Calcul théorique de la probabilité d'avoir sur *n* lancers au moins 6 résultats consécutifs égaux à destination de professeurs

Une série de n lancers peut être considéré comme une liste de n éléments pris parmi P et F
Il y a donc 2^n résultats possibles qu'on suppose équiprobables.
Notons F_n l'ensemble des suites à n éléments contenant au moins une séquence de longueur supérieure ou égale à 6

Le complémentaire $\overline{F_n}$ est l'ensemble des suites à n éléments ne contenant aucune séquence de longueur supérieure ou égale à 6. Dénombrons $\overline{F_n}$.

Pour cela, réalisons une partition de $\overline{F_n}$

Soit A_n l'ensemble des suites à n éléments ne contenant aucune séquence de longueur supérieure ou égale à 6 et se terminant par une séquence de longueur 1 : il y a autant de telles suites que de suites de longueur n-1 ne contenant aucune séquence de longueur supérieure ou égale à 6 (car le dernier élément de la suite est déterminé par le précédent)
$\text{Card}(A_n) = u_{n-1}$

Soit B_n l'ensemble des suites à n éléments ne contenant aucune séquence de longueur supérieure ou égale à 6 et se terminant par une séquence de longueur 2 :il y a autant de telles suites que de suites de longueur n-2 ne contenant aucune séquence de longueur supérieure ou égale à 6
(car les deux derniers éléments de la suite est déterminé par le (n-2) ème)
$\text{Card}(B_n) = u_{n-2}$

Soit C_n l'ensemble des suites à n éléments ne contenant aucune séquence de longueur supérieure ou égale à 6 et se terminant par une séquence de longueur 3: il y a autant de telles suites que de suites de longueur n-3 ne contenant aucune séquence de longueur supérieure ou égale à 6
(car les trois derniers éléments de la suite est déterminé par le (n-3) ème)
$\text{Card}(C_n) = u_{n-3}$

Soit D_n l'ensemble des suites à n éléments ne contenant aucune séquence de longueur supérieure ou égale à 6 et se terminant par une séquence de longueur 4: il y a autant de telles suites que de suites de longueur n-4 ne contenant aucune séquence de longueur supérieure ou égale à 6
(car les quatre derniers éléments de la suite est déterminé par le (n-4) ème)
$\text{Card}(D_n) = u_{n-4}$

E_n l'ensemble des suites à n éléments ne contenant aucune séquence de longueur supérieure ou égale à 6 et se terminant par une séquence de longueur 5: il y a autant de telles suites que de suites de longueur n-5 ne contenant aucune séquence de longueur supérieure ou égale à 6
(car les deux derniers éléments de la suite est déterminé par le (n-5) ème)
$\text{Card}(E_n) = u_{n-5}$

$A_n, B_n, C_n, D_n, E_n,$ forment une partition de $\overline{F_n}$
Ainsi $u_n = u_{n-1} + u_{n-2} + u_{n-3} + u_{n-4} + u_{n-5}$

Initialisation
$u_1 = 2 \quad u_2 = 4 \quad u_3 = 8 \quad u_4 = 16 \quad u_5 = 32$
à l'aide d'un tableur on obtient u_{100} et on en déduit la probabilité cherchée soit $\frac{u_{100}}{2^{100}} \approx 0{,}80$