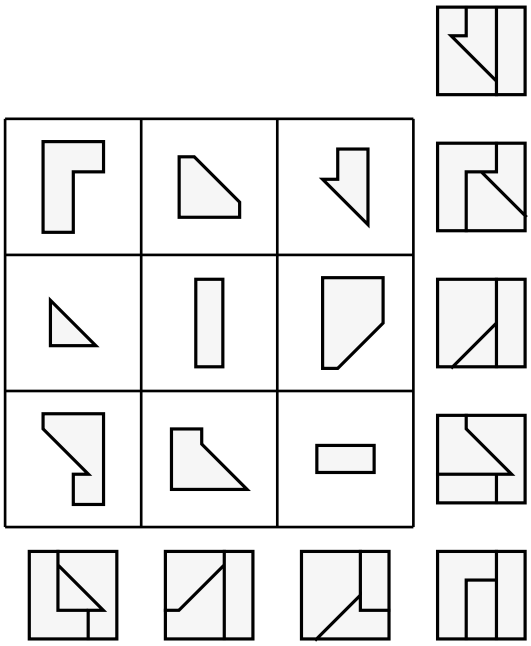
IREM

Institut de Recherche
sur l'Enseignement des Mathématiques

Carrés géomagiques :

des activités pour la classe



Arnaud Gazagnes

Groupe « Jeux »

Avant-propos et remerciements

Il y a trois ans, lors d'une réunion du groupe national « Jeux et mathématiques » de l'Association des professeurs de mathématiques de l'enseignement public (APMEP), et avant de reprendre le travail postméridien, mon collègue lillois Dominique Cambrésy nous a fait découvrir les carrés géomagiques de Lee Sallows. Le joueur et l'amateur d'énigmes que je suis a tout de suite été émerveillé. L'enseignant que je suis a flairé tout de suite un matériel prometteur pour des activités en classe !

Vous tenez dans vos mains (ou, plus probablement, à l'écran de votre ordinateur), le fruit de trois ans de travail, depuis la conception des activités à la présente production, en passant par les phases de test par les élèves.

Ce que vous trouverez dans cette brochure ? Des activités à faire en classe, dont le contenu est conforme aux programmes. Il y a ainsi des activités portant sur la notion d'aire et de périmètre, sur la proportionnalité et les fractions, sur les transformations du plan, sur le calcul littéral algébrique, des activités sur tableur, ...
Vous trouverez aussi des activités de recherche et des défis, pour le temps « hors classe ».
Bien évidemment, et là est l'une des convictions pédagogiques, l'esprit ludique a été choisi autant que possible : vous trouverez des activités avec des pièces à manipuler (c'est si important pour nos élèves !), des activités avec des messages ou des dessins cachés, des dominos, des labyrinthes à traverser, des mosaïques collaboratives à dessiner, ...

Ce que vous ne trouverez pas dans cette brochure ? Ni une théorie de plus sur les carrés magiques, ni des batteries de carrés magiques à faire compléter par vos élèves, ni une étude mathématique sur les carrés géomagiques (Lee Sallows s'en est chargé, et il l'a fait beaucoup mieux que ce que je n'aurais fait !)

Qu'il me soit permis de remercier ici plusieurs personnes :

- en tout premier, Lee Sallows, pour sa créativité, sans laquelle les carrés géomagiques n'existeraient pas, et pour l'immense plaisir de toutes les découvertes (mathématiques) faites grâce à eux ;
- Dominique Cambrésy, sus-cité ;
- François Drouin (retraité mais toujours bien actif dans sa Lorraine, et l'une de mes références en matière de jeu), de l'APMEP, pour qui le partage des idées pédagogiques est une démarche contagieuse, et dont on trouvera des idées dans cette brochure ;
- mes collègues du groupe « Jeux et mathématiques » de l'IREM, qui ont fait jouer leurs élèves, et plus particulièrement Julien Patru, pour ses retours et ses remarques constructives ;
- Christian Mercat, directeur adjoint de l'IREM, pour son fidèle soutien et Joris Mithalal Le Doze, directeur de l'IREM, pour son soutien de l'IREM auprès de l'institution ;
- Céline, mon épouse, qui m'a fait les découpages précis et collages dont j'avais besoin (il m'arrive d'avoir dix pouces et deux mains gauches...) ;
- les enseignants de mes années d'étudiant ou d'enseignant stagiaire qui m'ont appris à travailler avec les variables didactiques : celles-ci sont à l'origine des items proposés tout au long des activités ;
- enfin, mon fidèle allié LaTeX, qui m'a permis de rédiger entièrement cette brochure et qui m'a donné, entre autres, toutes ces belles illustrations au fil des pages (hormis le logo de l'IREM, inséré comme image !).

J'espère vous donner autant de plaisir à lire cette brochure, à travailler avec elle et à faire jouer vos élèves que j'ai eu à l'écrire.

Pour tout complément, n'hésitez pas à m'écrire à `arnaud.gazagnes@ac-lyon.fr` .

1 Carrés géomagiques

1.1 Des carrés magiques...

Définitions

Un *carré magique* d'ordre n (avec $n \geqslant 3$) est un tableau carré de n lignes et de n colonnes dont les cases contiennent des nombres entiers tels que la somme des nombres dans chacune des lignes, chacune des colonnes et chacune des deux diagonales soit constante. Cette constante est appelée *constante magique* du carré.

Ce carré est dit *normal* lorsqu'il contient chacun des entiers de 1 à n^2.

Exemple

Le carré d'ordre 3 ci-contre est magique, de constante magique égale à 15. (Dans un carré magique d'ordre 4, cette constante est égale à 34.) De plus, il est normal car il contient les entiers de 1 à $3^2 = 9$.

8	1	6
3	5	7
4	9	2

1.2 ... aux carrés géomagiques

1.2.1 Principe et exemple

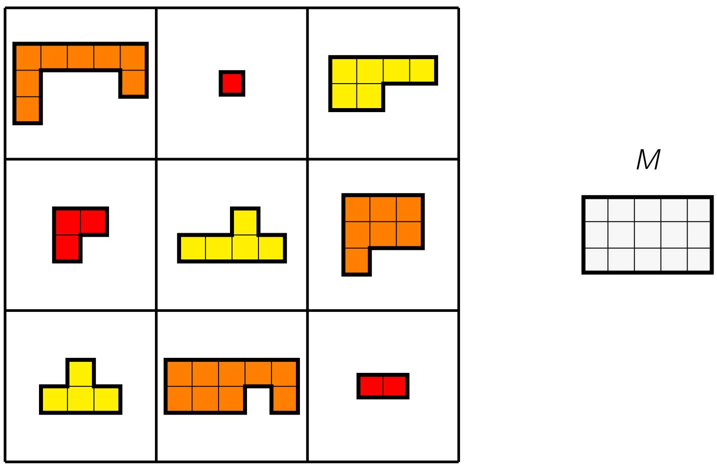
L'idée de Lee Sallows, en 2001, a été de remplacer les nombres par des figures géométriques.

Définition

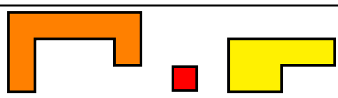
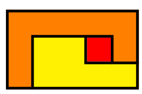
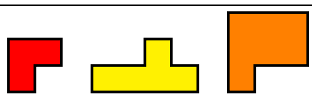
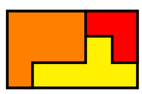
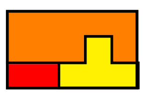
Un *carré géomagique* d'ordre n est un tableau carré contenant n^2 surfaces toutes différentes, et pouvant être retournées, telles que leur réunion disjointe dans chacune des trois lignes, des trois colonnes et des deux diagonales soit constante à un même modèle M.

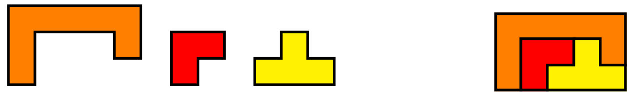
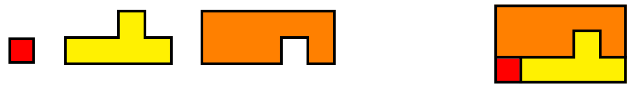
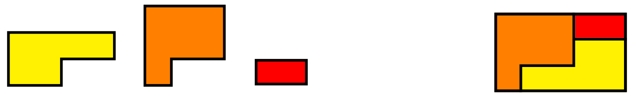
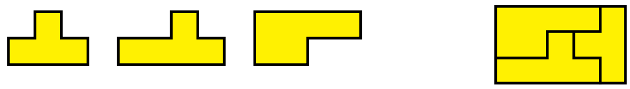
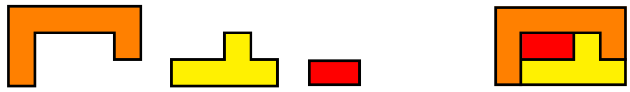
Exemple

Lee Sallows donne dans `http://www.geomagicsquares.com/intro.php` le carré géomagique d'ordre 3 ci-dessous : à gauche, se trouve un carré de côté 3 comportant neuf pièces et, à droite, se trouve le modèle M, qui est un rectangle de dimensions 5×3.
Les aires (en « carrés unité ») des neuf pièces sont données dans le carré magique normal plus haut.

