Préparation à l'agrégation interne de mathématiques

Jean-Marie Monier

pour mercredi 8 juin 2011

Exercices de révision

Thème : Séries numériques

Cours

Réviser les séries numériques.

Référence : Jean-Marie Monier, Analyse MP, Cours, exercices-types, méthodes, exercices résolus, Dunod, 9 782 100 510 399, chapitre 4, pages 219-286.
Il y a deux niveaux de travail :

Niveau I : Moyen :

Notion de série à termes dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, convergence, divergence, condition nécessaire de convergence, lien suite/série, reste d'ordre n d'une série convergente, propriétés algébriques des séries convergentes

séries à termes dans $\mathbb{R}_+$, lemme fondamental, théorèmes de comparaison, séries de Riemann, règle $n^\alpha u_n$, (exemple de Bertrand), série géométrique, règle de d'Alembert

séries à termes dans $\mathbb{K}$, convergence absolue, espaces $\ell^1(\mathbb{K}), \ell^2(\mathbb{K})$, séries alternées, utilisation d'un développement asymptotique, comparaison d'une série à une intégrale, formule de Stirling, étude de la somme d'une série convergente.

Niveau II : Avancé :

Notion de série à termes dans un espace vectoriel normé de dimension finie, CNS de Cauchy de convergence d'une série, convergence absolue, séries usuelles dans un espace de Banach, sommation des relations de comparaison, produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes.

Exercices

Les exercices sont tirés du livre "Méthodes et Exercices MP".

Niveau I

1 Exemples de détermination de la nature d'une série numérique

Déterminer la nature de la série de terme général u_n dans les exemples suivants :

a) $\dfrac{|\sin n|}{n^2}$ *b)* $\sqrt{n}-\sqrt{n-1}$ *c)* $\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{n}\right)^n$ *d)* $\ln\dfrac{n^2+2n+3}{n^2+2n+2}$

e) $1-\cos\left(\dfrac{\sin n}{n}\right)$ *f)* $n^{\frac{1}{n^2}}-1$ *g)* $\dfrac{2^n}{n!}$ *h)* $\dfrac{(n+1)^a-n^a}{n^b}$, $(a,b)\in\mathbb{R}^2$.

2 Exemples de séries de Bertrand

Déterminer la nature de la série de terme général u_n dans les exemples suivants :

a) $\dfrac{1}{n^2\ln n}$ *b)* $\dfrac{\ln n}{n}$ *c)* $\dfrac{\ln n}{n^2}$ *d)* $\dfrac{1}{\sqrt{n}\ln n}$ *e)* $\dfrac{1}{n\ln n}$ *f)* $\dfrac{1}{n(\ln n)^2}$.

3 Exemples de détermination de la nature d'une série alternée

Déterminer la nature de la série de terme général u_n dans les exemples suivants :

a) $\dfrac{(-1)^n n}{n^3+n+1}$, *b)* $\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, *c)* $\dfrac{(-1)^n}{n+(-1)^n}$, *d)* $\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$.

4 Nature d'une suite par étude d'une série

Soit $a\in\,]-1\,;+\infty[$ fixé. On note, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $u_n=\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a+k}\right)-\ln n$.

Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

5 Exemple de calcul de la somme d'une série convergente, utilisation de la série de l'exponentielle

On note, pour tout $n\in\mathbb{N}$: $u_n=\dfrac{n^3+6n^2-5n-2}{n!}$.

a) Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}u_n$ converge.

b) Montrer que $\mathcal{B}=(1,\ \mathrm{X},\ \mathrm{X}(\mathrm{X}-1),\ \mathrm{X}(\mathrm{X}-1)(\mathrm{X}-2))$ est une base de $\mathbb{R}_3[\mathrm{X}]$ et décomposer linéairement $P=\mathrm{X}^3+6\mathrm{X}^2-5\mathrm{X}-2$ sur $\mathcal{B}$.

c) En déduire $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}u_n$. On rappelle que : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}=\mathrm{e}$.

6 Nature d'une série reliée à la somme harmonique

On note, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $\mathrm{H}_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$, $u_n=\left(1+\dfrac{1}{\mathrm{H}_n}\right)^{\mathrm{H}_n}-\mathrm{e}$.

Quelle est la nature de la série de terme général u_n ?

7 Exemple de détermination d'un équivalent de la somme d'une série convergente à paramètre

Montrer : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+x)} \underset{x \longrightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln x}{x}$.

8 Convergence et somme d'une série définie à partir d'une suite récurrente du type $u_{n+1} = f(u_n)$

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par $u_0 = 5$ et : $\forall\, n \in \mathbb{N},\quad u_{n+1} = u_n^2 - 5u_n + 8$.

a) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et que $u_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

b) Montrer : $\qquad \forall\, n \in \mathbb{N},\quad \dfrac{(-1)^n}{u_n - 3} = \dfrac{(-1)^n}{u_n - 2} - \dfrac{(-1)^{n+1}}{u_{n+1} - 2}$.

c) Déterminer la nature et la somme de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{u_n - 3}$.

Niveau I et Niveau II

1 Étude des séries convergentes dont le terme général décroît

Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite à termes dans $\mathbb{R}_+^*$, décroissante, telle que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge.

a) Montrer : $nu_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0$.

b) En déduire la nature des séries de termes généraux : $v_n = nu_n^2,\ w_n = \dfrac{u_n}{1 - nu_n}$.

2 Étude de la nature d'une série par comparaison

a) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite à termes dans $\mathbb{R}_+^*$, telle qu'il existe $a \in]1\,;+\infty[$ tel que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \left(\frac{n}{n+1}\right)^a.$$

Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge.

b) Application : déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{1\cdot 3 \cdots (2n-1)}{2\cdot 4 \cdots (2n)} \cdot \dfrac{1}{2n+1}$.

3 Exemple de recherche d'un équivalent du reste d'une série alternée convergente

Trouver un équivalent simple de $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ lorsque l'entier n tend vers l'infini.

4 Nature de séries définies à partir d'une suite

On considère la suite réelle $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $u_0 \geqslant 0$ et :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \sqrt{n + u_n}.$$

a) Montrer : $u_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

b) Établir que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante à partir d'un certain rang.

c) Trouver un équivalent simple de u_n lorsque l'entier n tend vers l'infini.

d) Quelle est la nature, pour $\alpha \in]0\,;+\infty[$ fixé, de la série de terme général $\dfrac{1}{u_n^\alpha}$?

e) Quelle est la nature, pour $\beta \in]0\,;+\infty[$ fixé, de la série de terme général $\dfrac{(-1)^n}{u_n^\beta}$?

5 Exemple de recherche d'un équivalent du reste d'une série convergente

Trouver un équivalent simple de $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \sqrt{k}\, 2^{-k}$ lorsque l'entier n tend vers l'infini.

6 Nature de la série des inverses des nombres premiers

On note p_n le n-ème nombre premier ($p_1 = 2$). Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{p_n}$ diverge.

7 Nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\varphi(n)}{n^2}$

Soit $\varphi : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}^*$ injective. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\varphi(n)}{n^2}$ diverge.

* *