Préparation à l'agrégation interne de mathématiques - Année 2012-2013
Algèbre linéaire
Exercices - 11 juillet 2012

Le **lemme des noyaux** servira de motivation pour revoir et travailler les notions suivantes :
– somme et somme directe de sous-espaces vectoriels ;
– sous-espaces vectoriels supplémentaires ;
– sous-espaces stables d'un endomorphisme ;
– polynôme d'endomorphisme

Dasn le programme officiel, il s'agit principalement du début de l'item **5.7 Réduction des endomorphismes**. Les items **5.1**, **5.2** et **5.3** sont concernés également.
En annexe, un résumé de résultats d'algèbre linéaire. Je renvoie aux livres [Mon06], [Gri02] et [Gou94] pour plus de détails et de démonstrations.

On considère un corps (commutatif) $\mathbf{K}$ dont les éléments seront parfois appelés des *scalaires*.
Voici une version du théorème (ou lemme) de décomposition des noyaux :

Théorème 1. *Soient u un endomorphisme d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E et P élément de $\mathbf{K}[X]$ (un polynôme à coefficients dans $\mathbf{K}$).*
Si $P = P_1P_2\dots P_r$ est une décomposition de P avec $P_1, P_2, \dots, P_r$ des polynômes premiers entre eux deux à deux, alors :
$$\ker P(u) = \ker P_1(u) \oplus \ker P_2(u) \oplus \dots \oplus \ker P_r(u).$$

1 Sous-espaces, somme, somme directe, supplémentaires

Exercice 1. **Sous-espaces supplémentaires (1).**

Dans chacun des cas, répondre aux questions suivantes

(a) Les sous-ensembles V et W sont-ils des sous-espaces-vectoriels de E ?

(b) A-t-on $V + W = E$?

(c) Les sous-espaces V et W sont-ils en somme directe ?

(d) A-t-on $V \oplus W = E$?

1. *$E = \mathbf{K}[X]$, V est l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à 5, W est l'ensemble des polynômes nul ou de degré supérieur ou égal à 6.*
2. *E est l'ensemble des vecteurs de l'espace (usuel : à trois dimensions), V est un plan vectoriel, W est une droite vectorielle.*
3. *$E = \mathbf{R}^{\mathbf{R}}$ est l'ensemble des fonctions de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, V (resp. W) est l'ensemble des fonctions paires (resp. impaires).*
4. *$E = \mathbf{R}^I$ est l'ensemble des fonctions d'un intervalle I dans $\mathbf{R}$, V (resp. W) est l'ensemble des fonctions positives (resp. négatives) ou nulles.*
5. *E est l'ensemble des suites réelles convergentes, V (resp. W) est l'ensemble des suites admettant pour limite 0 (resp. des suites constantes).*

Exercice 2. **Espaces propres et somme directe.** *Soit f un endomorphisme d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E. On suppose que les r scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ sont des valeurs propres deux à deux distinctes. Justifier que les sous-espaces vectoriels $\ker(f - \lambda_k id)$ sont en somme directe.*

Exercice 3. **Sous-espaces supplémentaires (2).**

Déterminer un sous-espace supplémentaire de V dans E dans les cas suivants :

1. $E = \mathbf{R}_5[X]$, *et* $V = \{P \in E : X^2 + 3$ *divise* $P\}$
2. $E = \mathbf{R}^{\mathbf{R}}$ *et* $V = \{f \in E : f(0) = 0\}$
3. $E = \mathbf{R}^{[0;1]}$ *et* $V = \{f \in E : f(0) = f(1) = 0\}$

2 Sous-espaces stables

Soit f un endomorphisme d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E. On dit qu'un sous-espace vectoriel V de E est stable par f si $f(V) \subseteq V$.

Exercice 4.

