Aires sous une droite

Sommaire

* Un autre logiciel de calcul formel peut être utilisé avec les mêmes énoncés, les fiches techniques devant être modifiées.

1. Fiche résumé

Titre : Aires sous une droite

Niveau : $1^{ère}$ S (versions 1 et 2) et 2^{nde} (Version 3 et 4)

Domaine :
Calcul littéral. Equation de droites. Equations du second degré (pouvant se ramener au premier degré par factorisation).
Pour les versions 1 et 2 : équations de cercles.

Logiciel : Logiciel de calcul formel : Xcas – avec géogébra pour la version 1.
Un autre logiciel de calcul formel est utilisé en version 4 : derive.

Durée : 2 h pour les versions 1 et 3
1 h pour les versions 2 et 4 avec en plus un travail préalable à la maison d'une demi-heure, respectivement un quart d'heure.

La version 4 sera expérimentée en classe.

Sommaire

2 Fiche professeur

2.1 analyse mathématique

Les versions 1 et 2 pour la classe de 1ère S mettent en jeu le problème dans sa forme la plus générale avec l'obtention d'une ellipse de centre I (a,b) d'axes parallèles aux axes de coordonnées et dont deux des sommets sont les points A(a,0) et B(0,b) donnés dans l'énoncé. La recherche du lieu du point D correspondant à des aires égales le triangle DHG et le OFDE conduit à une équation de l'ellipse et à partir de là à son équation réduite, ce qui permet de déterminer ses éléments caractéristiques.

Pour préciser, voici les coordonnées des points G et H : G (a - $\frac{a}{b}$ y ; y) et H (x, b - $\frac{b}{a}$ x).

L'aire du triangle HDG est la suivante, compte-tenu du fait que D est à l'intérieur du triangle OAB : $\frac{1}{2}$ (a - $\frac{a}{b}$ y – x)(b - $\frac{b}{a}$ x – y), cette aire est égale à celle du rectangle donc xy. On obtient ensuite l'équation réduite de l'ellipse.

2.2 Niveau

Classe : 1ere S ou 2nde (version 3)

Pré-requis :
En mathématique :
Calcul littéral : développer, factoriser.
Equations de droites, et en 1ère S équations de cercles.
Equations du second degré en 1ère S et en 2nde : équations du second degré se ramenant au premier degré.

En TICE :
Les fiches techniques permettent d'utiliser Xcas pour la première fois, mais comme elles sont données en dehors de l'énoncé, il est possible de ne pas les donner aux élèves qui ont déjà une expérience avec ce logiciel ou pour le cas où un autre logiciel de calcul formel serait utilisé.
Version 1 : il faut de plus savoir utiliser geogebra pour obtenir une figure dynamique avec utilisation de curseurs.

2.3 Objectifs

2.3.1 Objectifs en mathématiques

En 1ère S
- Déterminer une équation pour un lieu géométrique mettant en jeu plusieurs inconnues (ici deux paramètres a et b, et deux variables x et y les coordonnées de D).
- Réinvestir des méthodes de résolution d'équations du second degré.
- Faire un retour sur les équation de droites : recherche d'équations, points sur la droite.
- Faire un retour sur les équation de cercles.

En 2nde
- Réinvestir la notion d'équation de droites : savoir déterminer une équation, savoir trouver la deuxième coordonnée d'un point d'une droite connaissant la première, représentation graphique d'une droite d'équation donnée dépendant d'un paramètre.
- Effectuer des calculs littéraux.
- Résoudre des équations du second degré se ramenant au premier degré.
- Effectuer un retour sur le calcul de l'aire d'un triangle rectangle.

sommaire

2.3.2 objectifs instrumentaux

En 1ère S

Avec le logiciel Xcas.

- Savoir résoudre une équation dépendant d'un paramètre en le faisant varier.
- Savoir développer et réduire une expression.

- Savoir créer le graphique d'un courbe définie de manière implicite. (Version 2)

Avec le logiciel geogebra (Version 1).

