Université Claude Bernard Lyon 1
Agrégation interne de Mathématiques : Analyse
Année 2014–2015

Agrégation blanche (spoilers)
27 septembre 2014

1° Poser : $\varphi(0) = 1/\pi$ pour un prolongement continu.

2° Le signe $\varphi'(t)$ est le même que celui de $\psi(t)$; or, $\psi(0) = 0$ et ψ décroît sur $\mathbb{R}^{+*}$.

3° En 0, prolongement par continuité ; en l'infini, décroissance exponentielle.

4° Pour $t > 0$, on a : $\dfrac{1}{e^{\pi t} - 1} = \dfrac{e^{-\pi t}}{1 - e^{-\pi t}} = e^{-\pi t} \displaystyle\sum_{p=0}^{\infty} e^{-p\pi t} = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-k\pi t}$. Puis convergence dominée.
Une IPP donne la deuxième relation (dériver arctan évidemment).

5° La fonction f est définie sur $\mathbb{R}^+$. Par convergence dominée, elle y est continue et $\lim_{+\infty} f = 0$.

6° La relation est, pour $x > 0$: $f''(x) + f(x) = \dfrac{1}{x}$.

7° Oui ! Faire une IPP.

8° C'est la méthode de variation de la constante pour les équations d'ordre 2. Il n'y a plus qu'à...

9° Recoller les morceaux. Pour la deuxième relation, $u = xt$.

10° Recoller les questions 4° et 9°.

11° C'est une IPP en prenant $(1 - \cos)$ comme primitive de sin.

12° La fonction G est paire, d'où, sans calcul : $b_n = 0$ pour tout n. Et $a_n = 1/n^2$ si $n \geqslant 1$.

13° Par un miracle admirable : $T(x) = G(x)$ pour tout x.

14° Diviser $\frac{1}{4}x^2 - \frac{\pi}{2}x + \frac{\pi^2}{6}$ par $\big(x + (2k+1)\pi\big)^2$ puis $-(k+1)\pi x + \big(-k^2 - k - \frac{11}{12}\big)\pi^2$ par $\big(x + (2k+1)\pi\big)$.
On trouve : $\alpha_k = \pi - \pi(k+1) \ln \dfrac{2k+3}{2k+1} + \dfrac{1}{6}\left(\dfrac{1}{2k+1} - \dfrac{1}{2k+3}\right)$ (élémentaire mais pénible).

15° Clair à partir de l'expression de 11° – si l'on a la bonne expression de α_k...

16° Pas ma faute si l'énoncé est si étrange. Il y a du télescopage dans le produit.
Vérifier que $E_N = e^{-N} \displaystyle\prod_{n=0}^{N-1} \frac{(2n+3)^{n+1}}{(2n+1)^{n+1}} = e^{-N} \frac{\prod_{n=1}^{N}(2n+1)^n}{\prod_{n=0}^{N-1}(2n+1)^{n+1}} = e^{-N} \frac{(2N+1)^N}{\prod_{n=0}^{N-1}(2n+1)}$.
Attention, $(2N+1)^N = e^{N\ln(2N) + N\ln(1+\frac{1}{2N})} = (2N)^N e^{\frac{1}{2} + o(1)}$ puis avec Stirling : $E_N \sim \frac{e^{1/2}}{\sqrt{2}}$, et enfin $I = \dfrac{1 - \ln 2}{2}$.

17° Une « décomposition en éléments simples » donne : $\dfrac{1}{e^{2\pi t} - 1} = \dfrac{1/2}{e^{\pi t} - 1} - \dfrac{1/2}{e^{\pi t} + 1}$ pour tout t puis : $K = I - 2J$.

Addendum
On a : $f(0) = \dfrac{\pi}{2}$ et $f(x) = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin u}{u + x} du$ si $x > 0$. Il serait bien de pouvoir montrer directement que $\displaystyle\lim_{x \to 0} f(x) = \int_0^{\infty} \frac{\sin u}{u} du$ pour déduire du problème la valeur de cette intégrale.