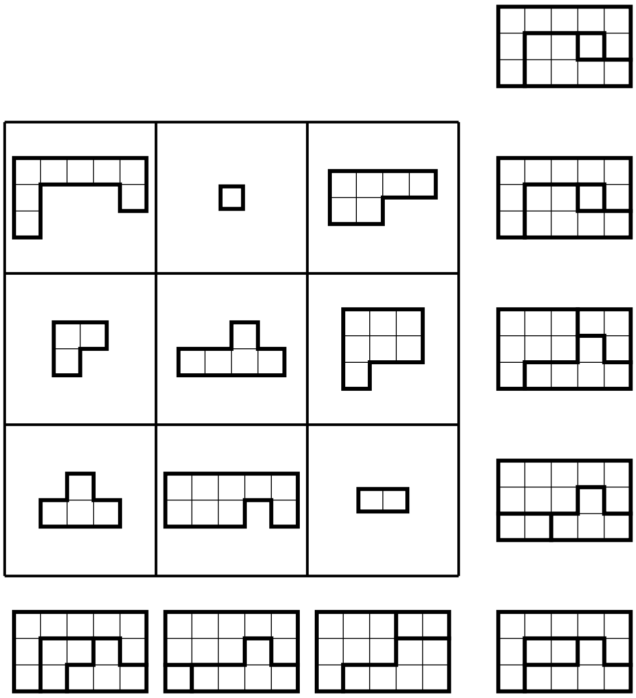


Ce modèle peut être donc recouvert huit fois (trois en ligne, trois en colonne et deux en diagonale).

Alignement	**Pièces**	**Recouvrement de** M
Ligne du haut		
Ligne du milieu		
Ligne du bas		

Colonne de gauche	
Colonne du milieu	
Colonne de droite	
Diagonale montante	
Diagonale descendante	

Dans la brochure, les solutions (en noir et blanc) seront donc présentées sous la forme suivante :



Tous les carrés géomagiques utilisés dans la brochure sont extraits du site de Lee Sallows, dont l'adresse est `http://www.geomagicsquares.com` .

Par ailleurs, Lee Sallows a écrit le très beau *Geometric Magic Squares : A Challenging New Twist Using Colored Shapes Instead of Numbers*, Dover, 2013, dans lequel il fait le tour des connaissances à leur sujet. Il y explique qu'il s'est intéressé à ce thème parce qu'il savait qu'« il s'[agissait] d'un domaine où l'amateur, même sans formation mathématique poussée, peut travailler et y faire d'intéressantes découvertes ».

1.2.2 Des carrés normaux comme supports

Lee Sallows a utilisé, parmi divers carrés magiques, le carré normal d'ordre 3 et des carrés normaux d'ordre 4 pour construire des carrés géomagiques.

Il s'agit des carrés numérotés 2, 3, 14, 19, 20, 32, 34, 35, 36, 37, 38, 46 et 57 dans sa galerie.

Une présentation est proposée en pages 226 et 227.

1.2.3 Un autre exemple

Puisque la somme magique est 15, on peut penser à quinze secteurs circulaires d'angle $360 \div 15 = 24$ degrés : chaque nombre du carré magique indique alors le nombres de secteurs accolés à utiliser.
Une illustration se trouve en page 220.

1.2.4 Un carré géomagique d'ordre 2

Un carré magique d'ordre 2 est trivial : il est rapide d'établir que les quatre nombres sont tous égaux. C'est pour cela que, dans la définition d'un carré magique donnée plus haut, on prend $n \geqslant 3$.

Lee Sallows s'est néanmoins posé la question de l'existence de carrés géomagiques d'ordre 2. Durant des années. C'est Frank Tinkelenberg, informaticien hollandais, qui lui apporta une solution. Celle-ci utilise quatre pièces composées de plusieurs morceaux et le modèle M est composé de deux morceaux. Cette solution est reproduite en page 225.

Par ailleurs, Danielle Salles a étudié les quatre pièces en les codant par des 15-uplets binaires : je renvoie à son article publié dans la revue *Le miroir des maths* de l'IREM de Basse-Normandie en mars 2016.

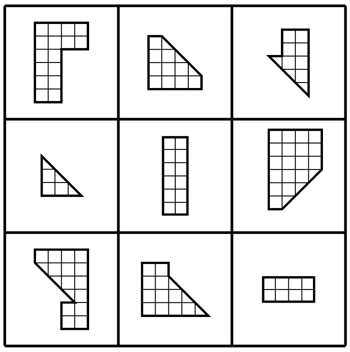
1.3 Présentation des carrés géomagiques utilisés dans la brochure

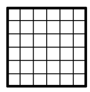
L'ordre de présentation des carrés géomagiques est tout simplement l'ordre d'apparition et de numérotation des carrés géomagiques de Lee Sallows sur son site.

Remarque. Dans sa galerie, Lee Sallows utilise un quadrillage fin sur les pièces : celui-ci permet de préciser la forme précise des pièces et leurs tailles relatives. Le quadrillage a donc été laissé dans les activités.

1.3.1 Le carré C0-1

Lee Sallows donne dans `http://www.geomagicsquares.com/intro.php` l'exemple de présentation ci-dessous, dans lequel se trouve, à gauche, un carré comportant neuf pièces polygonales et, à droite, le modèle M, qui est un carré de côté 6.



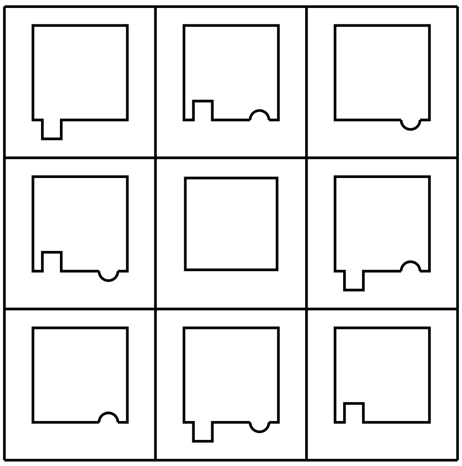


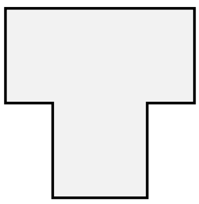
Les aires des neuf pièces sont proportionnelles aux valeurs données dans le carré magique ci-contre (de somme magique égale à 72), en prenant comme aire unité celle d'une moitié de carré :

32	23	17
9	24	39
31	25	16

1.3.2 Le carré C0-2

Ce carré se trouve à la page `http://www.geomagicsquares.com/intro.php`.





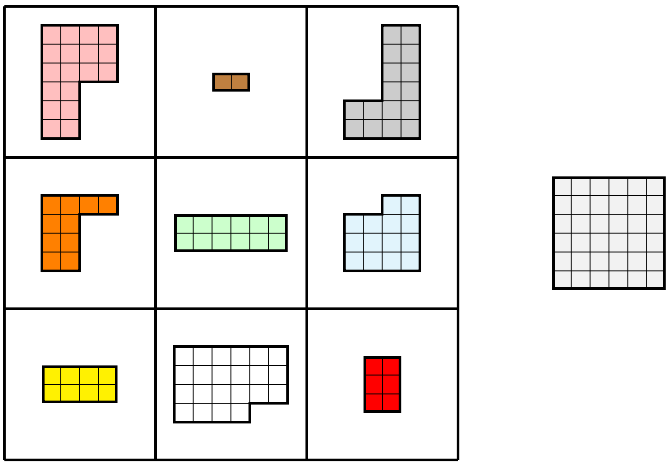
Le mathématicien Édouard Lucas (1842 – 1891) a établi que tout carré magique d'ordre 3 s'écrit sous la forme ci-dessous.

$c+a$	$c-a-b$	$c+b$
$c-a+b$	c	$c+a-b$
$c-b$	$c+a+b$	$c-a$

Lee Sallows a transposé ces opérations algébriques dans le cadre géométrique : c est interprété comme une surface sur laquelle on ajoute ou on retranche les surfaces a et b suivant qu'il y a le signe « + » ou « − » devant la lettre. En particulier, le carré C0-2 provient d'une telle construction, où a est un carré de côté 1, b est un demi-cercle de diamètre 1 et c est un carré de côté 5.

1.3.3 Le carré C4

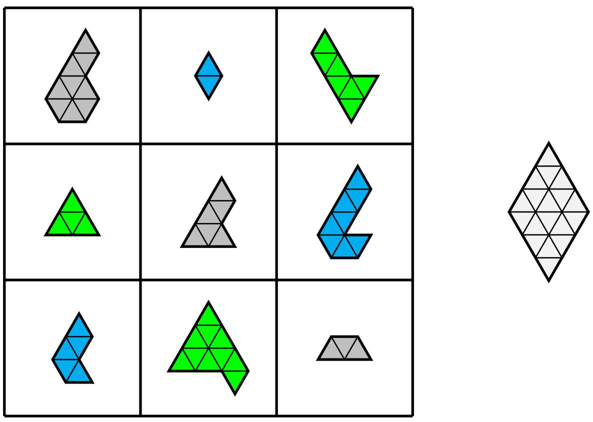
Ce carré géomagique se trouve sur `https://www.geomagicsquares.com/gallery.php?page=4`.



Le modèle M est un carré de dimensions 6×6. De plus, on note que toute paire de pièces dont les positions sont symétriques par rapport au centre du carré permettent de former un rectangle de dimensions 6×4.

1.3.4 Le carré C8

Ce carré géomagique se trouve sur `https://www.geomagicsquares.com/gallery.php?page=8`.