- Effectuer un retour sur les constructions de géométrie dynamique et la mise en évidence d'un lieu géométrique.
- Effectuer une première approche pour l'écriture d'une instruction conditionnelle.

En 2nde

Avec le logiciel Xcas.

- Savoir résoudre une équation
- Savoir résoudre une famille d'équations dépendant d'un paramètre en le faisant varier.

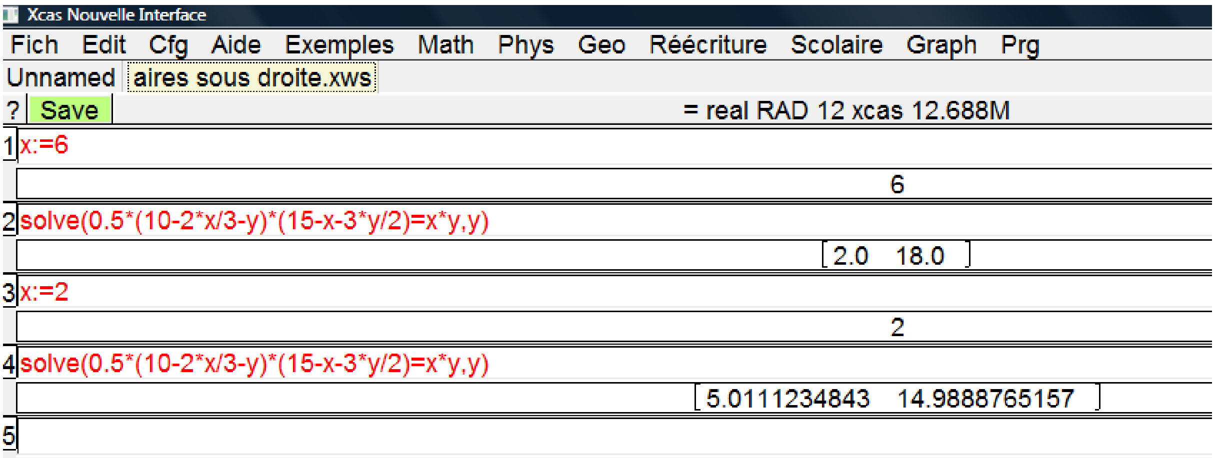
2.4 Scenario

2.4.1 Version 1

Partie 1

La première question de cette partie ne nécessite pas l'utilisation d'un logociel, elle peut être recherchée à la maison avant la séance en salle d'informatique.

Dans un cas particulier avec des valeurs numériques attribuées à a et b, les élèves font d'abord une étude graphique papier-crayon, point par point. Pour comprendre les raisonnements mis en œuvre. Ils effectuent eux-mêmes le calcul de l'ordonnée de D pour une abscisse de 6, et feront un balayage avec un pas de 1 pour x variant de 0 à 15 (a = 15, c'est la valeur maximale pour x) en utilisant le logiciel Xcas. Sur leur feuille, ils pourront dans ce cas particulier obtenir ainsi 16 points de la courbe cherchée, en un temps très bref, ce qui leur permet à la fois de prendre conscience des possibilités de Xcas et de s'approprier le problème posé en déterminant quelques solutions dans un cas particulier (voir la copie d'écran ci-dessous).

