Préparation à l'agrégation interne de mathématiques - Année 2012-2013
Algèbre linéaire
Éléments de correction des exercices - 11 juillet 2012

1 Sous-espaces, somme, somme directe, supplémentaires

Exercice 1. **Sous-espaces supplémentaires (1).**

Correction.

1. V est un sous-espace vectoriel mais W n'en est pas un : $(X^6+1)-(X^6) \notin W$.
2. On a $V \oplus W = E$ si et seulement si la droite vectorielle W n'est pas incluse dans le plan vectoriel V.
3. On a bien la décomposition $\mathbf{R}^{\mathbf{R}} = V \oplus W$: toute fonction s'écrit de manière unique comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire. L'égalité
$$f(x) = \underbrace{\frac{1}{2}\left(f(x)+f(-x)\right)}_{paire} + \underbrace{\frac{1}{2}\left(f(x)-f(-x)\right)}_{impaire}$$
est la seule possible.
4. L'ensemble des fonctions positives (resp. négatives) ne forme pas un sous-espace vectoriel. (L'égalité $E = V + W$ est correcte cependant : toute fonction est bien la somme d'une fonction positive et d'une fonction négative, sans qu'il y ait unicité d'autre part.)
5. Les ensembles V et W sont bien des sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.
Étude : si $(u_n)_n$ converge vers le réel ℓ, la suite $(v_n)_n$ définie par $v_n = u_n - \ell$ et la suite $(w_n)_n$ constante égale à ℓ conviennent pour écrire u = v + w. La somme est directe car $V \cap W = \{0\}$.

Exercice 2. **Espaces propres et somme directe.**

Soit f un endomorphisme d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E. On suppose que les r scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ sont des valeurs propres deux à deux distinctes. Justifier que les sous-espaces vectoriels $\ker(f - \lambda_k id)$ *sont en somme directe.*

Correction. Notons $E_k = \ker(f - \lambda_k id)$ les espaces propres et démontrons la propriété par récurrence sur l'entier r

- Si $r = 2$ et $x \in E_1 \cap E_2$, alors $\lambda_1 x = f(x) = \lambda_2 x$ avec $\lambda_1 \neq \lambda_2$ donc $x = 0$. Ainsi E_1 et E_2 sont en somme directe.
- Supposons la propriété vraie au rang r. Si x est un vecteur appartenant à
$$E_k \cap \left(E_1 + \ldots + \widehat{E_k} + \ldots + E_{r+1}\right)$$
pour un certain entier k compris entre 1 et $r+1$ alors $x = x_k = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{r+1} x_i$ avec $x_i \in E_i$.
En utilisant la linéarité et la définition des sous-espaces E_i, on obtient :
$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{r+1} \lambda_k x_i = \lambda_k x = f(x) = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{r+1} f(x_i) = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{r+1} \lambda_i x_i \quad \text{c'est-à-dire} \quad \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{r+1} (\lambda_i - \lambda_k) x_i = 0$$
ce qui, par hypothèse de récurrence, implique $(\lambda_i - \lambda_k)x_i = 0$ et donc $x_i = 0$ pour tout indice $i \neq k$. Ainsi $x = 0$.

Exercice 3. **Sous-espaces supplémentaires (2).**

Correction.

1. Dans $E = \mathbf{R}_5[X]$, $V = \{P \in E : X^2 + 3 \text{ divise } P\}$ admet (par exemple) pour supplémentaire $W = \{P \in E : deg(P) \leqslant 1\} \simeq \mathbf{R}_1[X]$ (l'ensemble des restes possibles dans la division euclidienne par $X^2 + 3$).
2. Dans $E = \mathbf{R}^{\mathbf{R}}$, $V = \{f \in E : f(0) = 0\}$ admet (par exemple) pour supplémentaire $W = \{f \in E : f \text{ est constante}\}$ ou $W' = \{f \in E : f(x) = \lambda e^x, \lambda \in \mathbf{R}\}$ ou n'importe quelle droite vectorielle constituée (à part l'origine) de fonctions ne s'annulant pas en 0.
3. Dans $E = \mathbf{R}^{[0;1]}$, $V = \{f \in E : f(0) = f(1) = 0\}$ admet (par exemple) pour supplémentaire le sous-espace W des fonctions affines car, pour toute fonction f, la fonction affine $g : x \mapsto (f(1) - f(0))\, x + f(0)$ est affine et telle que $f - g$ appartient à V.

2 Sous-espaces stables

Exercice 4.

Correction.

1. $f(\{0\}) = \{0\}$, $f(E) \subseteq E$, $f(\ker f) = \{0\} \subseteq \ker f$ et $f(\operatorname{im} f) \subseteq f(E) = \operatorname{im} f$
2. Un sous-espace vectoriel de dimension 1 stable par f est une droite engendrée par un vecteur propre de f. Un espace propre pour f peut être « plus gros ».