1. *Vérifier que* $\{0\}$, E, $\ker f$ *et* $\operatorname{im} f$ *sont des sous-espaces stables par* f.
2. *Qu'est-ce qu'un sous-espace vectoriel de dimension* 1 *stable par* f *? Est-ce un espace propre pour* f *?*

Exercice 5. *Soit* f *un endomorphisme d'un* $\mathbf{K}$*-espace vectoriel* E *de dimension finie tel que* E *se décompose sous la forme* $E = E_1 \oplus E_2 \oplus E_3$ *avec* $f(E_i) \subseteq E_i$.
Décrire une « matrice simple » représentant l'endomorphisme f.

Exercice 6. **Vrai/Faux ?** *(On pourra exhiber une matrice comme contre-exemple.)*

Soit u *un endomorphisme d'un* $\mathbf{K}$*-espace vectoriel* E. *Ici « stable » signifiera « stable par* u *».*

1. *Si* F *est un sous-espace vectoriel stable alors tout supplémentaire de* F *est stable.*
2. *Si* F *est un sous-espace vectoriel stable alors il existe un supplémentaire de* F *qui est stable.*
3. *Si* F *est un sous-espace vectoriel stable alors tout sous-espace vectoriel de* F *est stable.*
4. *Si tout sous-espace vectoriel de* E *est stable alors* u *est une homothétie.*
5. *Si* F *et* G *sont des sous-espaces vectoriels stables alors* $F + G$ *est stable.*
6. *Si* F *et* G *sont des sous-espaces vectoriels stables alors* $F \cap G$ *est stable.*

3 Polynômes d'endomorphisme

Exercice 7. *Soient* u *un endomorphisme d'un* $\mathbf{K}$*-espace vectoriel* E *et* P *un polynôme à coefficients dans* $\mathbf{K}$.

1. *Justifier que les endomorphismes* $P(u)$ *et* u *commutent. En déduire que deux polynômes du même endomorphisme commutent.*
2. *Justifier que* $\ker P(u)$ *est un sous-espace vectoriel de* E *stable par* u.
3. *Qu'est-ce que* $\ker P(u)$ *si le polynôme* P *est de degré* 1 *?*

Exercice 8. **le morphisme $P \mapsto P(u)$**

Soit u *un endomorphisme d'un* $\mathbf{K}$*-espace vectoriel* E *de dimension finie* n. *On considère l'application*

$$\Psi_u \; : \; \mathbf{K}[X] \longrightarrow \mathcal{L}(E) \; : \; P \longmapsto P(u)$$

1. *Vérifier que cette application est un morphisme de* $\mathbf{K}$*-algèbres.*
2. *Pourquoi son image (notée* $\mathbf{K}[u]$*) est-elle une sous-algèbre commutative de* $\mathcal{L}(E)$ *? En déduire la non-surjectivité de* Ψ_u *si* $n \geqslant 2$.

3. *Justifier par un argument de dimension que l'application Ψ_u n'est pas injective. Quels polynômes appartiennent à $\ker(\Psi_u)$?*
4. *Soient P un polynôme annulateur de u (un polynôme appartenant à $\ker(\Psi_u)$) et λ une valeur propre de u. Justifier que $P(\lambda) = 0$.*

Exercice 9. *Soit u un endomorphisme d'un $\mathbf{R}$-espace vectoriel E tel que $u^2 + u - 6id = 0$ dans $\mathcal{L}(E)$.*
Démontrer l'égalité $E = \ker(u - 2id) \oplus \ker(u + 3id)$.

Exercice 10. **Critère de diagonalisibilité**

Démontrer le critère suivant : un endomorphisme u d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E de dimension finie est diagonalisable sur $\mathbf{K}$ si et seulement si il existe un polynôme P de $\mathbf{K}[X]$ scindé, à racines simples et tel que $P(u) = 0$.