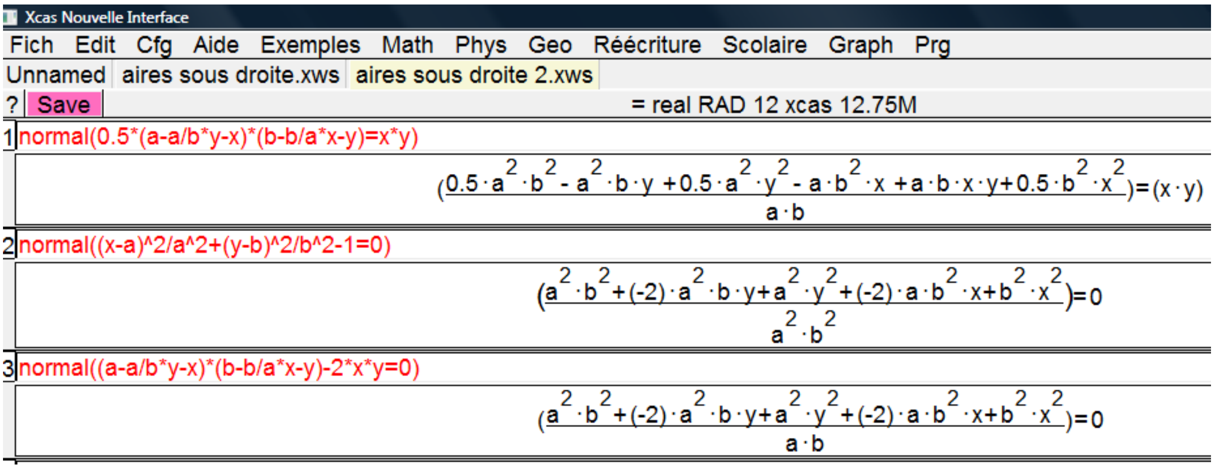


Partie 2

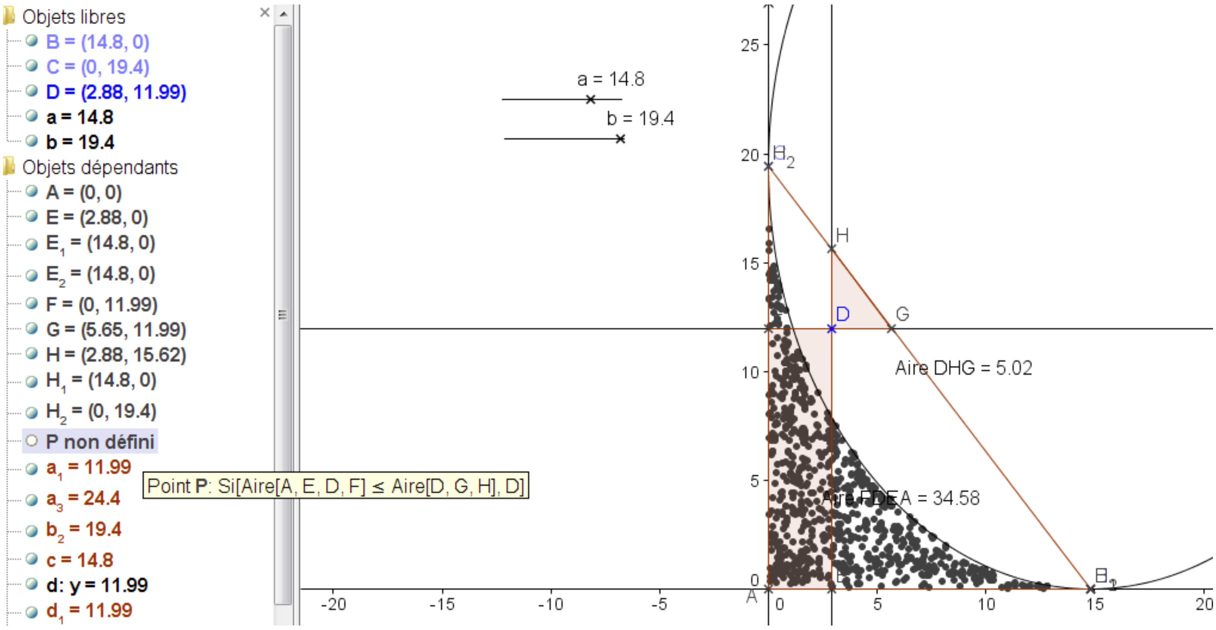
Dans le cas général pour a et b quelconques et pouvant varier (a et b étant définis comme des curseurs sous géogébra), les élèves pourront conjecturer le lieu de D de manière géométrique. Comme il n'est pas possible de définir ce lieu pour l'égalité des aires, on le définit un autre lieu tel que l'aire du rectangle soit inférieure ou égale à celle du triangle, le lieu cherché est la frontière de la zone noircie sous géogébra (voir copie d'écran ci-dessous).

sommaire

Partie 3
Il s'agit de déterminer une équation du lieu cherché en effectuant des calculs littéraux avec les inconnues a et b et les variables x et y. Le logiciel de calcul formel aide à la gestion de ces calculs délicats et permet de vérifier l'équivalence de cette équation avec l'équation réduite de l'ellipse.