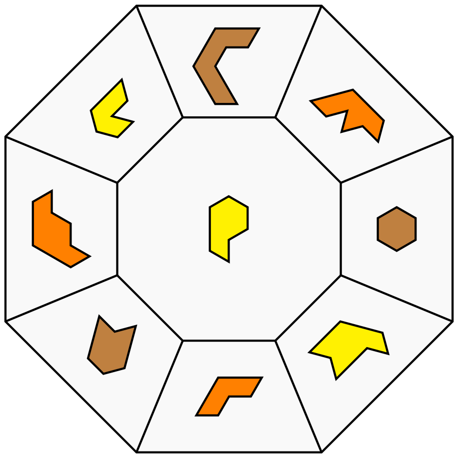
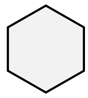


Le carré magique associé, dont les valeurs sont les aires des pièces en « triangle équilatéral unité », contient les entiers de 2 à 10. (1)

(1). On le construit facilement à partir du tout premier carré magique de la page 3, en ajoutant 1 à chacune des neuf valeurs.

1.3.5 Le carré C10, « Magic mandala I »

Ce carré géomagique se trouve sur `https://www.geomagicsquares.com/gallery.php?page=10`.

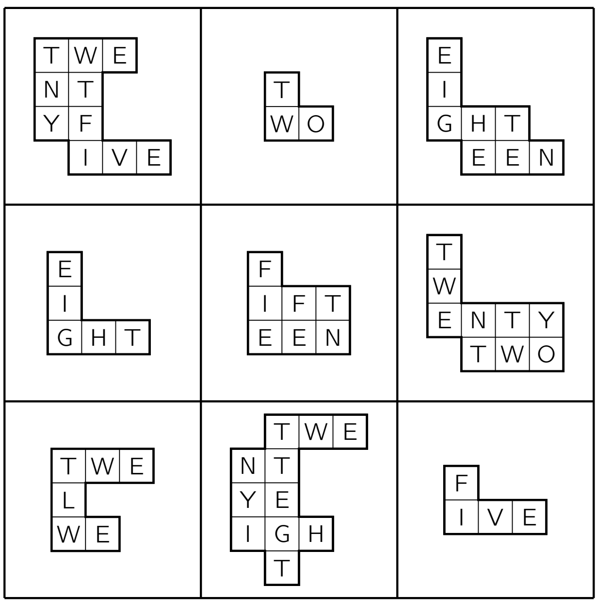
La présentation change : le carré est en fait un... octogone. Lee Sallows explique que sa figure est inspirée par un diagramme astrologique tibétain dans lequel le carré magique chinois appelé usuellement « carré de Luò shū » est représenté entouré de huit trigrammes.

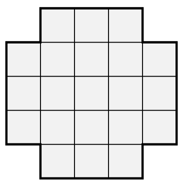
Les pièces utilisées sont toutes des polyamants (c'est-à-dire des arrangements de triangles équilatéraux), dont les aires valent 6, 8 ou 10.

La construction proposée est l'une des deux seules solutions utilisant des polyamants avec ces tailles et le même modèle (l'autre est le carré n° 56 de la galerie).

1.3.6 Le carré C18

Ce carré géomagique se trouve sur `https://www.geomagicsquares.com/gallery.php?page=18`.





Intéressons-nous au tableau qui reprend les nombres écrits sur les neuf pièces ci-dessus, dans le sens usuel de lecture (ci-dessous à gauche).

TWENTY-FIVE	TWO	EIGHTEEN
EIGHT	FIFTEEN	TWENTY-TWO
TWELVE	TWENTY-EIGHT	FIVE

25	2	18
8	15	22
12	28	5

10	3	8
5	7	9
6	11	4

Le carré du centre donne en correspondance les traductions des nombres : on peut vérifier rapidement que ce carré est magique (de somme 45).
Le carré de droite en correspondance donne le nombre de lettres utilisées dans l'écriture des nombres. Par exemple, à TWENTY-FIVE correspond 10. Ce carré est lui aussi magique ! (De somme 21.)

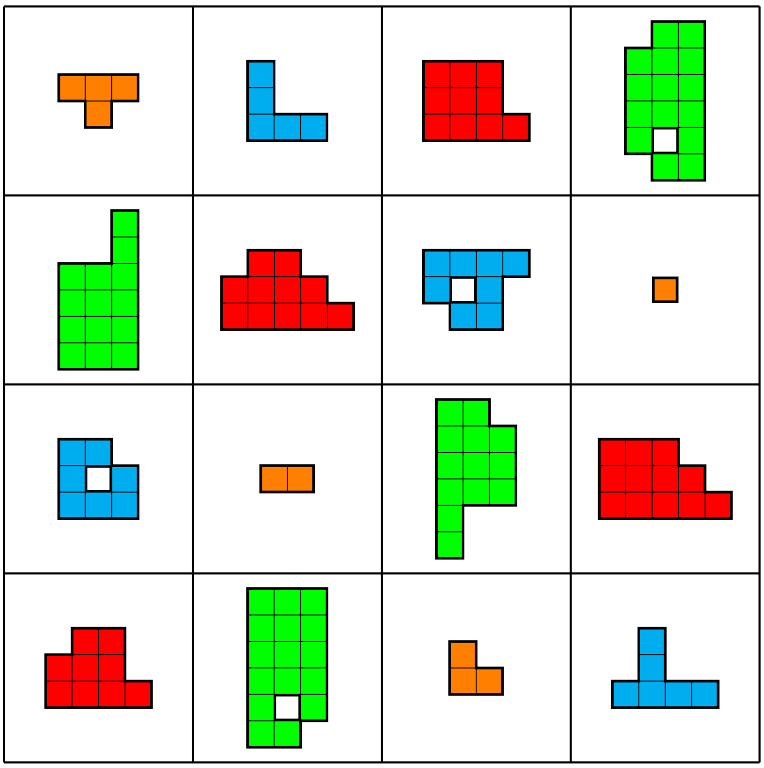
Définition Un *carré alphamagique* est un carré magique qui reste magique lorsque ses nombres sont remplacés par le nombre de lettres apparaissant dans le nom de chaque nombre.

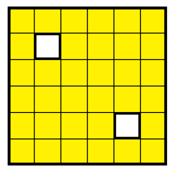
Cette appellation vient de son inventeur et concepteur... Lee Sallows (en 1986).

Le carré C18 est donc non seulement géomagique mais aussi alphamagique.

1.3.7 Le carré C46

Ce carré géomagique se trouve sur `https://www.geomagicsquares.com/gallery.php?page=46`.





Le carré magique associé (en comptant le nombre de carreaux que compte chaque pièce) est donné ci-contre.

4	5	10	15
14	11	8	1
7	2	13	12
9	16	3	6

Définition Un *carré magique d'ordre 4 plus-que-parfait* (ou *enchanté*) est un carré magique vérifiant en plus les conditions suivantes :
- la somme de deux nombres espacées d'une case sur chaque diagonale est égale à 17 (moitié de 34) ;
- la somme des quatre valeurs de tout carré 2×2 est égale à 34.

Définition Un *carré magique d'ordre 4 diabolique* (ou *pandiagonal*) est un carré magique vérifiant en plus la condition d'avoir une somme égale à 34 sur chacune de ses six diagonales brisées.

Ce carré magique est donc un carré magique plus-que-parfait et diabolique. Ceci permet de trouver des configurations géométriques où se trouve la somme 34, illustrées en page 207 et données en page 208.

Ces propriétés géométriques supplémentaires donnent de nouvelles possibilités de recouvrement du modèle (trente-six proposées par Lee Sallows avec ce carré au lieu des huit usuelles).

L'ordre valant 4, il y a équivalence [(2)] entre carré magique plus-que-parfait et carré diabolique.

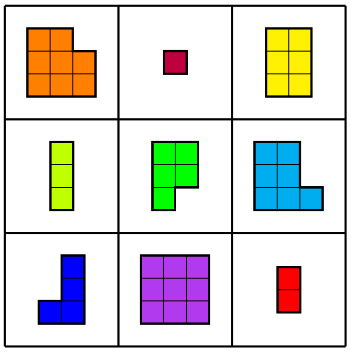
(2). Cela dépasse largement le cadre de cette brochure... L' e-toile regorge de documents sur ce sujet.

1.3.8 Le carré C57

Ce carré géomagique se trouve sur `https://www.geomagicsquares.com/gallery.php?page=57`*.*

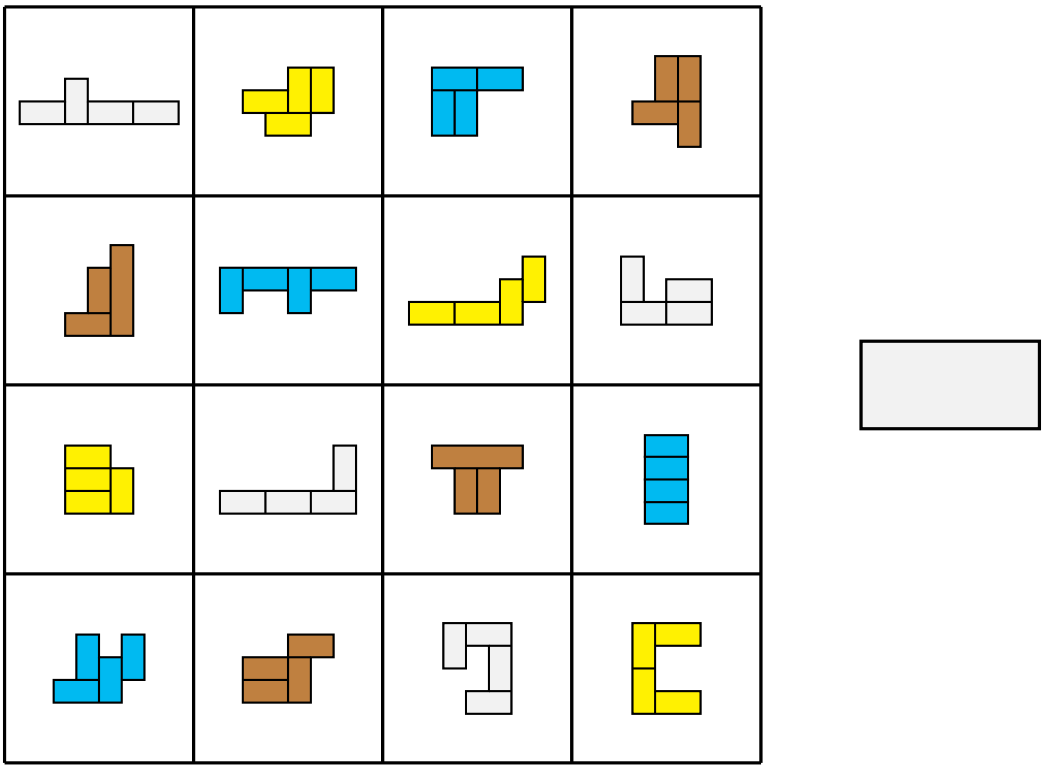
Ce carré est extraordinaire : on peut recouvrir de huit façons différentes douze modèles différents !