Exercice 11. **Projecteurs et symétries** *Soit E un espace vectoriel (sur un corps $\mathbf{K}$ de caractéristique différente de 2).*

1. *Un endomorphisme p de E est appelé* projecteur *s'il vérifie $p^2 (= p \circ p) = p$ dans $\mathcal{L}(E)$.*
   (a) *Démontrer que p de E est un projecteur si et seulement si $E = \ker p \oplus \ker(p - id)$.*
   (b) *Démontrer que p de E est un projecteur si et seulement si $\operatorname{im} p = \ker(p - id)$.*
2. *Un endomorphisme s de E est appelé* symétrie *s'il vérifie $s^2 (= s \circ s) = id$ dans $\mathcal{L}(E)$.*
   (a) *Démontrer que s est une symétrie si et seulement si $E = \ker(s + id) \oplus \ker(s - id)$.*
   (b) *Démontrer que s est une symétrie si et seulement si l'endomorphisme $p = \frac{1}{2}(s + id)$ est un projecteur.*

Exercice 12. **Matrices de permutation** *Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.*

À tout élément σ du groupe $\mathcal{S}_n$ des permutations de l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$, on associe la matrice $S_\sigma = (s_{ij})$ avec $s_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = \sigma(j) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

1. *On note $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbf{K}^n$. Vérifier que $S_\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)}$ pour tout indice i.*
2. *Vérifier l'égalité $S_{\sigma \circ \tau} = S_\sigma . S_\tau$ pour toutes permutations σ et τ.*
3. *En déduire que l'application*
$$\mathcal{S}_n \longrightarrow GL(n; \mathbf{Z}) \, : \, \sigma \longmapsto S_\sigma$$
   est un morphisme injectif de groupes.
4. *Justifier que 1 est valeur propre de toute matrice de permutation.*
5. *Justifier que les valeurs propres d'une matrice de permutation sont des racines de l'unité.*
6. *Justifier que toute matrice de permutation est diagonalisable sur $\mathbf{C}$.*
7. *Justifier que les matrices de permutation diagonalisables sur $\mathbf{R}$ représentent une symétrie.*
8. *Exemple avec $n = 5$: soit A la matrice de permutation associée à*
$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix} = (1, 2)(3, 4, 5)$$
   Déterminer un polynôme annulateur simple de A. Comparer avec le polynôme caractéristique et le polynôme minimal.

Références

[Gou94] Xavier Gourdon. *Algèbre*. Les maths en tête. Ellipses, Paris, 1994.

[Gri02] Joseph Grifone. *Algèbre linéaire*. Cépaduès-Éditions, Toulouse, 2002.

[Mon06] Jean-Marie Monier. *Algèbre MPSI, Cours, méthodes et exercices corrigés, 4^{e}édition*. J'intègre. Dunod, Paris, 2006.

Préparation à l'agrégation interne de mathématiques - Année 2012-2013
Algèbre linéaire - Annexe - Résumé de résultats

Je renvoie aux livres [Mon06], [Gri02] et [Gou94] pour plus de détails et de démonstrations (en particulier la définition de (sous)-espace vectoriel).

On considère un corps (commutatif) $\mathbf{K}$ dont les éléments seront parfois appelés des *scalaires*.

1 Algèbre linéaire «statique» : espaces vectoriels

Une liste de définitions/vocabulaires :

1. L'intersection d'un nombre quelconque de sous-espaces vectoriels de E est un sous-espace vectoriel de E.
2. Si A est un sous-ensemble quelconque de E, alors $Vect(A) = \bigcap_{\substack{F \text{ sev de } E \\ A \subseteq F}} F$ est le plus petit sous-espace vectoriel contenant A, c'est le *sous-espace vectoriel engendré* par A.
3. Si $F_1, \ldots, F_r$ sont des sous-espaces vectoriels de E, la somme $F_1 + \ldots + F_r$ est l'ensemble des vecteurs de la forme $v_1 + \ldots + v_r$ avec v_k dans F_k.

Définition 1.1 (**somme directe, supplémentaires**).
Soient E un sous-espace vectoriel et $F_1, \ldots, F_r$ des sous-espaces vectoriels de E.