En complétant le graphique sous geogebra, on observe que l'éllipse semble bien être une frontière de la zone noircie.



Partie 4

Sous geogebra, en modifiant les valeurs de a et de b, on peut émettre une conjecture pour les cas où on obtient un cercle.
La démonstration repose sur la reconnaissance de la forme d'une équation de cercle, même coefficient pour x^2 et y^2, par rapport à celle d'une équation d'ellipse différente d'un cercle. Trouver le centre et le rayon du cercle relève l'application directe du cours mais dans un contexte nouveau, un cercle étant considéré comme une ellipse particulière.

2.4.2 Version 2
Pour la partie 1, c'est le même scenario qu'en version 1.
Pour la partie 2, on retrouve la partie 3 de la version 1 mais le tracé de l'ellipse est fait sous Xcas et les élèves peuvent comparer l'allure de cette courbe avec les points solutions placés dans un repère sur leur feuille de papier.

sommaire

a:=15

15

b:=10

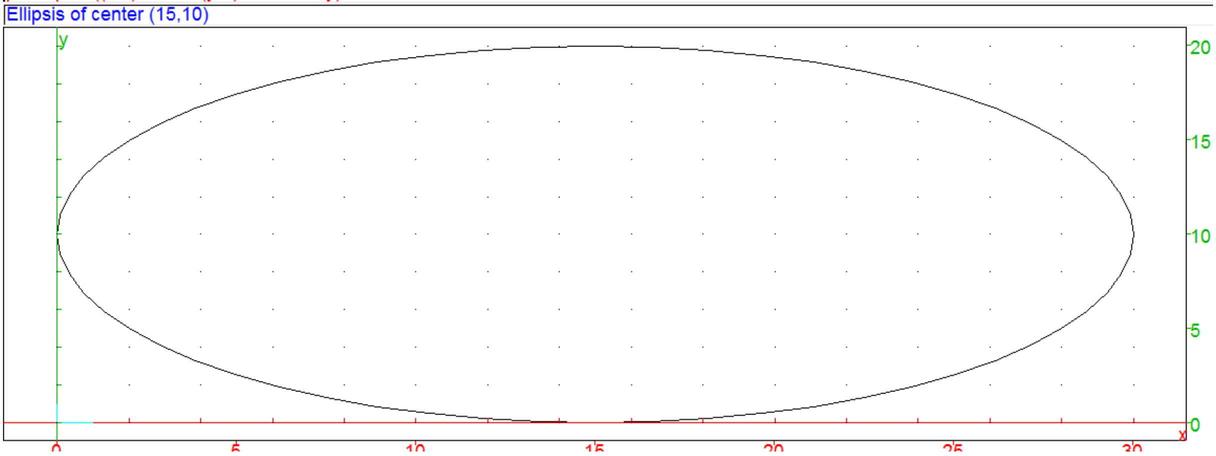
10

f:=(x-a)^2/a^2+(y-b)^2/b^2-1

$$\frac{(x-15)^2}{225}+\frac{(y-10)^2}{100}-1$$

plotimplicit((x-a)^2/a^2+(y-b)^2/b^2-1,x,y)

Ellipsis of center (15,10)



En partie 3, sous Xcas, les élèves peuvent modifier les valeurs de a et b et grâce au graphique, conjecturer dans quels cas on obtient un cercle (à condition de faire les réglages pour que le repère soit normé). Il est aussi possible de raisonner sur l'équation réduite de l'ellipse.