Ce carré a été obtenu à partir du carré C15 de la galerie et d'une remarque apportée par Odette de Meulemeester, Aad Thoen et Helmut Postl.



1.3.9 Le carré C62

Ce carré géomagique se trouve sur `https://www.geomagicsquares.com/gallery.php?page=62`*.*



Chacune des seize pièces de ce carré est composée de quatre rectangles de dimensions 2×4 (le modèle est un rectangle de dimensions 4×8).

La particularité de ces pièces est qu'elles forment un ensemble (carrelage) de tuiles auto-tuilées [3] de taille 16. C'est-à-dire que chacune d'elles peut être reproduite à l'échelle 4 (ici) avec toutes les seize.

(3). « Self-tiling tile set », dans la même littérature ; le nom de *setiset* a été donné par Lee Sallows en 2012. Dans la littérature scientifique, lorsque les pièces ont toutes la même forme, on parle de *rep-tile* (ou *rep-tuile*, en français) ; un exemple illustré est donné en page 231. C'est le cas dans l'activité de la page 115 et dans l'activité de la page 135. Je renvoie le lecteur intéressé à la page `https://fr.wikipedia.org/wiki/Reptuile` .

2 Les activités

2.1 Les manipulations

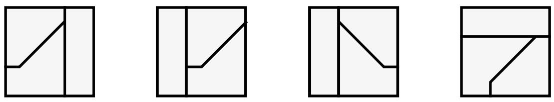
Pour chacun des carrés géomagiques proposés, il y a :

- une fiche où est donné le carré magique et où l'élève complète les motifs du modèle, une fois le puzzle reconstitué ;
- une fiche solution ;
- une fiche où les pièces sont dessinées en plus grand pour que l'élève puisse les manipuler (il y a une version « recto simple » pour coller sur du carton souple) et une version « recto verso » que l'enseignant choisira) ;
- une fiche de plateaux de jeux grisés (pour que les pièces posées soient plus facilement visibles) ou blancs (si l'enseignant veut photocopier cette fiche sur une feuille de couleur) ; les pièces sont données sous forme de solutions, afin d'optimiser la place et le temps de découpe !

Il peut être pertinent que les élèves préparent chez eux le matériel de manipulation (découpage et collage). D'une part, il n'y aura pas de perte de temps en classe consacré à cette préparation et, d'autre part, l'enseignant peut proposer de chercher les solutions en dehors des heures de cours.

Il semble important que les élèves aient manipulé les pièces avant de se lancer dans une activité plus mathématique (notamment avant une activité sur l'aire ou le périmètre, par exemple).

À noter. Les manipulations faites par les élèves les amèneront à trouver des recouvrements différents. Ainsi, dans le cas du carré géomagique C0-1, ces élèves dessineront sur leur fiche réponse des recouvrements comme ceux dessinés ci-dessous. (Ces solutions ne sont pas les seules.) L'idée dans cette phase est que chaque élève trouve au moins un recouvrement par alignement. Ceci pour tous les carrés géomagiques.



2.2 Les activités

Note. Pour la plupart des activités, l'enseignant pourra en faire une photocopie à 71 % (qui correspond au passage du format A3 au format A4).

2.2.1 Activités d'ouverture

Il y a deux activités qui permettent une première approche.

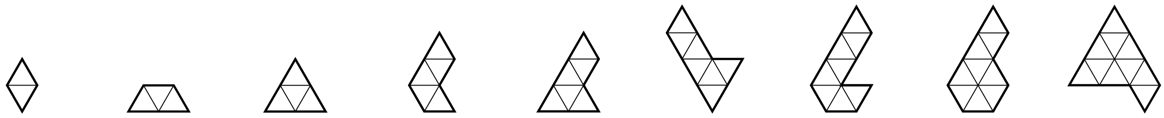
- Dans celle de la page 16, l'élève construit un carré magique (à partir d'un calcul littéral) ; ensuite, en prenant des rectangles de longueurs celles du carré construit, il vérifie qu'il obtient un même modèle, un rectangle de longueur 15.
- L'activité de la page 126 permet à l'élève de construire un carré magique d'ordre 3 (après une décomposition de 15 en une somme de trois entiers) puis de construire un carré magique géométrique en remplaçant chaque valeur numérique du carré magique par la pièce (issu du carré C57) dont l'aire est égale à cette valeur.

2.2.2 Aire et périmètre (et proportionnalité et fractions)

La construction des carrés C0-1 et C0-2 permettent, à la page 41 et suivantes pour le premier et 50 pour le second, un travail assez classique sur les aires et les périmètres.

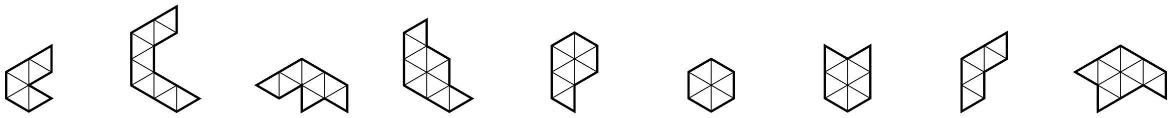
Les carrés C8 et C10 ont la particularité est d'utiliser des triangles équilatéraux accolés, ce qui permet un travail plus original sur ces deux notions, travail qui porte donc plus sur le sens des notions que sur des applications numériques de formules. Cela explique par ailleurs la présence de fiches travaillant la proportionnalité et les fractions.

En particulier, les neuf pièces du carré C8 sont liées aux valeurs du tableau ci-dessous :



Aire	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Périm.	4	5	6	7	8	9	10	9	10

et celles du carré C10 par le suivant :



Aire	6	10	8	10	8	6	8	6	10
Périm.	8	12	10	10	8	6	8	8	10

Divers supports (qui sont vécus comme plus ludiques par les élèves !) sont proposés :

- deux Saute-grenouille (dont le principe est présenté page 215), pages 59 et 60, en travail individuel ;
- un Périmaire (dont le principe est présenté page 216) avec ses cartes en page 75 et suivantes, pour jouer à plusieurs ;
- deux jeux de dominos, commencés en page 78 et en page 82, pour jouer en groupes ;
- deux MosaColla (dont le principe est présenté page 217), page 85 et suivantes, pour jouer par groupes de quatre ;
- trois labyrinthes, pages 97 et suivantes.

2.2.3 Transformations du plan : symétries axiale et centrale, rotation, translation et pavages

De multiples fiches proposent des activités sur les transformations du plan que sont la symétrie axiale, la symétrie centrale, la rotation, la translation (et les pavages).

Dans ces fiches, l'élève non seulement construira des images par ces transformations avec les outils de géométrie usuels mais aussi construira ou caractérisera ces transformations (axe, centre, ...).

Deux variables didactiques ont été utilisées : la position de l'axe ou de centre du symétrie et le type de papier.

- Pour la première,
  - dans le cas d'une symétrie axiale, d'une part, l'axe sera « horizontal », « vertical » ou « oblique » et d'autre part, l'axe aura une intersection ou pas avec la figure de départ ;
  - dans le cas d'une symétrie centrale, le centre sera, d'une part, en-dedans de / sur le bord de / en-dehors de la figure et, d'autre part, sur un nœud du quadrillage (le cas échéant) ou pas.
- Pour la seconde, l'élève travaillera sur un papier quadrillage carré, sur un quadrillage pointé hexagonal ou sur papier blanc.

Deux Vrai-Faux sont proposés en pages 93 et 94 d'une part et 113 et 114. Chacun d'eux est doublé, avec la particularité d'avoir les mêmes énoncés dans les deux fiches mais d'obtenir deux dessins différents car il n'y a pas les mêmes réponses (4) ; cela favorise aussi le travail oral d'argumentation dans une correction !

2.2.4 Transformations du plan : agrandissements

L'activité de la page 115 propose de travailler sur les agrandissements à l'échelle 2, 4 et 8 d'une pièce du carré C18 : la forme utilisée est le trimino en forme de L.
Une activité de coloriage (avec un minimum de couleurs, avec ou sans symétrie) complète cet travail d'agrandissement.

Celle de la page 135 propose de travailler sur les agrandissements à l'échelle 4 de deux pièces du carré C62. (Chaque pièce pouvant être reproduite à l'échelle 4 avec les seize pièces du carré C62, le travail peut être poursuivi avec les quatorze autre pièces !)

(4). Cela permet de limiter la copie d'un élève sur son voisin de table !

2.2.5 Tableur, calcul littéral et algébrique et programmation

L'activité de la page 118 porte sur l'utilisation d'une feuille de calcul automatisée pour trouver les caractéristiques du carré magique plus-que-parfait et diabolique d'ordre 4 lié au carré géomagique C46.