1. *On dit que $F_1, \ldots, F_r$ sont en* somme directe *si $F_k \cap \left(F_1 + \ldots + \widehat{F_k} + \ldots + F_r\right) = 0_E$ pour tout indice $k = 1, \ldots, r$.*
Leur somme peut alors être notée $F_1 \oplus \ldots \oplus F_r$.
2. *Deux sous-espaces vectoriels F et F' sont* supplémentaires *dans E si $E = F \oplus F'$ (c'est-à-dire $F + F' = E$ et $F \cap F' = \{0\}$).*

Définition 1.2. *S'il existe un ensemble fini A tel que $Vect(A) = E$, on dit que E est de* dimension finie *et dans ce cas, le nombre minimal d'éléments d'une telle partie A est la* dimension *de E.*

Propriété 1.1. *Si F et F' sont deux sous-espaces vectoriels de dimension finie d'un espace vectoriel :*

$$\dim(F + F') = \dim(F) + \dim(F') - \dim(F \cap F').$$

Définition 1.3 (**famille libre, génératrice, base, coordonnées, rang**).
Soient E un espace vectoriel et $\mathcal{F} = \{v_i\}_{i \in I}$ une famille (indexée sur l'ensemble I) de vecteurs de E.

1. *La famille $\mathcal{F}$ est* libre *si «toute combinaison linéaire finie et nulle d'éléments de $\mathcal{F}$ est triviale» : pour tout entier non nul r,*

$$\sum_{k=1}^{r} \lambda_k v_{i_k} = 0_E \Longrightarrow \lambda_1 = \ldots = \lambda_r = 0_{\mathbf{K}}.$$

(De manière équivalente, la famille $\{Vect(v_i)\}_{i \in I}$ de sous-espaces vectoriels est en somme directe.)

2. *La famille $\mathcal{F}$ est* génératrice *si «tout élément de E est une combinaison linéaire finie d'éléments de $\mathcal{F}$» : pour tout v dans E, il existe r, $i_1, \ldots, i_r$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ tels que*

$$v = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k v_{i_k} = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_r v_r.$$

(De manière équivalente, E est la somme vectorielle de la famille $\{Vect(v_i)\}_{i \in I}$.)

3. *La famille $\mathcal{F}$ est une* base *de E si «tout élément non nul de E s'écrit de manière unique comme une combinaison linéaire finie d'éléments de $\mathcal{F}$» : pour tout v non nul dans E, il existe r, $i_1, \ldots, i_r$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ uniques tels que*

$$v = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k v_{i_k} = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_r v_r.$$

(De manière équivalente, $E = \bigoplus_{i \in I} Vect(v_i)$.)

4. *Si $Vect(\mathcal{F})$ est de dimension finie, alors le* rang *de la famille $\mathcal{F}$ est $\mathrm{rg}(\mathcal{F}) = \dim Vect(\mathcal{F})$.*
5. *Si E est de dimension finie et $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ est une base de E, alors l'unique décomposition $v = x_1 v_1 + \ldots + x_n v_n$ définit les* coordonnées *$(x_1, \ldots, x_n)$ de v dans la base $\mathcal{B}$.*

Propriété 1.2. *Soit E un espace vectoriel (non trivial).*

1. *Il existe une base de E.*
2. *Si une base est finie, toute autre base est de même cardinal (égal à $\dim(E)$).*
3. *(a) (théorème de la base incomplète) Toute famille libre peut être complétée en une base.*

   (b) (existence d'un supplémentaire) Tout sous-espace vectoriel admet un supplémentaire.
4. *De toute famille génératrice, on peut extraire une base.*
5. *Si E est de dimension finie n et $\mathcal{F} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ est une famille de E, alors on a :*

$$\mathcal{F} \text{ est libre} \Leftrightarrow \mathcal{F} \text{ est une base} \Leftrightarrow \mathcal{F} \text{ est génératrice.}$$

2 Algèbre linéaire «dynamique» : applications linéaires

Définition 2.1. *Une application $u : E \longrightarrow F$ entre deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels E et F est* linéaire *($\mathbf{K}$-linéaire précisément) si*

$$u(x + \lambda y) = u(x) + \lambda u(y) \quad \text{pour tous } x, y \in E,\ \lambda \in \mathbf{K}.$$

L'ensemble des applications linéaires de E dans F est noté $\mathcal{L}(E; F)$.