2.4.3 Version 3

Cette version et destinée à la classe de 2$^{\text{nde}}$ contrairement aux deux autres.

Partie 1

On trouve la solution particulière qui se situe sur la droite d'équation y = x. Le logiciel Xcas permet de trouver les solutions, il faudra ensuite donner une démonstration du résultat en factorisant la différence de deux carrés.

Partie 2

Des conjectures avec diverses valeurs de m et une reconnaissance attendue d'un quart de cercle.

1 solve(1/2*(5-2*x)^2=x^2, x)

$$\left[\left(\frac{1}{2}\right)\cdot(10+5\cdot\sqrt{2})\quad \left(\frac{1}{2}\right)\cdot(10-5\cdot\sqrt{2})\right]$$

2 evalf(1/2*(10+5*sqrt(2)))

8.53553390593

3 evalf(1/2*(10-5*sqrt(2)))

1.46446609407

4 m:=0

0

5 solve(1/2*(5-x-m*x)^2=m*x^2, x)

[5]

sommaire

3. Version 1

Avec utilisation du logiciel géogébra.

3.1 Fiche élève

Soit a et b deux réels positifs. Dans un repère orthonormé d'origine O, les points A et B sont déterminés par leurs coordonnées : A(a , 0) et B(0 , b).
Soit D un point situé à l'intérieur du triangle OAB.
La parallèle à l'axe des abscisses passant par D coupe chacun des segments : [OB] en E et [AB] en G.
La parallèle à l'axe des ordonnées passant par D coupe chacun des segments : [OA] en F et [AB] en H.
On recherche le lieu des points D tels que les aires du triangle DHG et du rectangle OFDE soient égales.

Partie 1. Recherche de quelques points de l'ensemble pour un exemple.
Dans cet exemple, a = 15 et b = 10 faire une figure sur feuille. On appelle (x , y) les coordonnées de D.
1. a. Ecrire une équation appelée (E) que doivent vérifier x et y pour que les aires du triangles DHG et du rectangle OFDE soient égales.
b. Déterminer les valeurs de y s'il y en a, lorsque x est égal à 6. S'il y a lieu, placer le (ou les) points obtenus.
2. Avec le logiciel Xcas, on veut trouver tous les points D solutions lorsque x varie de 0 à 15 avec un pas de 1.
a. Attribuer à x la valeur 6, puis résoudre l'équation (E) (si nécessaire, voir la fiche technique)
Vérifier le résultat de la question 1.b.
b. Attribuer à x successivement les valeurs de 0 à 10 avec un pas de 1, et résoudre l'équation obtenue et placer les points D solutions au fur et à mesure sur le dessin.

Partie 2. Etude géométrique
Faire la figure sous géogébra de telle sorte qu'on puisse faire varier les nombres a et b.
Mettre en évidence le lieu des points tels que l'aire du rectangle OFDE soit inférieure ou égale à celle du triangle DHG (voir fiche technique).
Quel semble être le lieu du point D lorsque les aires sont égales ?
Faire varier a et b, retrouver de manière approchée les résultats de la première partie.

Partie 3. Etude analytique : équation du lieu
Le couple des coordonnées de D est noté(x , y).
1. Exprimer les coordonnées de E, F, G et H en fonction de x, y, a et b.
2. Ecrire une équation (E1) traduisant l'égalité des aires étudiées.
3. En utilisant le logiciel Xcas, montrer que cette équation est équivalente à la suivante :

$$\frac{(x-a)^2}{a^2} + \frac{(y-b)^2}{b^2} - 1 = 0 \quad \text{(E2)}$$

(Voir fiche technique s'il y a lieu).
3. Compléter la figure effectuée sous géogébra avec la courbe représentative (c) d'équation (E2)
(Voir fiche technique s'il y a lieu). Y a-t-il une cohérence entre le graphique de la partie 2 effectué sous géogébra et les calculs effectués avec l'aide de Xcas dans la partie 3 ? Expliquer.