L'activité de la page 119 propose de conjecturer quelques propriétés de tout carré magique puis de les démontrer.

L'activité de la page 120 propose, en remplaçant dans une expression algébrique les lettres par leurs valeurs numériques, de retrouver les carrés magiques associés à deux carrés géomagiques (l'un est le carré C46).

L'activité des pages 121 et suivantes utilise le langage Python : l'élève va dans un premier temps vérifier que le carré donné est bien plus-que parfait et, dans un second temps, trouver toutes les configurations dont la sommes des entiers des quatre cases vaut 34.

2.2.6 Des constructions et des programmes de construction

L'activité de la page 49 propose de construire les neuf pièces du carré géomagique C0-2.

L'activité de la page 71 porte sur la construction, à l'aide des outils usuels de géométrie et d'un programme de tracé, des neuf pièces du carré géomagique C10.
L'enseignant pourra distribuer les programmes à différents élèves : en réunissant leurs constructions, ils obtiendront toutes les pièces.

Les activités des pages 73 et 74 portent sur la construction, à l'aide des coordonnées (éventuellement négatives) dans un repère, de trois possibilités de recouvrir un modèle du carré géomagique C10. Cette activité permet de travailler avec un repère original et peu utilisé : il a deux axes non perpendiculaires (plus particulièrement, il y a un angle de 60° entre les deux axes, puisque les pièces de ce carré est formé de triangles équilatŕaux accolés).

Les activités des pages 95 et 96 ont pour support le logiciel Scratch pour dessiner une solution ; les blocs de définition seront utilisés.

2.2.7 Des activités de recherche et des défis (plus dans un temps extra-scolaire)

En pages 61 et 62, il y a une ouverture sur les trilosanges, le losange étant le modèle du carré géomagique C8. L'élève cherche tous les trilosanges puis recouvre un trilosange avec les trois pièces d'un alignement d'un carré géomagique.

En page 63, l'élève a pour défi de recouvrir un hexagone régulier avec les neuf pièces d'un carré géomagique.

Un jeu de logique, page 100 (inspiré du jeu japonais « wanororu », « un ou tous », d'Inaba Naoki), propose de compléter des grilles à l'aide de pièces du carré C10.

Une activité, en page 124, propose de retrouver les quatre-vingt-six dispositions donnant la somme 34 avec le carré géomagique C46.

Le carré C57, en pages 127 et suivantes, n'est proposé aux élèves volontaires qu'en version défi. Il est recommandé d'utiliser les pièces du jeu (et en deux exemplaires, s'il y a deux joueurs).
Si le défi est en mode « 1 joueur », il y a deux possibilités. La première est de compléter la fiche de recherches au gré des découvertes. La seconde est de s'imposer l'une des huit dispositions de pièces possibles et l'un des douze modèles possibles : deux dés illustrés proposés en pages 130 et 131 donneront les supports imposés.
Si le défi est en mode « 2 joueurs », les deux dés sont lancés et donnent le même couple disposition/modèle aux deux joueurs : qui sera le premier à obtenir une solution ?
Sur la page 129, il y a les pièces à découper : la manipulation facilitera la résolution. Éventuellement, la fiche pourra être agrandie au coefficient 141 % (du format A4 au format A3).

2.2.8 Un travail sur la numération

En page 116, une activité porte sur l'écriture des nombres, à partir du carré C18, en français. . . et en anglais !

2.2.9 Deux réseaux

En pages 228 et 229 se trouvent des réseaux, quadrillés à maille carrée (de côté 0,8 cm, tout comme le côté des grands carreaux des cahiers des élèves) sur la première et pointé à maille triangulaire sur la seconde. Ils permettent de construire de nouveaux supports pour d'autres activités.

2.3 Liste des notions ou thèmes

Le tableau ci-dessous donne, pour chacun des huit carrés géomagiques utilisés dans la brochure, les notions ou thèmes qui lui sont associés.

	C0-1	C0-2	C4	C8	C10	C18	C46	C57	C62
Manipulation	✔	✔	✔	✔	✔	✔		(✔)	
Symétrie axiale	✔				✔	✔			
Symétrie centrale	✔				✔	✔			
Rotation	✔				✔				
Transformation du plan	✔								
Pavage	✔								
Agrandissement						✔		✔	
Programme de construction					✔				
Aire	✔	✔		✔	✔				
Périmètre		✔		✔	✔				
Fractions					✔				
Algèbre	✔						✔		
Calcul littéral							✔		
Tableur							✔		
Langage Python							✔		
Logiciel Scratch							✔		
Numération						✔			
Activité de recherche				✔			✔	✔	✔
Coloriage	✔			✔		✔			✔
Pour plusieurs joueurs					✔			(✔)	
Sur maille carrée	✔	✔	✔			✔	✔	✔	✔
Sur maille triangulaire				✔	✔				

3 Solutions et compléments

Les solutions de toutes les activités et des compléments sont donnés en fin de document.

Remarque. Lorsque cela a été possible, et pour minimiser le nombre de photocopies de corrigés, ceux-ci ont été reproduits en nombre maximum sur la même page.

4 Thème des activités par leur titre

Carrés géomagiques : première approche

Carré géomagique : première approche

IREM de Lyon

1. Calcule les valeurs dans le carré ci-dessous obtenues en prenant $a = 3$, $b = 1$ et $c = 5$.

$c + a$	$c - a - b$	$c + b$
$c - a + b$	c	$c + a - b$
$c - b$	$c + a + b$	$c - a$

Vérifie que les sommes des trois nombres en ligne, en colonne et en diagonale sont toutes égales.

2. Construis dans le carré ci-dessous les rectangles associés : une dimension est 3 et l'autre est la valeur que tu viens de calculer.

3. Vérifie qu'en juxtaposant les trois figures obtenues en ligne, en colonne et en diagonale, tu trouves le même modèle rectangulaire (un rectangle de dimensions 15×3).

