}{\ln(\cos(2x))}=\dfrac{9}{4}$.
7. On pose $u=\ln(x)$. Alors la limite devient $\lim\limits_{u\to0^+}u\ln(u)$, soit encore $\lim\limits_{u\to+\infty}-\dfrac{\ln(u)}{u}$. Par croissance comparée, cette limite est 0.

8. $\forall x > 0$, $\dfrac{\ln(x+1)}{\ln x} = \dfrac{\ln\left(x\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right)}{\ln x} = 1 + \dfrac{\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}{\ln x}$. On en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x+1)}{\ln x} = 1$.
9. On étudie $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x-\sqrt{x}}{\ln x + x}$ comme s'il s'agissait d'une fraction de polynômes puisqu'on peut comparer les croissances des puissances de x à $\ln(x)$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x-\sqrt{x}}{\ln x + x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x(1-\frac{1}{\sqrt{x}})}{x(\frac{\ln x}{x}+1)} = 1$.

<u>**Exercice 8-102**</u> Soit f une fonction décroissante sur $]0,+\infty[$ telle que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ on a $f(x) \geq 0$.

<u>**Correction exercice 8-102**</u>

Supposons par l'absurde qu'il existe $a > 0$ tel que $f(a) < 0$. Alors, comme f est supposée décroissante, pour tout $x \geq a$, $f(x) \leq f(a) < 0$. Ceci contredit la définition de la limite $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

<u>**Exercice 8-103**</u> Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction périodique qui admet une limite en $+\infty$. Que peut-on dire de f ?

<u>**Correction exercice 8-103**</u>

Soit $T \in \mathbb{R}_+^*$ une période de f. On définit $l = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. On fixe $x_0 \in \mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f(x_0 + nT) = f(x_0)$. Comme x_0 est arbitrairement choisi, on conclut que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = l$. En d'autres termes, f est la fonction constante de valeur l.

<u>**Exercice 8-104**</u>

1. Soient $n \in \mathbb{N}$ un entier impair et, pour chaque $i \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$ a_i un réel. Montrer que l'équation $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$ admet au moins une solution réelle.
2. Donner un contre-exemple pour le cas où n est pair.

<u>**Correction exercice 8-104**</u>

1. *Preuve algébrique* : Pour tout $x \in \mathbb{C}$, les propriétés élémentaires de la conjugaison complexe et le fait que chaque coefficient a_i soit réel impliquent que $f(\overline{z}) = a_n\overline{z}^n + a_{n-1}\overline{z}^{n-1} + \ldots + a_1\overline{z} + a_0$. Par conséquent, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $f(\overline{z}) = 0$ si et seulement si $f(z) = 0$. Ainsi, le nombre de racines imaginaires de f est pair. L'hypothèse de l'exercice nous montre alors que f a au moins une racine réelle.
   Preuve analytique : Soit P un polynôme à coefficients réels de degré impair. On note $a_{2n+1}x^{2n+1}$ son terme de plus haut degré ($n \in \mathbb{N}$). Quitte à considérer $-P$, on peut toujours supposer a_{2n+1} strictement positif. On a alors $\lim\limits_{x\to-\infty} P(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} P(x) = +\infty$. De plus, P est continue sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynôme. Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $P(x) = 0$ a au moins une solution dans $\mathbb{R}$. Autrement dit, P admet au moins une racine dans $\mathbb{R}$. Le choix de P étant arbitraire, le résultat reste valable pour tout polynôme à coefficients réels de degré impair.
2. Voici un contrexemple bien simple : $x^2 + 1 = 0$.

<u>**Exercice 8-105**</u> Supposons que f est une fonction continue sur $[0, 1]$ et que $0 \leq f(x) \leq 1$ pour chaque $x \in [0, 1]$. Montrer qu'il existe un $c \in \mathbb{R}$ tel que $f(c) = c$.

<u>**Correction exercice 8-105**</u>

On considère la fonction g définie sur $[0; 1]$ par $g(x) = f(x) - x$. La fonction g est continue sur $[0; 1]$ avec $g(0) = f(0) \geq 0$ et $g(1) = f(1) - 1 \leq 0$. Donc par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $x_0 \in [0; 1]$ tel que $g(x_0) = 0$, soit $f(x_0) = x_0$.

Exercice 8-106 Étudier la continuité de la fonction $f : [-2, 2] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2 \sin(\pi/x)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$, sur le domaine de définition.

Correction exercice 8-106

f est continue en tout $x \in [-2, 2] \setminus \{0\}$ par des résultats généraux de cours puisque quand $x \neq 0$, f est composée de fonctions simples. Au point $x = 0$, $f(0) = 0$, et $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} x^2 \sin(\pi/x) = 0$ car la fonction sin est bornée. On déduit alors que f est continue.