Partie 4. Le lieu peut-il être un arc de cercle ?
1. Conjecturer dans quels cas le lieu cherché est un arc de cercle.
2. Déterminer tous les cas où le lieu est un arc de cercle en faisant une démonstration. Déterminer le centre et le rayon - démontrer ces résultats.

sommaire

3.2 Fiche technique

Partie 1
Question 2. a.

Xcas.
Attention la virgule des nombres décimaux doit être écrite sous forme de point, et le symbole * doit figurer pour toutes les multiplications.

Ecrire successivement :
x :=6
solve(E, y)
où E désigne l'équation de la question 1.a.

Question 2. b.
Xcas. Remplacer successivement la valeur 6 attribuée à x par 0, 1, 2, 3 etc. et appuyer sur la touche « entrée » une première fois pour la valeur de x et une deuxième fois pour solve(E, y).

Partie 2
Géogébra. Pour obtenir le lieu des points tels que l'aire du rectangle OFDE soit inférieure ou égale à celle du triangle DHG, on définit le point P en inscrivant dans la barre de saisie (en bas de l'écran) :
P=Si[Aire[A, E, D, F] <= Aire[D, G, H], D]
C'est-à-dire que le point P est identique au point D lorque celui-ci convient et sinon P n'est pas défini.
Ensuite, il faut activer la trace de P et déplacer le point D.
Aspect pratique : lorsque cesse de déplacer D, il faut que ce point se trouve dans la zone qui n'est pas solution sinon il est ensuite difficile de le récupérer car le logiciel interroge pour savoir si on veut saisir D ou P.

Partie 3
Xcas. Pour développer des expressions, on pourra utiliser : normal(…) ce qui permet d'obtenir une expression développée et un peu simplifiée –alors que l'utilisation de expand(…) permet de développer mais sans aucune simplication.

Géogébra. Dans la barre de saisie, inscrire $C : \dfrac{(x-a)^2}{a^2} + \dfrac{(y-b)^2}{b^2} - 1 = 0.$

sommaire

4. Version 2

Sans utilisation de géogébra.
Une représentation graphique est obtenu sous Xcas, il n'y a pas de figure de géométrie dynamique.

4.1 Fiche élève

Soit a et b deux réels positifs. Dans un repère orthonormé d'origine O, les points A et B sont déterminés par leurs coordonnées : A(a , 0) et B(0 , b).
Soit D un point situé à l'intérieur du triangle OAB.
La parallèle à l'axe des abscisses passant par D coupe chacun des segments : [OB] en E et [AB] en G.
La parallèle à l'axe des ordonnées passant par D coupe chacun des segments : [OA] en F et [AB] en H.
On recherche le lieu des points D tels que les aires du triangle DHG et du rectangle OFDE soient égales.

Partie 1. Recherche de quelques points de l'ensemble pour un exemple.
Dans cet exemple, a = 15 et b = 10 faire une figure sur feuille. On appelle (x , y) les coordonnées de D.
1. a. Ecrire une équation appelée (E) que doivent vérifier x et y pour que les aires du triangles DHG et du rectangle OFDE soient égales.
b. Déterminer les valeurs de y s'il y en a, lorsque x est égal à 6. S'il y a lieu, placer le (ou les) points obtenus.
2. Avec le logiciel Xcas, on veut trouver tous les points D solutions lorsque x varie de 0 à 15 avec un pas de 1.
a. Attribuer à x la valeur 6, puis résoudre l'équation (E) (si nécessaire, voir fiche technique)
Vérifier le résultat de la question 1.b.
b. Attribuer à x successivement les valeurs de 0 à 10 avec un pas de 1, et résoudre l'équation obtenue et placer les points D solutions au fur et à mesure sur le dessin.