- en ligne

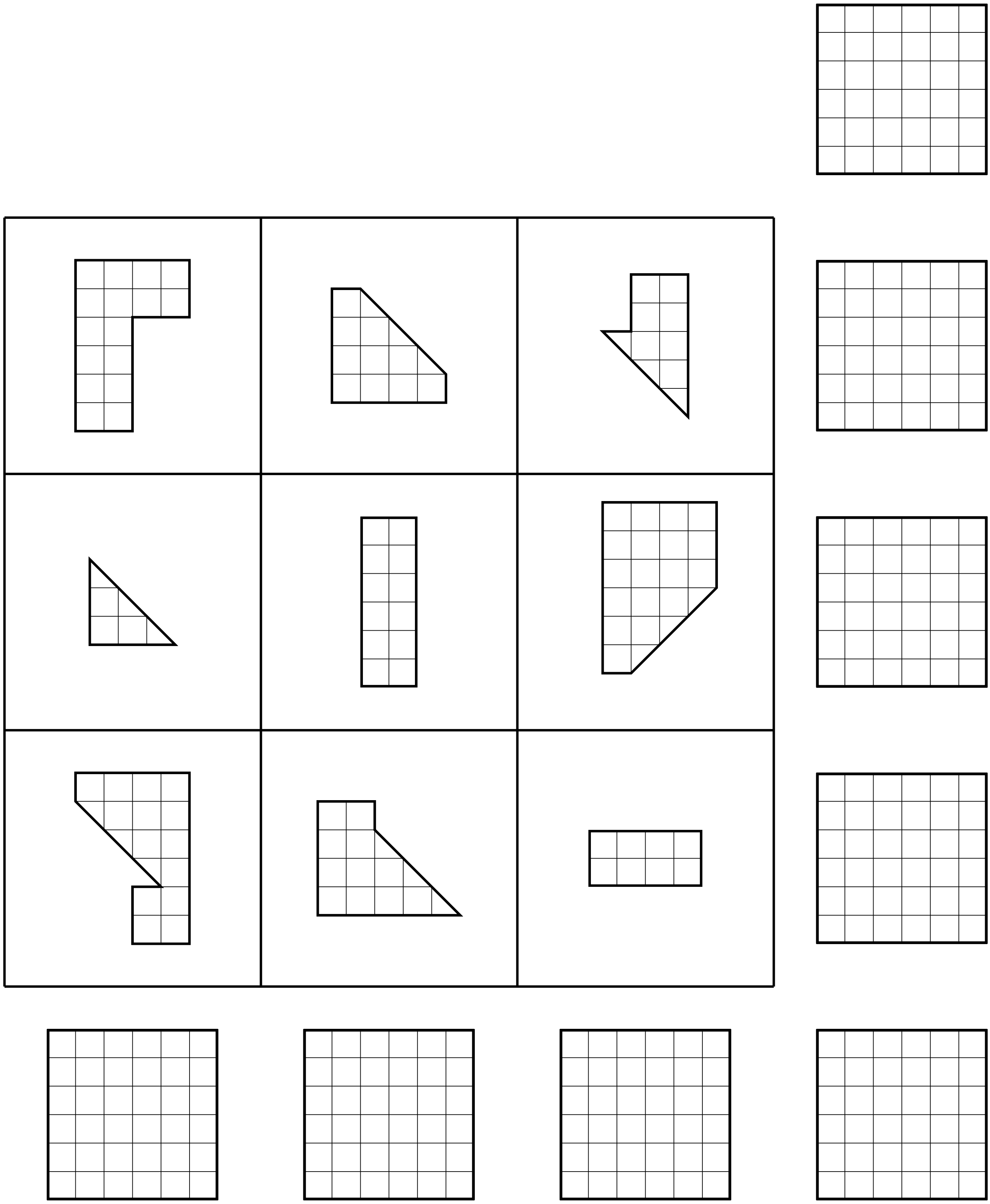
- en colonne

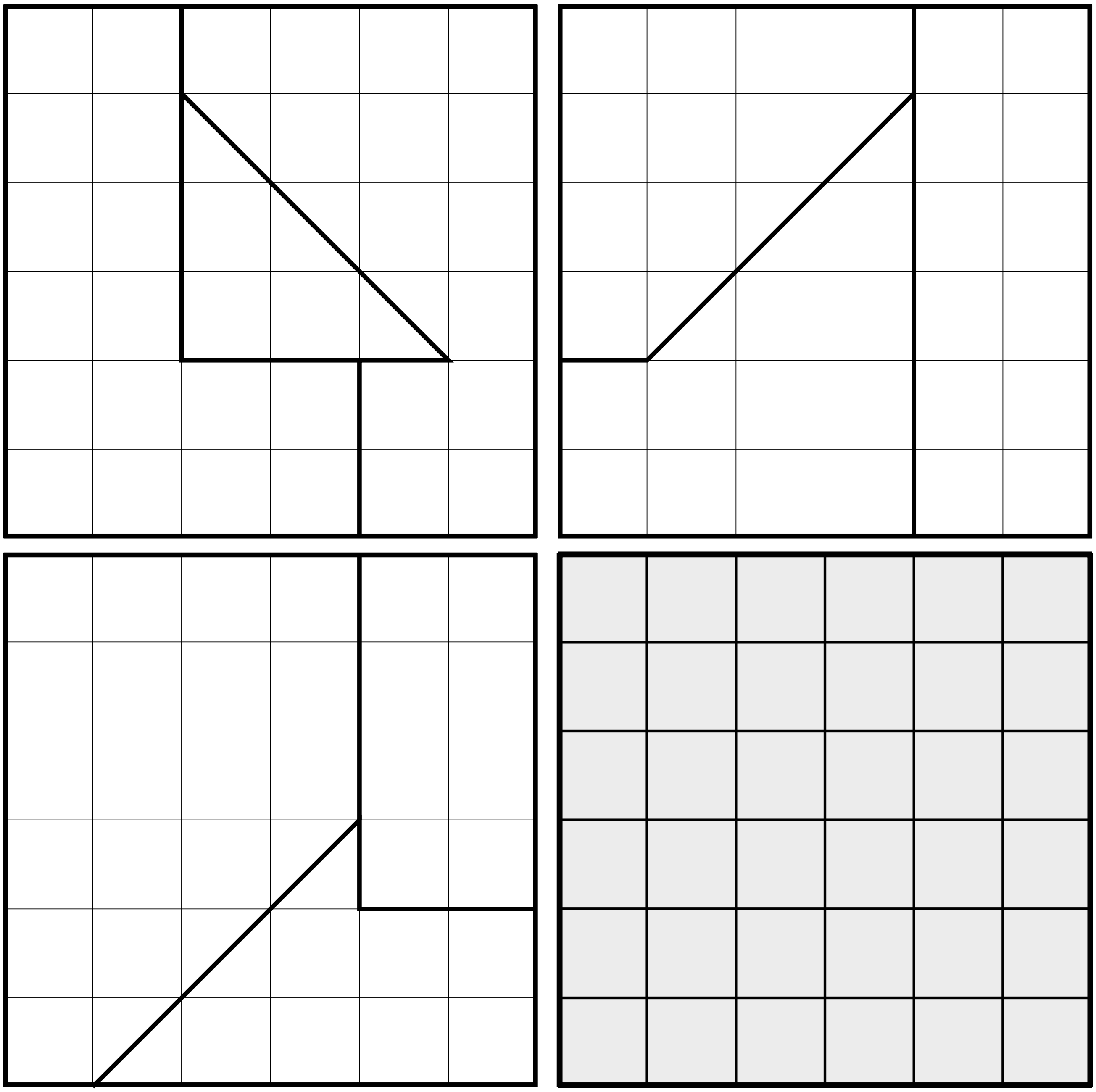
- en diagonale

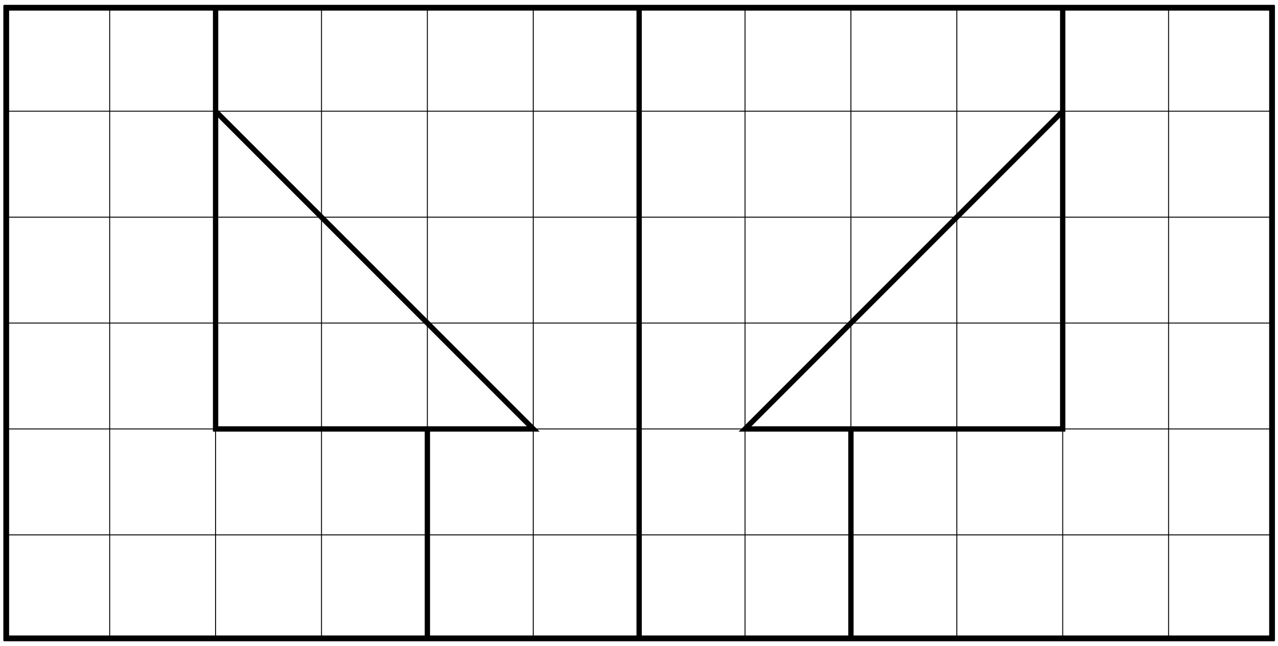
D'après `http://www.geomagicsquares.com/intro.php`

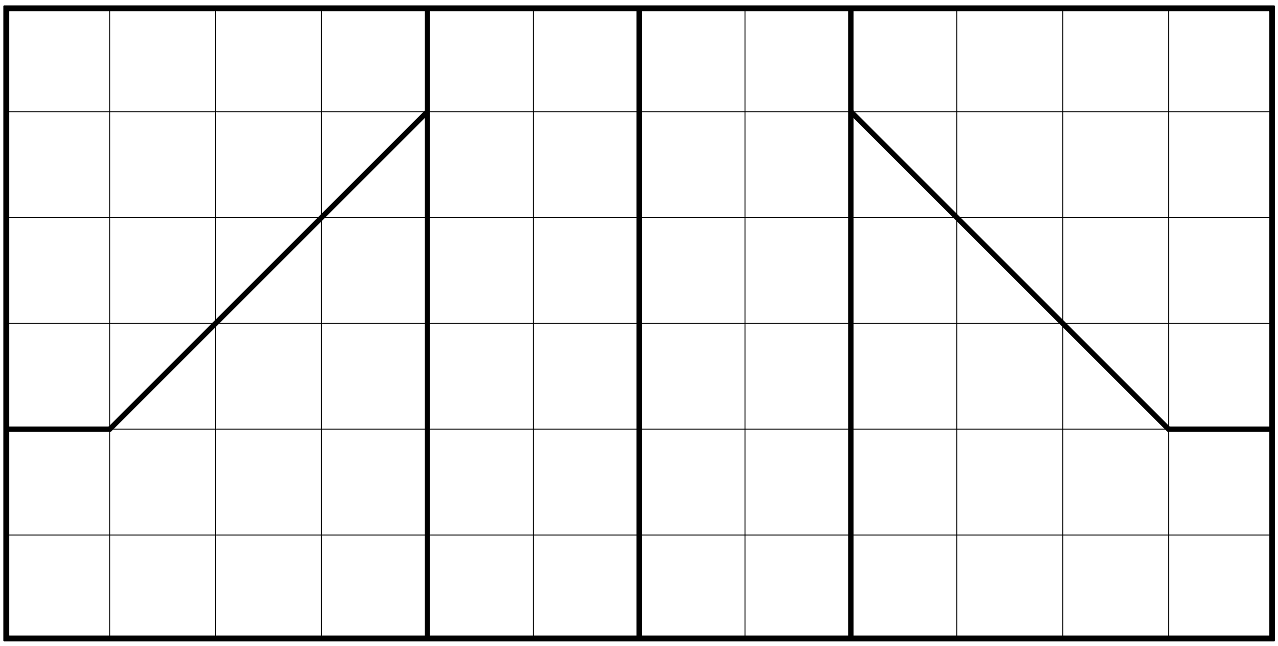
Carrés géomagiques : matériel et activités