Une application linéaire u de $\mathcal{L}(E; F)$ est complètement déterminée par les (coordonnées dans une base de F des) images des vecteurs d'une base de E.
Ces données constituent la *matrice* de u dans les bases concernées.

Propriété 2.1. *Soit u appartenant à $\mathcal{L}(E; F)$*

1. *L'image (directe) $u(V) = \{u(x) : x \in E\}$ d'un sous-espace vectoriel V de E est un sous-espace vectoriel de F.*
2. *L'image réciproque $u^{-1}(W) = \{x \in E : u(x) \in W\}$ d'un sous-espace vectoriel W de F est un sous-espace vectoriel de E.*
3. *(le «miracle») Si u est bijective, l'application réciproque $u^{-1} : F \longrightarrow E$ est linéaire.*

Cas particuliers :

Définition 2.2 (image, rang, noyau).

1. *L'*image *de u est le sous-espace vectoriel $\mathrm{im}\, u = u(E)$ de F.*
2. *Le* rang *de u est la dimension (si finie) de cette image : $\mathrm{rg}(u) = \dim(\mathrm{im}\, u)$.*
3. *Le* noyau *de u est le sous-espace vectoriel $\ker u = u^{-1}(\{0_F\})$ de E.*

Théorème 2 (du rang). *Soit u une application linéaire de E dans F avec E* **de dimension finie**. *Alors*

$$\dim(E) = \mathrm{rg}(u) + \dim \ker(u).$$

Schéma récapitulatif des conditions d'injectivité, de surjectivité, de bijectivité :
Attention aux conditions qui ne sont valables qu'en dimension finie.
Les conditions sur le déterminant et les mineurs ne sont pas indiquées.

<table>
<tr><td>$u \in \mathcal{L}(E;F)$</td><td>image d'une base de E</td><td>image/rang</td><td>noyau</td></tr>
<tr><td>injective</td><td>famille libre de F</td><td>$\mathrm{rg}(u) = \dim(E)$</td><td>$\ker(u) = \{0_E\}$</td></tr>
<tr><td>surjective</td><td>famille génératrice de F</td><td>$\mathrm{im}(u) = F$
$(\Leftrightarrow \mathrm{rg}(u) = \dim(F))$</td><td>$\dim \ker(u) = \dim(E) - \dim(F)$</td></tr>
<tr><td>bijective</td><td>base de F</td><td colspan="2">(2 sur 3) $\left\{\begin{array}{l}\ker(u) = \{0_E\}\\ \mathrm{im}(u) = F \ (\Leftrightarrow \mathrm{rg}(u) = \dim(F))\\ \dim(E) = \dim(F)\end{array}\right.$</td></tr>
</table>

Nomenclature des morphismes d'espaces vectoriels :

$u \in \mathcal{L}(E;F)$	E, F quelconques	$E = F$
quelconque	application linéaire	**endomorphisme**
bijective $\left(\begin{array}{c}\Leftrightarrow \text{injective}\\ \Leftrightarrow \text{surjective}\\ \text{en dim finie}\end{array}\right)$	**isomorphisme**	**automorphisme**

L'ensemble $\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(E;E)$ des endomorphismes d'un espace vectoriel E est (avec la conjugaison) une $\mathbf{K}$-algèbre (non commutative si $\dim(E) \geqslant 2$).
L'ensemble des automorphismes d'un espace vectoriel E forme (pour la conjugaison) le *groupe linéaire* $GL(E)$ dont l'élément neutre est id_E.

Références

[Gou94] Xavier Gourdon. *Algèbre*. Les maths en tête. Ellipses, Paris, 1994.

[Gri02] Joseph Grifone. *Algèbre linéaire*. Cépaduès-Éditions, Toulouse, 2002.

[Mon06] Jean-Marie Monier. *Algèbre MPSI, Cours, méthodes et exercices corrigés, 4^{e}édition*. J'intègre. Dunod, Paris, 2006.