Calcul fractionnaire en Chine Ancienne

Arnaud GAZAGNES

Résumé

Très tôt, les mathématiciens chinois ont eu à travailler avec des fractions. Ils ont établi des règles bien précises pour mener à bien leurs calculs : addition, simplification, ... Quelques-unes seront exposées à travers des problèmes tirés du *Jiu Zhang Suan Shu*.

1 Notion de fraction

Le mot « fraction » porte avec lui de nombreux sens comme la division, le quotient, la proportionnalité. Dans les mathématiques chinoises, le plus commun est celui qui consiste à diviser une entité en un nombre de parts égales.

Le *Jiu Zhang Suan Shu* est un ouvrage dans lequel un certain savoir-faire est pré requis : l'utilisateur doit déjà savoir manier l'addition, la soustraction et la multiplication de nombres entiers. Mais, comme très souvent, les quantités utilisées ne sont pas entières, d'où leur expression en parts de la quantité : c'est pourquoi la quatrième opération usuelle (la division d'entiers) est placée dans le premier Chapitre.

Ainsi « 3/5 [du volume] » sera mentionné comme « 3 des 5 parts [du volume] ». La fraction A/B, de façon plus générale, sera écrite « A *fen zhi* B », soit « A de B parts » puisque l'on prend A parts d'une entité divisée en B parts égales.

De plus, il existe des termes particuliers utilisés uniquement pour certaines fractions simples : 1/4 est représenté par un terme lu *ruo ban* (*la faible moitié*), 1/3 par *shao ban* (*moins que la moitié*), 1/2 par *zhong ban* (*la moyenne moitié*) et 2/3 par *tai ban* (*plus que la moitié*). Il semble que ces expressions, qui apparaissent pour parler plus de quantités approximatives que de fractions précises, notaient à l'origine les graduations de la clepsydre (ses utilisateurs savaient que les mesures du temps obtenues étaient approximatives.)

Les fractions sont aussi associées à la division. En fait, quand une division ne tombe pas juste, le résultat est exprimé sous la forme $a + b/c$, où a est un entier et b/c est la fraction qui reste, avec $b < c$ car b/c représente une fraction de l'unité.

Dans une fraction, le numérateur est appelé « le fils » et le dénominateur, « la mère ». Probablement parce que l'auteur de ces expressions pensait à une mère enceinte et son enfant, soulignant à la fois la différence en taille et le lien intime entre les deux termes. Les numérateurs représentent un certain nombre de parts produites par le dénominateur...

2 Quelques procédures de calcul fractionnaire

Dans le *JZSS*, il y a les sept suivantes (citées par ordre d'apparition) :

- la procédure de simplification des parts, *yuefen shu* ;
- la procédure de réunion des parts, *hefen shu* (addition) ;
- la procédure de diminution des parts, *jianfen shu* (soustraction) ;
- la procédure de comparaison des parts, *kefen shu* ;
- la procédure d'équilibrage des parts, *pingfen shu* ;
- la procédure de calcul direct des parts, *jingfen shu* (division) ;
- la procédure de multiplication des parts, *chenfen shu*.

Intéressons-nous aux procédures suivantes : simplification, réunion et équilibrage des parts.

2.1 Procédure de simplification des parts *(yuefen shu)*

La procédure se trouve après les exercices 1-5 et 1-6 (et leur réponse).

Cette procédure porte sur la simplification d'une fraction en une fraction irréductible.

Simplifier les parts. Procédure : Quand elles sont divisibles par 2, divise-les par 2. Quand elles ne le sont pas, pose séparément les nombres de la mère et du fils du partage, par le [plus] faible, diminue (kien) [(1)] *le [plus] fort. De nouveau qu'ils se diminuent et cherche leur égalité* (deng)*. Par les nombres égaux, simplifie-les.*

Autrement dit, la technique consiste à essayer de simplifier par 2 le numérateur et le dénominateur puis à effectuer ensuite la série de soustractions alternées caractéristique du très classique algorithme d'Euclide [(2)] .

Prenons pour premier exemple la simplification de la fraction $\frac{12}{18}$ (problème 1-5) :

On commence par la division par 2 : $12 \div 2 = \underline{\mathbf{6}}$ et $18 \div 2 = \underline{\mathbf{9}}$.

