Université Claude Bernard Lyon 1
Agrégation interne de Mathématiques : Analyse
Année 2014–2015

Agrégation blanche
27 septembre 2014

Cet énoncé comporte 4 pages de texte. Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'objectif de ce problème est principalement l'étude et le calcul de l'intégrale suivante :

$$I = \int_0^\infty \frac{\arctan t}{e^{\pi t} - 1}\,\mathrm{d}t.$$

Première partie

Le but de cette partie est d'établir une expression de l'intégrale I et d'étudier la fonction φ définie par la relation suivante :

$$\forall t \in \left]0, +\infty\right[, \qquad \varphi(t) = \frac{\arctan t}{e^{\pi t} - 1}.$$

Variations de la fonction φ

1° Déterminer un éventuel prolongement par continuité de la fonction φ en 0.

2° Étudier les variations de la fonction φ sur la demi-droite ouverte $D = \left]0, +\infty\right[$; il peut être intéressant d'introduire la fonction auxiliaire ψ définie par la relation suivante :

$$\forall t \in \left]0, +\infty\right[, \qquad \psi(t) = \frac{1 - e^{-\pi t}}{1 + t^2} - \pi \arctan t.$$

En déduire la borne supérieure de la fonction φ sur D.

Existence et expressions de l'intégrale I

3° Justifier l'existence de l'intégrale I définie par la relation suivante :

$$I = \int_0^\infty \frac{\arctan t}{e^{\pi t} - 1}\,\mathrm{d}t.$$

4° Démontrer les deux relations suivantes :

$$I = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^\infty e^{-k\pi t} \arctan t\,\mathrm{d}t\,; \qquad I = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-k\pi t}}{1 + t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Deuxième partie

Le but de cette partie est d'introduire une fonction f de façon à transformer les expressions obtenues précédemment pour l'intégrale I et à pouvoir calculer l'intégrale I.

Propriétés de la fonction f

5° Pour quelles valeurs de x l'intégrale suivante est-elle définie :

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\,?$$

Pour ces valeurs de x, on pose alors :

$$f(x) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Préciser dans quel ensemble la fonction f est continue ; quelle est la limite de $f(x)$ lorsque le réel x tend vers l'infini ?

6° Dans quel ensemble la fonction f est-elle deux fois continûment dérivable ? Établir une relation simple entre la fonction f et sa dérivée seconde f'' sur la demi-droite ouverte $D =]0, +\infty[$.

Deux intégrales

Soit a un réel strictement positif ($a > 0$). Étant donné un réel X supérieur ou égal à a ($X \geqslant a$), soient $S(X)$ et $C(X)$ les deux intégrales suivantes :

$$S(X) = \int_a^X \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t\,; \quad C(X) = \int_a^X \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t.$$

7° Existe-t-il une limite à chacune des expressions $S(X)$ et $C(X)$ lorsque le réel X croît vers l'infini ?

Soient g et h les deux fonctions définies sur la demi-droite ouverte D par les relations suivantes :

$$g(x) = \int_x^{\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \lim_{X\to+\infty} \int_x^X \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t\,; \quad h(X) = \int_x^{\infty} \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t = \lim_{X\to+\infty} \int_x^X \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Une expression de la fonction f

8° **Résolution d'une équation différentielle** [1]

On note (E) l'équation différentielle obtenue en remplaçant, dans la relation de la question 6°, la fonction f par une fonction inconnue y.

(a) Vérifier que les fonctions cosinus et sinus sont solutions de l'équation différentielle homogène associée à (E).

(b) Soit y une fonction deux fois dérivable sur la demi-droite D et soit, pour x dans D,

$$Y(x) = \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \end{pmatrix}.$$

Montrer que y est solution de (E) si et seulement si Y est solution du système différentiel

$$(S) \qquad \forall x \in D, \quad Y'(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} Y(x) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1/x \end{pmatrix}.$$

1. Cette question est détaillée par rapport à l'énoncé initial car le chapitre n'a pas été vu.

(c) Soient A et B deux fonctions deux fois dérivables sur la demi-droite D. On cherche une solution Y de (S) de la forme

$$Y = A\begin{pmatrix}\cos\\ \cos'\end{pmatrix} + B\begin{pmatrix}\sin\\ \sin'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}A\cos + B\sin\\ -A\sin + B\cos\end{pmatrix},$$

On suppose que Y est solution de (S) : écrire un système linéaire dont les dérivées A' et B' sont solutions et le résoudre.