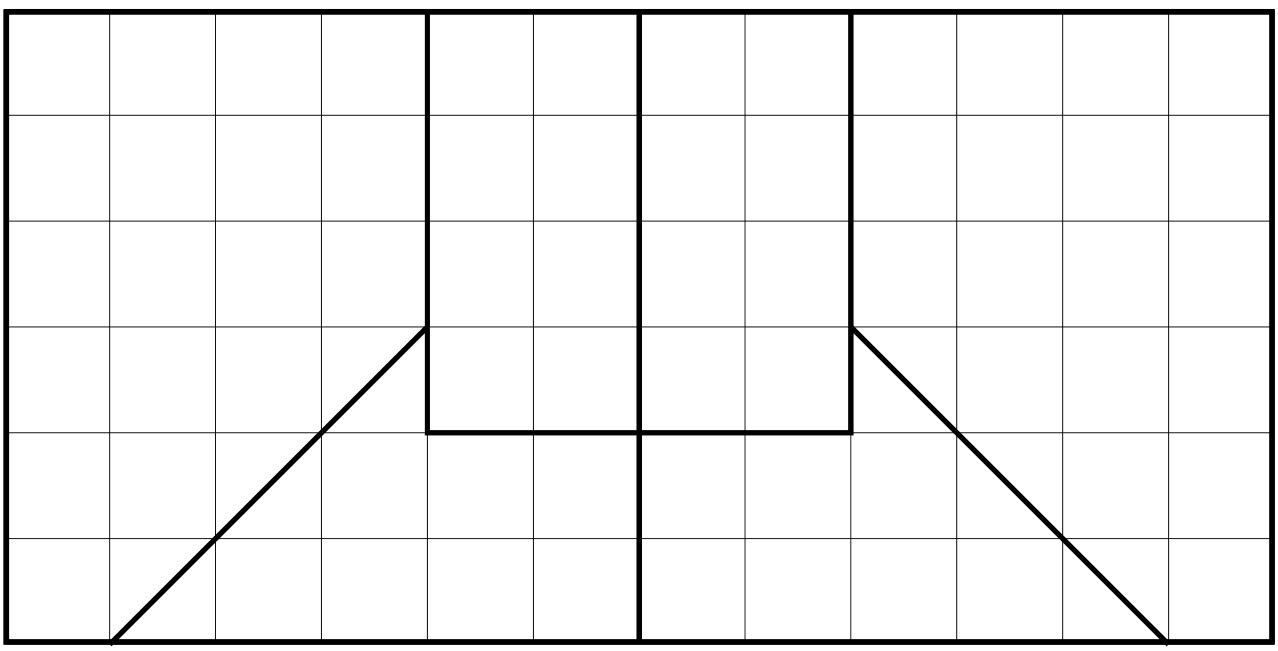
Carré géomagique C0-1







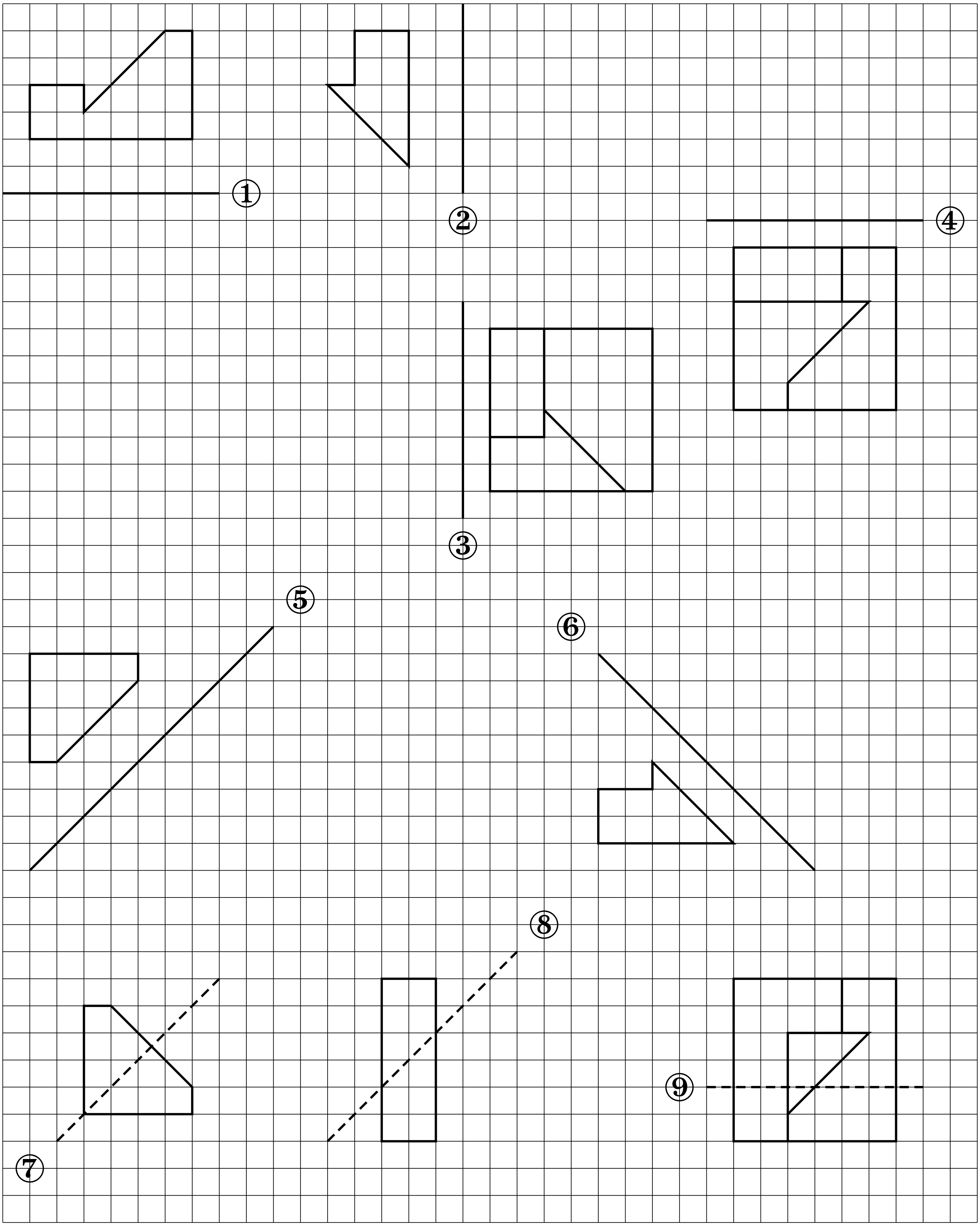




C0-1 : symétrie axiale (1)

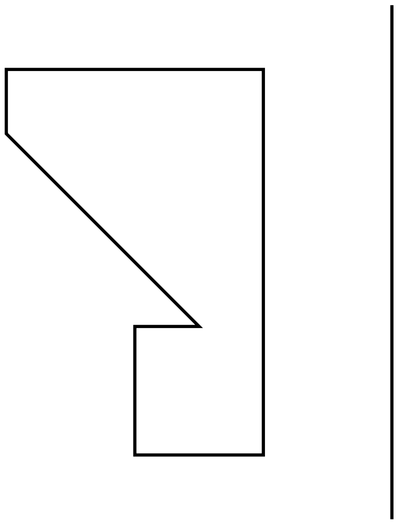
IREM de Lyon

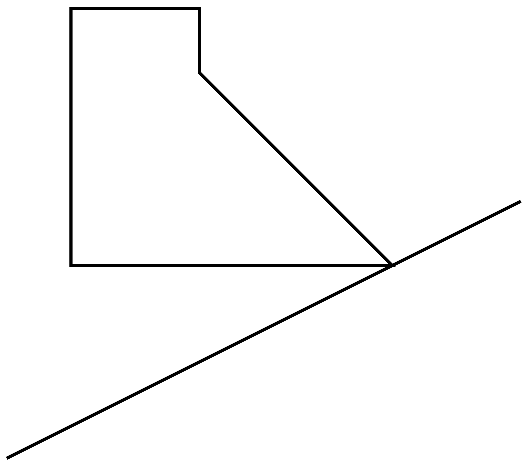
Dessine les figures symétriques par rapport aux axes.

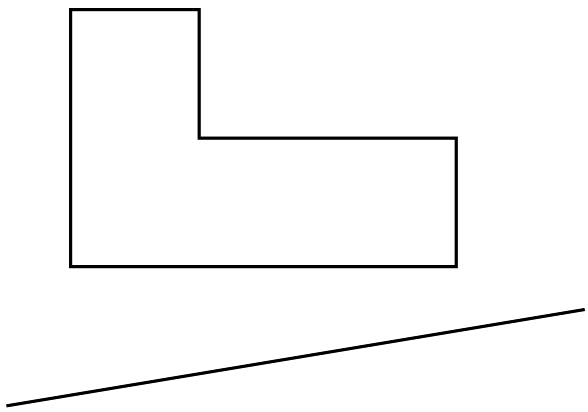


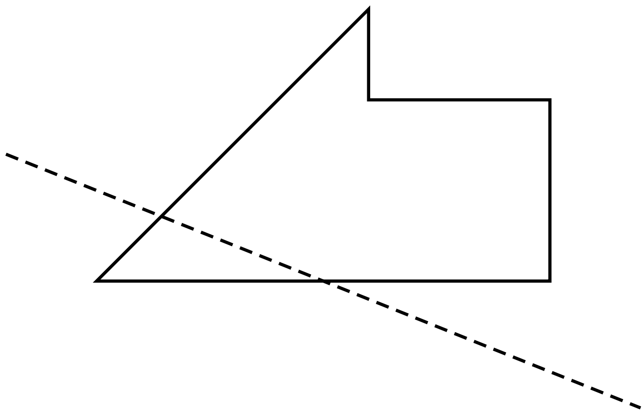
C0-1 : symétrie axiale (2)

Dessine les figures symétriques par rapport aux axes.