On continue par les soustractions successives : $9 - 6 = \underline{\mathbf{3}}$ et $6 - 3 = \underline{\mathbf{3}}$.

En divisant par 3 les nombres 6 et 9, on obtient la fraction $\frac{2}{3}$.

Prenons pour second exemple la simplification de la fraction $\frac{49}{91}$ (problème 1-6).

Par soustractions successives, on obtient :

$$\begin{aligned}
91 - 49 &= 42\\
49 - 42 &= \underline{7}\\
42 - 7 &= 35\\
35 - 7 &= 28\\
28 - 7 &= 21\\
21 - 7 &= 14\\
14 - 7 &= \underline{7}
\end{aligned}$$

Comme l'on obtient ainsi deux nombres égaux (le « 7 »de $49 - 42$ et celui de $14 - 7$), on simplifie la fraction en divisant chacun de ses termes par 7 pour obtenir $\frac{7}{13}$. Ce nombre 7 que l'auteur appelle l'égal (*deng*) est le PGCD de 91 et 49.

2.2 Procédure d'addition des fractions (*hefen shu*)

C'est après les exercices 1-7, 1-8 et 1-9 que se trouve la procédure.

Unir les parts. La procédure dit : les mères en croix les fils. Additionne [les produits] pour faire le dividende. Les mères multipliées entre elles font le diviseur. Le dividende est rapporté au diviseur [(3)] *. Ce qui ne remplit pas le diviseur, par le diviseur, commande-le. Lorsque les mères sont identiques, que les dividendes se suivent directement.*

« Ce qui ne remplit pas le dénominateur »est le reste de la division du dividende par le diviseur. Le « commander » (*ming*) par le diviseur signifie qu'on l'exprime sous la forme d'une fraction ayant ce reste pour numérateur et le diviseur pour dénominateur. Avoir des « mères identiques » signifie que les dénominateurs sont égaux. Dans ce cas, on additionne directement les numérateurs.

Si nous considérons les deux fractions a/b et c/d, la procédure donne pour résultat la fraction $(a\ d + b\ c)/(b\ d)$, sans passer par le calcul du plus petit commun des dénominateurs.

Par exemple, dans le problème 1-7, on veut sommer les deux fractions $\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{5}$. Le dividende est égal à $5 \times 1 + 3 \times 2 = 11$ et le diviseur est $3 \times 5 = 15$. $11 < 15$: 11 ne remplit pas 15. Le résultat est donné sous la forme $\frac{11}{15}$.

(1). « Soustrais le plus petit au plus grand. »

(2). Voir les *Éléments* VII-1 et VII-2.

(3). En d'autres termes, « multiplie les dénominateurs : cela te donnera le dénominateur final puis simplifie la fraction trouvée ».

Dans le problème 1-8, on veut sommer les trois fractions $\frac{2}{3}, \frac{4}{7}$ et $\frac{5}{9}$. Le dividende est égal à $2 \times 3 \times 7 + 4 \times 9 + 5 \times 7 = 42 + 36 + 35 = 113$ et le diviseur, $7 \times 9 = 63$. $113 > 63$: 113 remplit 63. Il reste 113 - 63 = 50. On donne le résultat sous la forme $1 + \frac{50}{63}$.

Le problème 1-9 demande de sommer les quatre fractions $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}$ et $\frac{4}{5}$.

La procédure permet de sommer un nombre quelconque de fractions. La procédure de soustraction, proposée après les problèmes 1-10 et 1-11 n'est énoncée, comme on peut s'y attendre, que pour la soustraction de deux fractions : présentée de façon semblable, son argument principal est de « *retrancher le [produit] faible au [produit] fort* ».

Équilibrer les parts. La procédure dit : Les mères en croix multiplient les fils. La réunion [des produits] donne le dividende d'équilibre. Les mères multipliées entre elles donnent le diviseur.

Fils	Mères	Produits
1	2	12
2	3	16
3	4	18

Le dividende d'équilibre est $12 + 16 + 18 = 46$.

Le produit des dénominateurs est $2 \times 3 \times 4 = 24$.