Exercice 8-107 Étudier la continuité à gauche, la continuité à droite et la continuité en chaque point de son domaine de définition de la fonction : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = xE(1/x)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 1$, où E dénote la partie entière.

Correction exercice 8-107 On peut aussi écrire $f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x \leq -1 \\ 0 & \text{si } x > 1 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ nx & \text{si } \dfrac{1}{n+1} < x \leq \dfrac{1}{n}, \text{ où } n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1; 0\} \end{cases}$

En tant que fonctions affines, la fonction f est continue sur $]-\infty, -1[$, sur $]1, +\infty[$ et $\left]\dfrac{1}{n+1}, \dfrac{1}{n}\right[$, pour tout $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1, 0\}$.

De plus, pour tout $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1, 0\}$, $\lim\limits_{x\to \frac{1}{n}^-} f(x) = \lim\limits_{x\to \frac{1}{n}^-} nx = 1$ et $\lim\limits_{x\to \frac{1}{n}^+} f(x) = \lim\limits_{x\to \frac{1}{n}^+} (n-1)x = \dfrac{n-1}{n}$.

Donc, pour tout $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1, 0\}$, $\lim\limits_{x\to \frac{1}{n}^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to \frac{1}{n}^+} f(x)$, ce qui montre que f n'est pas continue en $\dfrac{1}{n}$, pour tout $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1, 0\}$. On déduit aussi de ces calculs que f est continue à gauche à chaque point $\dfrac{1}{n}$, $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1, 0\}$.

Ensuite, pour tout $x \neq 0$ on a $1/x \leq E(1/x) < 1/x + 1$. Si $x > 0$ alors $1 \leq xE(1/x) < 1 + x$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 1$. De même si $x < 0$ alors $1 + x < xE(1/x) \leq 1$ et $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 1$, ce qui montre que f est continue en 0.

Finalement, $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^-} -x = 1$ tandis que $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} -2x = 2$. Par conséquent, en -1 f n'est continue qu'à gauche.

Exercice 8-108 Déterminer les valeurs de $m \in \mathbb{R}$ pour lesquelles g_m définie par $g_m(x) = \begin{cases} x - m & \text{si } x \leq 3 \\ 1 - mx & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$ est une fonction continue.

Correction exercice 8-108

Débrouillez-vous !

Exercice 8-109 Quelles sont les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues dont l'image est contenue dans $\mathbb{Z}$? dans $\mathbb{Q}$?

Correction exercice 8-109

Si l'image est contenue dans $\mathbb{Z}$, alors f est une fonction constante à valeur entière. Ceci est une conséquence du théorème des valeurs intermédiaires et du fait évident qu'entre deux entiers distincts il existe des réels qui ne sont pas des entiers. Pour ce dernier constat, notons que si $m < n$ sont deux entiers distincts alors, $m + \dfrac{1}{2}$ est un rationnel non entier entre m et n.

Si l'image est contenue dans $\mathbb{Z}$, alors f est une fonction constante à valeur rationnelle. Démontrons cet énoncé. Par l'absurde, supposons que f soit une fonction continue, non constante et à valeurs dans $\mathbb{Q}$. Il existe donc deux points x et y tels que $f(x) \neq f(y)$. On utilise alors le résultat bien connu qu'entre deux nombres rationnels $a = f(x)$ et $b = f(y)$ distincts, on peut toujours trouver au moins un nombre irrationnel (par exemple $a + (b - a)/\sqrt{2}$). Par le théorème des valeurs intermédiaires, f atteint donc une valeur irrationnelle, ce qui est contradictoire.

Exercice 8-110 Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est bornée et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que $g \circ f$ et $f \circ g$ sont bornées.

Correction exercice 8-110

La composée $g \circ f$ est bornée parce que g est continue ; la composée $f \circ g$ est bornée parce que f est bornée. C'était un peu succinct comme réponse. C'est un bon exercice et une bonne révision de cours de fournir les détails.

Exercice 8-111 Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, f et g deux fonctions définies sur I.

1. Soit $a \in I$. Donner une raison pour laquelle :

$$(\lim_{x \to a} f(x) = f(a)) \Rightarrow (\lim_{x \to a} |f(x)| = |f(a)|)$$

2. En utilisant la question précédente, montrer que si f et g sont continues, alors $\sup(f, g) = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|)$ l'est aussi.

Réponse :

Pour le premier point, la raison est la continuité de la fonction valeur absolue : $x \mapsto |x|$. Le deuxième point en découle quitte à utiliser le fait la somme, respectivement la différence, de deux fonctions continues est continue.