Partie 2. Etude analytique : équation du lieu
Le couple des coordonnées de D est noté(x , y).
1. Exprimer les coordonnées de E, F, G et H en fonction de x, y, a et b.
2. Ecrire une équation (E1) traduisant l'égalité des aires étudiées.
3. En utilisant le logiciel Xcas, montrer que cette équation est équivalente à la suivante :

$$\frac{(x-a)^2}{a^2} + \frac{(y-b)^2}{b^2} - 1 = 0 \quad \text{(E2)}$$

(Voir fiche technique s'il y a lieu).
4. Représenter graphiquement la courbe d'équation (E2) (si nécessaire, voir fiche technique).
Donner différentes valeurs à a et à b, puis comparer avec les résultats de la partie 1.

Partie 3. Le lieu peut-il être un arc de cercle ?
1. Conjecturer dans quels cas le lieu cherché est un arc de cercle.
2. Déterminer tous les cas où le lieu est un arc de cercle en faisant une démonstration. Déterminer le centre et le rayon - justifier ces résultats.

sommaire

4.2 Fiche technique Xcas

Partie 1
Question 2. a.
Ecrire successivement :
x :=6
solve(E, y)
où E désigne l'équation de la question 1.a.
Question 2. b.
Xcas. Remplacer successivement la valeur 6 attribuée à x par 0, 1, 2, 3 etc. et appuyer sur la touche « entrée » une première fois pour la valeur de x et une deuxième fois pour solve(E, y).

Partie 2

Question 3.

Pour développer des expressions, on pourra utiliser : normal(…) ce qui permet d'obtenir une expression développée et un peu simplifiée –alors que l'utilisation de expand(…) permet de développer mais sans aucune simplication.

Question 4.

Pour visualiser l'expression appelée e selon les valeurs de a et de b, il peut être intéressant de la définir de la manière suivante :

e:=(x-a)^2/a^2+(y-b)^2/b^2-1

Pour représenter graphiquement l'ensemble des points qui vérifient $\frac{(x-a)^2}{a^2} + \frac{(y-b)^2}{b^2} - 1 = 0$ en inscrivant ceci :

plotimplicit((x-a)^2/a^2+(y-b)^2/b^2-1,x,y)

La commande «plot» permet d'obtenir un graphique et de plus ici comme y n'est pas exprimé en fonction de x (il ne s'agit pas d'une fonction) il faut préciser dans ce cas « implicit ».

Partie 3

Si le graphique est utilisé, il est nécessaire de choisir la même unité sur chacun des axes. Pour cela utiliser le pavé de commande situé à droite du graphique.

sommaire

5. Version 3

Fiche élève

Dans un repère orthonormé d'origine O, les points A et B sont déterminés par leurs coordonnées : A(5,0) et B(0,5).

Partie 1

Le point D est situé à l'intérieur du triangle OAB et sur la droite d'équation $y = x$.
La parallèle à l'axe des abscisses passant par D coupe chacun des segments : [OB] en E et [AB] en G.
La parallèle à l'axe des ordonnées passant par D coupe chacun des segments : [OA] en F et [AB] en H.
On recherche comment placer le point D pour que les aires du triangle DHG et du rectangle OFDE soient égales.

1. On appelle x l'abscisse de D, écrire une équation (E) qui traduit le fait que les aires du triangle DHG et du rectangle OFDE soient égales.
2. A l'aide du logiciel Xcas, déterminer de manière exacte, puis approchée où placer le point D pour que les aires étudiées soient égales (voir fiche technique). Placer le point correspondant.
3. Quel est le degré de l'équation (E) ? De quelle manière peut-on la résoudre ? Montrer que cette équation peut s'écrire : $(5 – 2x)^2 – (\sqrt{2}\ x)^2$. Déteminer les valeurs exactes des solutions, comparer aux résultats donnés par le logiciel Xcas.

Partie 2

Le point D est maintenant situé sur la droite d'équation $y = m\ x$ où m est un réel pour lequel on choisira différentes valeurs par la suite.

1. Comment peut-on trouver les coordonnées des points G et H et la nouvelle équation (E) en modifiant les calculs précédents ? Donner ces coordonnées et la nouvelle équation.
2. Avec le logiciel Xcas, trouver les points D solutions lorsque m prend successivement les valeurs 0, 1, 2, 3, 4, 5. (Voir fiche technique). Pour chaque valeur de m, placer le point D solution, sur le graphique et la droite d'équation $y = m\ x$.
3. A quelle courbe semble appartenir les points D solutions ? Préciser ses caractéristiques.