Par le nombre de rangs, multiplie les [produits] non encore additionnés ; ils forment chacun un diviseur de rang. Par le nombre de rangs, multiplie également le diviseur.

Le nombre de rangs, qui est le nombre de fractions, vaut ici 3.

Les produits non encore additionnés multipliés par 3 sont 36, 48 et 54.

Le diviseur 24 multiplié par 3 donne 72.

Par le dividende d'équilibre diminue les dividendes de rang [qui lui sont supérieurs]. Simplifie les restes. Ils font ce qu'on retranche. Additionne ce qu'on retranche pour [l'] ajouter au [plus] faible [dividende de rang].

Les dividendes de rang 48 et 54 sont diminués de 46 et donnent 2 et 8, qui sont rapportés à 72.

En simplifiant par 2, on obtient les restes 1 et 4, rapportés au diviseur 36 ($= 72 \div 2$). Ces deux restes ont pour somme $4 + 1 = 5$.

On l'ajoute au troisième dividende (simplifié aussi par 2, soit $36 \div 2 = 18$). On obtient $5 + 18 = 23$.

Par le diviseur, commande le dividende d'équilibre. Chacune [des fractions] donne l'équilibre.

Le diviseur 72 donne la fraction d'équilibre $\frac{46}{72} = \frac{23}{36}$.

3 La procédure *tong fen*

La procédure consiste aussi bien à transformer la somme d'un entier et d'une fraction en une seule fraction que réduire plusieurs fractions au même dénominateur. Le mot *tong* signifie « mettre en communication », « complet », « commun », ...

Cette procédure n'est pas, ni dans le *Jiu Zhang Suan Shu*, ni dans d'autres manuels, considéré au même titre que les autres opérations sur les fractions et il est introduit occasionnellement avec certaines d'entre elles.

Ainsi, à l'occasion des problèmes 1-17 et 1-18 qui amènent la procédure de division de deux fractions (*jing fen shu)*, Liu Hui explique cette procédure dans son commentaire :

Par la mère du partage, on multiplie l'entier et on incorpore [au produit] le fils ; en fractionnant l'entier, on a fait des parts du produit ; les parts du produit étaient alors en relation avec le fils. C'est pourquoi on a pu les additionner.

En d'autres termes, $a + \frac{b}{c}$ est transformé en $\frac{ac}{c} + \frac{b}{c}$ puis en la fraction $\frac{ac + b}{c}$.

L'un des effets de cette procédure est d'exprimer la quantité d'une entité avec une unité plus petite. Par exemple, on sait que 1 *jin* (4) $= 16$ *liang* alors 1 *jin* 2 *liang* $= 18$ *liang*.

4 La procédure *shao guang*

Cette procédure permet de calculer la largeur d'un champ rectangulaire (*fangtian*) lorsque l'on connaît sa longueur et sa surface. On rencontre dans le Chapitre 4 du *Jiu Zhang Suan Shu* des problèmes sur ce thème (parmi d'autres). Ce chapitre est appelé « Diminution de la largeur ».

Tous les champs ont une surface valant 1 *mu*, soit 240 *bu* [carrés] et une largeur valant successivement $1, 1+\frac{1}{2}, 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}, \ldots, 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{12}$ *bu*.

Au-delà du simple exercice de calcul fractionnaire (qui se rapporterait au Chapitre 1), on peut y voir deux intentions du rédacteur. La première est de montrer qu'une aire peut être réalisée de plusieurs façons. La seconde est d'introduire le cas où largeur et longueur sont égales, c'est-à-dire d'amener l'extraction d'une racine carrée ; cette opération est littéralement traduite par « ouvrir le carré ». La méthode proposée par le rédacteur explique comment on divise l'unité par une somme de fractions.

Notons au passage que *guang* et *zong* sont très souvent respectivement traduits par « largeur » et « longueur » ; en fait, ces deux termes désignent des longueurs se rapportant à leur orientation : *guang* désigne la direction (horizontale) est-ouest et *zong*, la direction (verticale) nord-sud. Et, de façon assez générale, *zong* est supérieur à *guang*. Cette utilisation des cardinaux est typique de la culture chinoise.

Problème JZSS 4-4.

Soit un champ [rectangulaire] large de $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$ bu. *On veut un champ de [superficie] 1* mu . *On demande quelle doit en être la longueur.*

Réponse : $105+\frac{15}{137}$ bu.