Exercice 5. *Soit f un endomorphisme d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E de dimension finie tel que E se décompose sous la forme $E = E_1 \oplus E_2 \oplus E_3$ avec $f(E_i) \subseteq E_i$.*

Correction. L'endomorphisme f peut être représenté par une matrice diagonale par blocs :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & A_3 \end{pmatrix}$$

avec $A_i = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_i}(f|_{E_i})$ et $\mathcal{B}$ la réunion (ordonnée) des bases $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ et $\mathcal{B}_3$.

Exercice 6. **Vrai/Faux ?**

Correction.

1. Faux : considérer $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $F = Vect(e_1)$ et $F' = Vect(e_2)$.
2. Faux : considérer $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$: $F = Vect(e_1)$ est le seul sous-espace non trivial stable.
3. Faux : considérer $F = E$ ou bien une rotation de l'espace euclidien tridimensionnel.
4. Vrai. Si toute droite vectorielle de E est stable alors quel que soit le vecteur non nul x, il existe un scalaire λ_x tel que $u(x) = \lambda_x.x$.
   - L'égalité $\lambda_x = \lambda_y$ est évidente si x et y sont colinéaires.
   - Si x et y ne sont pas colinéaires, la famille $\{x, y\}$ est libre donc les égalités
   $$\lambda_{x+y}.x + \lambda_{x+y}.y = \lambda_{x+y}.(x + y) = u(x + y) = u(x) + u(y) = \lambda_x.x + \lambda_y.y$$
   montrent que $\lambda_x = \lambda_{x+y} = \lambda_y$.

   L'unicité de λ signifie que u est une homothétie.
5. Vrai. Si F et G sont stables alors $u(F + G) \subseteq u(F) + u(G) \subseteq F + G$.
6. Vrai. Si F et G sont stables alors $u(F \cap G) \subseteq u(F) \subseteq F$ et $u(F \cap G) \subseteq u(G) \subseteq G$.

3 Polynômes d'endomorphisme

Exercice 7. *Soient u un endomorphisme d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E et P un polynôme à coefficients dans $\mathbf{K}$.*

Correction.

1. L'endomorphisme u commute avec lui-même, avec ses itérés ($u^2 = u \circ u$) et avec les combinaisons linéaires de ceux-ci donc avec tout endomorphisme $P(u)$ polynomial en u. De même avec $P(u)$ et $Q(u)$.
2. Comme tout noyau d'endomorphisme $\ker P(u)$ est un sous-espace vectoriel de E. Si x est un vecteur de $\ker P(u)$, alors $u(x)$ vérifie $P(u)(u(x)) = (P(u) \circ u)(x) = (u \circ P(u))(x) = u(0_E) = 0_E$.
3. Si P est de degré 1, alors $P(X) = aX + b = a(X - \lambda)$ ($a \neq 0$) donc $P(u) = a(u - \lambda id)$ et $\ker P(u) = \ker(u - \lambda id)$ est réduit à $\{0_E\}$ ou bien l'espace propre associé à la valeur propre λ.

Exercice 8. **le morphisme $P \mapsto P(u)$**

Soit u un endomorphisme d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E de dimension finie n. On considère l'application

$$\Psi_u \;:\; \mathbf{K}[X] \longrightarrow \mathcal{L}(E) \;:\; P \longmapsto P(u)$$

Correction.

1. Morphisme de $\mathbf{K}$-algèbres (morphisme d'*évaluation*).
2. L'image $\mathbf{K}[u]$ est une sous-algèbre commutative de $\mathcal{L}(E)$ car deux endomorphismes polynomiaux en u commutent (exercice précédent).
   Si $n \geqslant 2$, l'algèbre $\mathcal{L}(E)$ n'est pas commutative (considérer deux endomorphismes représentés par les matrices $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$). Donc $\mathbf{K}[u] \subsetneq \mathcal{L}(E)$.
3. En tant que $\mathbf{K}$-espace vectoriel, $\mathcal{L}(E)$ est de dimension n^2 tandis que $\mathbf{K}[X]$ est de dimension infinie donc l'application Ψ_u n'est pas injective.
   Cet argument de dimension montre qu'il existe un polynôme P de degré au plus n^2 dont l'image $P(u)$ est l'endomorphisme nul.
   Mais le théorème de Cayley-Hamilton assure que le *polynôme caractéristique* $\chi_u = \det(Xid - u)$ de u (de degré n) est aussi un polynôme annulateur.
   En fait $\ker(\Psi_u)$ est un idéal non réduit à $\{0\}$ de l'*anneau principal* $\mathbf{K}[X]$. Cet idéal est engendré par un unique polynôme unitaire : le *polynôme minimal* μ_u de u. Les polynômes annulateurs de u sont les multiples de ce polynôme minimalμ_u.
4. Par hypothèse il existe un vecteur non nul x tel quel $u(x) = \lambda x$. On a alors (avec $P = \sum a_k X^k$ somme finie d'indices entiers naturels)

   $$0_E = 0_{\mathcal{L}(E)}(x) = P(u)(x) = \left(\sum a_k u^k\right)(x) = \sum a_k u^k(x) = \sum a_k \lambda^k x = P(\lambda)x$$

   donc $P(\lambda) = 0_{\mathbf{K}}$.