Fiche technique

Partie 1

Le logiciel Xcas permet de résoudre des équations (c'est-à-dire ici de trouver les solutions pour l'inconnue x) de la manière suivante, on inscrit :
solve(E,x)
et au clavier on tape : entrée
(E désigne l'équation à résoudre).

Pour obtenir une valeur approchée : evalf()

Partie 2

Sous Xcas, pour résoudre l'équation (E) avec différentes valeurs de m de 0 à 5.
Commencer par m= 0.
Ecrire successivement :
m :=0
solve(E, x)
où E désigne l'équation comportant m.
Puis on remplacer successivement la valeur 0 attribuée à m par 1, 2, 3, 4, 5 et appuyer sur la touche « entrée » une première fois pour la valeur de m et une deuxième fois pour résoudre la nouvelle équation.
sommaire

6. Version 4

Dans un repère orthonormé d'origine O, les points A et B sont déterminés par leurs coordonnées :
A(5,0) et B(0,5).

Partie 1

Le point D est situé à l'intérieur du triangle OAB et sur la droite d'équation $y = x$.
La parallèle à l'axe des abscisses passant par D coupe chacun des segments : [OB] en E et [AB] en G.
La parallèle à l'axe des ordonnées passant par D coupe chacun des segments : [OA] en F et [AB] en H.
On recherche comment placer le point D pour que les aires du triangle DHG et du rectangle OFDE soient égales.

1. Faire le dessin sur une feuille (à la maison)
2. Construire la figure avec un logiciel de géométrie dynamique. Observer plusieurs endroits où on peut placer le point D pour obtenir que les aires en question soient égales (penser à faire afficher les coordonnées du point D), placer quelques uns de ces points en couleur sur votre feuille. Quels ont les emplacements « extrêmes » ? les placer sur la feuille.

Partie 2

4. On appelle x l'abscisse de D, écrire une équation (E) qui traduit le fait que les aires du triangle DHG et du rectangle OFDE soient égales.
5. A l'aide du logiciel Derive, déterminer de manière exacte, puis approchée l'endroit où placer le point D pour que les aires étudiées soient égales (voir fiche technique). Placer le point correspondant.
6. Quel est le degré de l'équation (E) ? De quelle manière peut-on la résoudre ? Montrer que cette équation peut s'écrire : $(5 - 2x)^2 - (\sqrt{2}\ x)^2 = 0$ et la résoudre (déteminer les valeurs exactes des solutions) sans l'aide de Derive. Vérifier à l'aide de Derive (utiliser « résoudre » et éventuellement « factoriser» pour le 1er membre).

Partie 3 (approfondissement)

Le point D est maintenant situé sur la droite d'équation $y = m\,x$ où m est un réel pour lequel on choisira différentes valeurs par la suite.

4. Comment peut-on trouver les coordonnées des points G et H et la nouvelle équation (E) en modifiant les calculs précédents ? Donner ces coordonnées et la nouvelle équation.
5. Résoudre cette équation avec le logiciel Derive, puis trouver les points D qui sont solution lorsque m prend successivement les valeurs 0, 1, 2, 3, 4, 5. Pour chaque valeur de m, placer le point D solution, sur le graphique et la droite d'équation $y = m\,x$.
6. A quelle courbe semble appartenir les points D solutions ? Préciser ses caractéristiques.

Fiche technique

Logiciel Derive :
Pour résoudre une équation, l'écrire dans la barre de saisie (en bas) puis cliquer sur le bouton « résoudre », puis expression, dans la fenêtre qui s'ouvre cliquer sur résoudre.

Avec le bouton « simplifier » on peut par simplifier (= basic), développer ou factoriser.

Pour effacer : la touche clavier « suppr » ou « del ».

sommaire