(d) Montrer que toute solution de (E) est de la forme :

$$\forall x \in D, \quad y(x) = \cos(x)\, g(x) - \sin(x)\, h(x) + a\cos(x) + b\sin(x),$$

pour des réels fixés a et b convenables.

On montrera comment déduire cette expression de la question précédente ; puis on vérifiera que c'est bien une solution pour tout couple (a, b). On admettra alors que le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire permet de conclure.

(e) En déduire une expression de f à l'aide des deux fonctions g et h.

9° En déduire les deux expressions ci-dessous de la fonction f, en tout réel x pour lequel elle est définie :

$$f(x) = \int_0^{\infty} \frac{\sin u}{u+x}\mathrm{d}u = \int_0^{\infty} \frac{\sin(xt)}{1+t}\,\mathrm{d}t.$$

Troisième partie

Un résultat intermédiaire

10° En utilisant les résultats établis dans les première et deuxième parties, démontrer la relation suivante :

$$I = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin(ku)}{\pi+u}\mathrm{d}u.$$

11° Démontrer le résultat suivant :

$$I = \frac{1}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} - \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{1}{(u+\pi)^2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(nu)}{n^2}\right)\mathrm{d}u.$$

Somme de la série de terme général $\cos(nu)/n^2$ ($n \in \mathbb{N}^*$)

Soit G la fonction définie sur la droite réelle, périodique de période 2π (*i.e.* $G(x + 2\pi) = G(x)$ pour tout réel x), dont la restriction au segment $[0, 2\pi]$ est définie par la relation suivante :

$$\forall x \in [0, 2\pi], \quad G(x) = \frac{x^2}{4} - \frac{\pi x}{2} + \frac{\pi^2}{6}.$$

12° Étudier la parité de la fonction G. Calculer les intégrales

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} G(t)\,\mathrm{d}t$$

et, pour n entier naturel non nul :

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} G(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t\,; \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} G(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t.$$

On admettra, pour tout réel x, la relation suivante (qui se démontre à l'aide de la théorie des séries de Fourier) :

$$G(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx).$$

13° En déduire la somme $T(x)$ de la série de terme général $\cos(nx)/n^2$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ lorsque le réel x appartient au segment $[0, 2\pi]$:

$$T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2}.$$

En déduire la somme S de la série de terme général $1/n^2$ $(n \in \mathbb{N}^*)$:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Valeur de l'intégrale I

Soit, pour k entier naturel, α_k le réel défini par l'intégrale suivante :

$$\alpha_k = \int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} \frac{1}{(u+\pi)^2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nu)}{n^2} \right) \mathrm{d}u.$$

14° Calculer, pour tout entier naturel k, la valeur du réel α_k.

Soit N un entier strictement positif. Soit I_N le réel défini par la relation ci-dessous :

$$I_N = \sum_{n=0}^{N-1} \left(-1 + (n+1) \ln \frac{2n+3}{2n+1} \right).$$

15° Démontrer que la valeur de l'intégrale I est égale à la limite de la suite $(I_N)_{N \in \mathbb{N}^*}$.
En déduire que l'intégrale I est la somme d'une série convergente.

16° Après avoir montré que l'expression $E_N = \exp(I_N)$ est égale à un produit de facteurs, déterminer la valeur de l'intégrale I.

On rappelle la formule de Stirling : $N! \sim \dfrac{N^N}{e^N} \sqrt{2\pi N}$.

Soit J l'intégrale suivante :

$$J = \int_0^{\infty} \frac{\arctan t}{e^{2\pi t} - 1} \, \mathrm{d}t.$$

Il est facile de calculer l'intégrale J par la même méthode que celle qui a servi pour calculer l'intégrale I ; il vient :

$$J = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\ln(2\pi)}{2} \right).$$

Soit K l'intégrale suivante :

$$K = \int_0^{\infty} \frac{\arctan t}{e^{\pi t} + 1} \, \mathrm{d}t.$$

Calcul de l'intégrale K

17° Calculer l'intégrale K définie ci-dessus en utilisant le résultat obtenu pour l'intégrale I et la valeur admise pour l'intégrale J.