Exercice 9. *Soit u un endomorphisme d'un $\mathbf{R}$-espace vectoriel E tel que $u^2 + u - 6id = 0$ dans $\mathcal{L}(E)$.*
Démontrer l'égalité $E = \ker(u - 2id) \oplus \ker(u + 3id)$.

Correction. On peut effectuer une démonstration « directe » en décomposant tout vecteur x : $x = \frac{1}{5}(u(x) + 3x) + \frac{1}{5}(-u(x) + 2x)$.
Le lemme des noyaux s'applique car $X^2 + X - 6 = (X - 2)(X + 3)$ avec $X - 2$ et $X + 3$ premiers entre eux.

Exercice 10. **Critère de diagonalisibilité**

Correction.

- S'il existe $P = (X - \lambda_1) \dots (X - \lambda_r)$ scindé à racines simples tel que $P(u) = 0$, alors le lemme des noyaux implique la décomposition
$$E = \ker P(u) = \ker(u - \lambda_1 id) \oplus \dots \oplus \ker(u - \lambda_r id)$$
qui justifie l'existence d'une base de vecteurs propres.
- Réciproquement supposons que, dans une certaine base $\mathcal{B}$ de E, la matrice M de u est diagonale : $M = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u) = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Alors le polynôme unitaire admettant pour racines les valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ **comptées sans multiplicité** convient car $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(P(u)) = P(M) = diag(P(\lambda_1), \dots, P(\lambda_n)) = diag(0_{\mathbf{K}}, \dots, 0_{\mathbf{K}}) = 0_{\mathcal{M}(n,\mathbf{K})}$.

Exercice 11. **Projecteurs et symétries** *Soit E un espace vectoriel (sur un corps $\mathbf{K}$ de caractéristique différente de 2).*

Correction.

1. Un endomorphisme p de E est appelé *projecteur* s'il vérifie $p^2 (= p \circ p) = p$ dans $\mathcal{L}(E)$.
   (a) – Si $E = \ker p \oplus \ker(p - id)$, la relation $p^2 = p$ se vérifie simplement : tout vecteur v de E se décompose (de manière unique) sous la forme $v = x + y$ avec $x \in \ker p$ et $y \in \ker(p - id)$ donc
   $$p(v) = p(x+y) = p(x) + p(y) = 0 + y = y \quad \text{et} \quad p^2(v) = p(p(v)) = p(y) = y = p(v).$$
   – Réciproquement, si $p^2 = p$, alors le polynôme $X^2 - X = X(X-1)$ annule p donc, d'après le lemme des noyaux (X et $X - 1$ sont premiers entre eux), on a $E = \ker p \oplus \ker(p - id)$.
   (b) L'inclusion $\ker(p - id) \subseteq \operatorname{im} p$ est vérifiée pour tout endomorphisme.
   – Si p est un projecteur, l'inclusion contraire est vérifiée car tout élément $v = p(x)$ de $\operatorname{im} p$ vérifie alors $(p - id)(v) = p(v) - v = p^2(x) - p(x) = 0$.
   – Réciproquement, si $\ker(p - id) = \operatorname{im} p$ alors, pour tout v de E, on a $p(v) \in \operatorname{im} p = \ker(p - id)$ donc $(p - id)(p(v)) = 0$ c'est-à-dire $p^2(v) = p(v)$.
2. Un endomorphisme s de E est appelé *symétrie* s'il vérifie $s^2 (= s \circ s) = id$ dans $\mathcal{L}(E)$.
   (a) – Si $E = \ker(s + id) \oplus \ker(s - id)$, la relation $s^2 = id$ se vérifie simplement : tout vecteur v de E se décompose (de manière unique) sous la forme $v = x + y$ avec $x \in \ker(s + id)$ et $y \in \ker(s - id)$ donc
   $$s(v) = s(x+y) = s(x)+s(y) = -x+y \quad \text{et} \quad s^2(v) = s(-x+y) = s(-x)+s(y) = x+y = v.$$
   – Réciproquement, si $s^2 = id$, alors le polynôme $X^2 - 1 = (X+1)(X-1)$ annule s donc, d'après le lemme des noyaux ($X + 1$ et $X - 1$ sont premiers entre eux), on a $E = \ker(s + id) \oplus \ker(s - id)$.
   (b) Puisque tout endomorphisme s commute avec id, on a $(s + id)^2 = s^2 + 2s + id$.
   – Si $s^2 = id$, alors $p = \frac{1}{2}(s + id)$ vérifie
   $$p^2 = \left(\frac{1}{2}(s + id)\right)^2 = \frac{1}{4}(s^2 + 2s + id) = \frac{1}{4}(id + 2s + id) = \frac{1}{2}(s + id) = p.$$
   – Si $p = \frac{1}{2}(s + id)$ est un projecteur, alors $p^2 = p$ donc $\frac{1}{4}(s^2 + 2s + id) = \frac{1}{2}(s + id)$ d'où $s^2 + 2s + id = 2(s + id)$ qui se simplifie en $s^2 = id$.