La procédure dit :

Pose le bu *entier et les mères et les fils des partages. Par la mère du partage le plus inférieur, multiplie partout les fils des partages et le* bu*entier.*

Pose le *bu* entier, les dénominateurs et les numérateurs des fractions. Par le dénominateur de la fraction la plus petite (5) multiplie les numérateurs des fractions et le *bu* entier.

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5} = 5\times\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)\div 5 = \frac{1}{5}\times\left(5+\frac{5}{2}+\frac{5}{3}+\frac{5}{4}+\frac{5}{5}\right)$$

Chaque partage, par sa mère divise son fils. Pose le [résultat] à gauche (6).

Simplifie le membre de droite de l'égalité précédente. Pose le quotient à gauche.

Cela donne : $\frac{1}{5}\times\left(5+\frac{5}{2}+\frac{5}{3}+\frac{5}{4}+1\right)$

Mets en communication les partagées et, par les mères des partages, multiplie partout les fils des partages et ceux qui communiquent déjà. Tous [alors] sont mis en communication et identifie-les. Unis-les comme diviseur.

Réduis au même dénominateur les fractions restantes et multiplie tous les numérateurs et les quotients entiers par leurs dénominateurs. Toutes les fractions sont donc réduites au même dénominateur. Le diviseur est la somme des numérateurs.

Cela donne : $\frac{1}{5\times 4}\left(20+\frac{20}{2}+\frac{20}{3}+\frac{20}{4}+4\right) = \frac{1}{5\times 4}\left(20+10+\frac{20}{3}+5+4\right)$.

(4). Unité de masse.

(5). Par conséquent, par le plus grand dénominateur.

(6). Cela fait référence à la disposition des calculs.

Puis : $\dfrac{5 \times 4}{3}(60 + 30 + 20 + 15 + 12)$

Pose le nombre de bu*que l'on veut, multiplie-le par les parts accumulées du* bu*entier comme dividende. Le dividende est rapporté au diviseur. Tu obtiens les* bu*de la longueur.*

Pose le nombre de *bu* que l'on veut. Multiplié par le multiplicateur du *bu* entier, cela donne est le dividende.

La longueur cherchée est :

$240 \times (5 \times 4 \times 3) \times \dfrac{1}{60 + 30 + 20 + 15 + 12} = \dfrac{14\ 400}{137} = 105 + \dfrac{15}{137}$.

Bibliographie

(Sont cités pour le lecteur les textes et ouvrages en langues occidentales)

GRANET, M., *La civilisation chinoise*, Coll. « L'évolution de l'humanité », Albin Michel, 1968

LIBBRECHT, U., *The Chinese Ta-yen Rule : a Comparative Study, Orientalia Lovaniensa* (Louvain), 1972

LIU, D., *Nombres et outils de calcul et expressions mathématiques en Chine ancienne*, in *L'Océan Indien au carrefour des mathématiques arabes, chinoises, européennes et indiennes*, Actes du Colloque, 3-7 novembre 1997, I.U.F.M. de La Réunion, pp 161-177, 1998

MARTZLOFF, J.-Cl., *Histoire des mathématiques chinoises*, Masson, 1983

MARTZLOFF, J.-Cl., *A History of Chinese Mathematics*, Springer, 1997

MIKAMI, Y., *The developpment of mathematics in China and Japan*, Chelsea Publishry Compagny New York, 1913

NEEDHAM, J., *La science chinoise et l'Occident*, Ed. du Seuil, 1973

SCHRIMPF, R., *La collection mathématique Souan King Che Chou, Contribution à l'histoire des mathématiques chinoises des origines au VIIe siècle de notre ère*,Thèse, Rennes, 1963

YABUUTI, K., *Une histoire des mathématiques chinoises*, Belin Sciences, 2000

YAMASAKI, Y., *History of instrumental Multiplication and Division in China – from the Reckoning-blocks to the Abacus*

Ce document a été écrit à partir de la brochure *Promenades mathématiques en Chine Ancienne*, écrite par Arnaud GAZAGNES et publiée par l'IREM de Reims en 2005 (ISBN : 2-910076-12-1).