Exercice 12. **Matrices de permutation** *Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.*

À tout élément σ du groupe $\mathcal{S}_n$ des permutations de l'ensemble $\{1, \dots, n\}$, on associe la matrice $S_\sigma = (s_{ij})$ avec $s_{ij} = \begin{cases} 1 & si\ i = \sigma(j) \\ 0 & sinon \end{cases}$.

Correction.

1. En utilisant la base duale $(e_1^*, \dots, e_n^*)$: pour tous indices i et j, on a (attention à l'ordre !)

$$e_j^*(S_\sigma(e_i)) = s_{ji} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = \sigma(i) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

   d'où l'égalité $S_\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)}$ pour tout indice i.
2. Pour tout indice i, on a

$$S_{\sigma\circ\tau}(e_i) = e_{\sigma\circ\tau(i)} \quad \text{et} \quad S_\sigma.S_\tau(e_i) = S_\sigma\left(S_\tau(e_i)\right) = S_\sigma\left(e_{\tau(i)}\right) = e_{\sigma(\tau(i))}$$

   d'où l'égalité demandée.
3. – Toute matrice de permutation est à coefficients entiers.
   – Toute matrice de permutation est inversible et admet pour inverse une matrice à coefficients entiers car $Id = S_{id} = S_{\sigma\circ\sigma^{-1}} = S_\sigma.S_{\sigma^{-1}}$.
   – L'égalité $S_{\sigma\circ\tau} = S_\sigma.S_\tau$ justifie que $\sigma \longmapsto S_\sigma$ est un morphisme de groupes.
   – L'injectivité provient du fait que $S_\sigma = Id$ seulement si $\sigma = id$ (par identification des coefficients de la matrice).
4. Quelle que soit la permutation σ, le vecteur (non nul) $\sum_{i=1}^{n} e_i$ est invariant par S_σ car

$$S_\sigma\left(\sum_{i=1}^{n} e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} S_\sigma(e_i) = \sum_{i=1}^{n} e_{\sigma(i)} = \sum_{i=1}^{n} e_i.$$

5. Toute permutation σ est d'ordre fini (divisant l'ordre $n!$ du groupe $\mathcal{S}_n$ d'après le théorème de Lagrange) : il existe un entier naturel non nul d tel que $\sigma^d = id$. On obtient ainsi l'égalité $S_\sigma^d = Id$ donc le polynôme $X^d - 1$ annule la matrice S_σ. Les valeurs propres de S_σ sont donc des racines du polynôme $X^d - 1$.
6. Le polynôme $X^d - 1$ annule la matrice S_σ et est scindé sur $\mathbf{C}$, à racines simples. Donc S_σ est diagonalisable sur $\mathbf{C}$.
7. Si S est une matrice de permutation diagonalisable sur $\mathbf{R}$, ses valeurs propres sont des racines réelles de l'unité. Ce ne peut être que ± 1. Le polynôme $(X-1)(X+1) = X^2 - 1$ annule donc S qui vérifie ainsi l'égalité $S^2 = Id$.
8. La matrice de permutation

$$A = S_{(1,2)(3,4,5)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   vérifie $A^6 = Id$ car $\sigma = (1,2)(3,4,5)$ est d'ordre $\text{ppcm}(2;3) = 6$. Un polynôme annulateur de A est donc $X^6 - 1$ mais le polynôme caractéristique χ_A est de degré 5. En notant μ_A son polynôme minimal, on a les égalités :

$$\chi_A(X) = X^5 - X^3 - X^2 + 1 \quad ; \quad \mu_A(X) = X^4 + X^3 - X - 1 = (X-1)(X+1)(X-j)(X-j^2)$$
$$X^6 - 1 = \mu_A(X).(X^2 - X - 1) \quad ; \quad \chi_A(X) = \mu_A(X).(X-1)$$