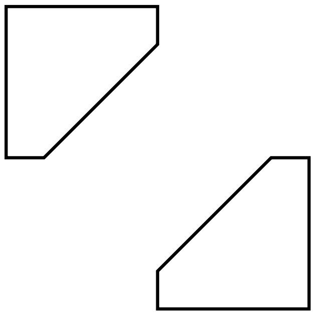




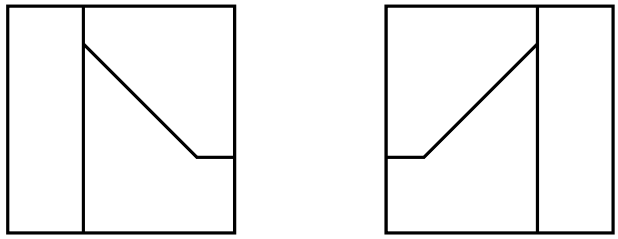


C0-1 : symétrie axiale (3)

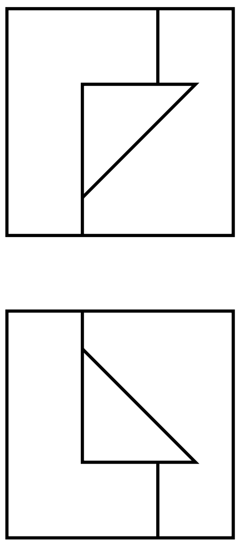
Trace l'axe de symétrie.



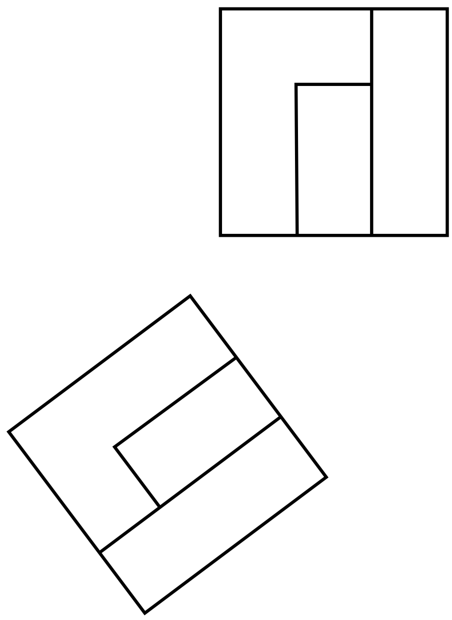
①



②

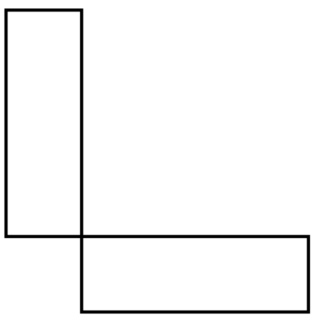


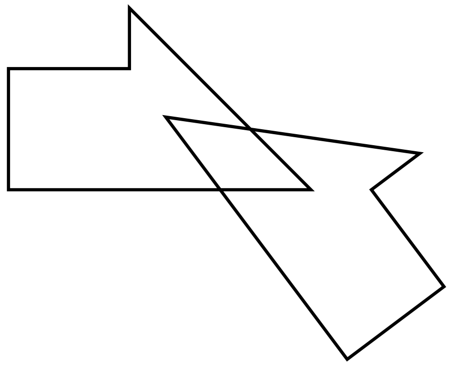
③



④

⑤

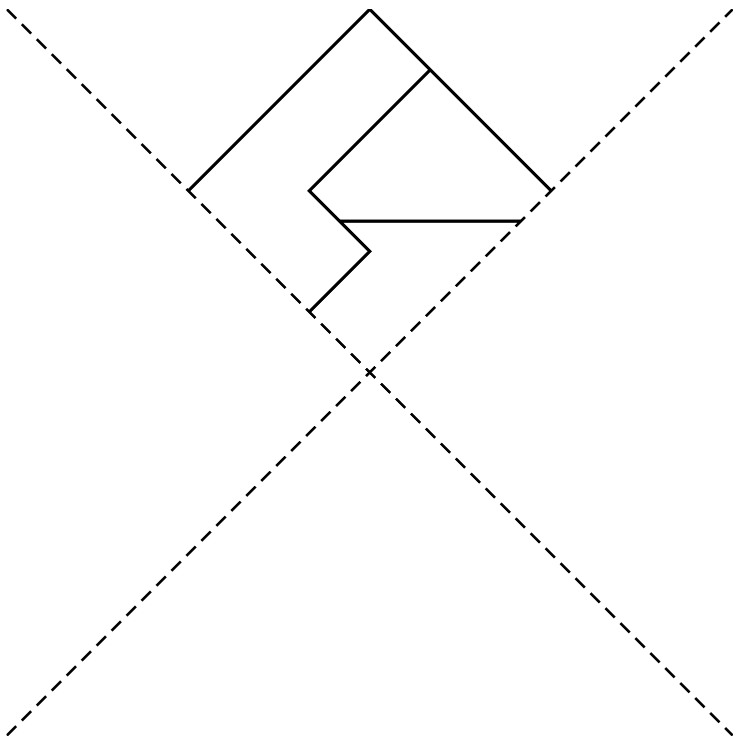


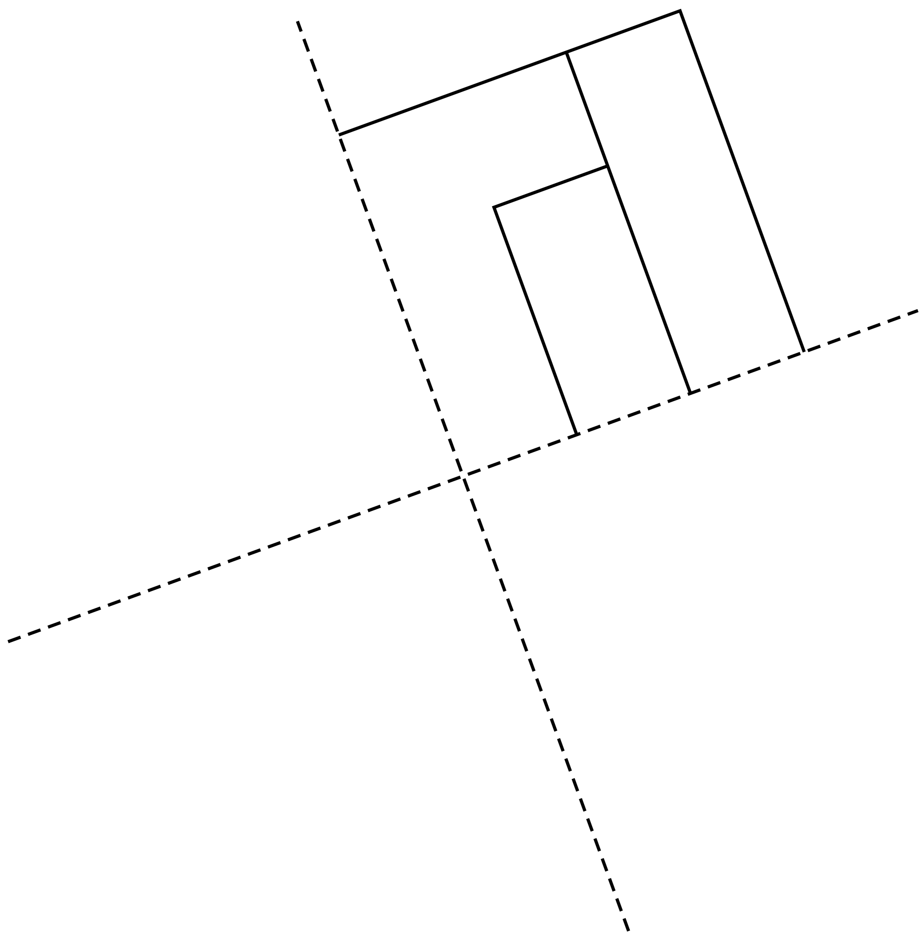


⑥

C0-1 : symétrie axiale (4)

Dessine les carrés symétriques par rapport aux deux axes.

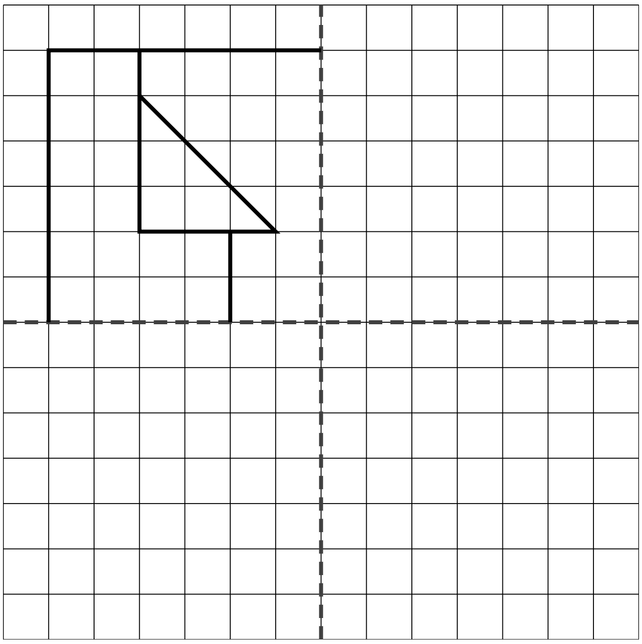


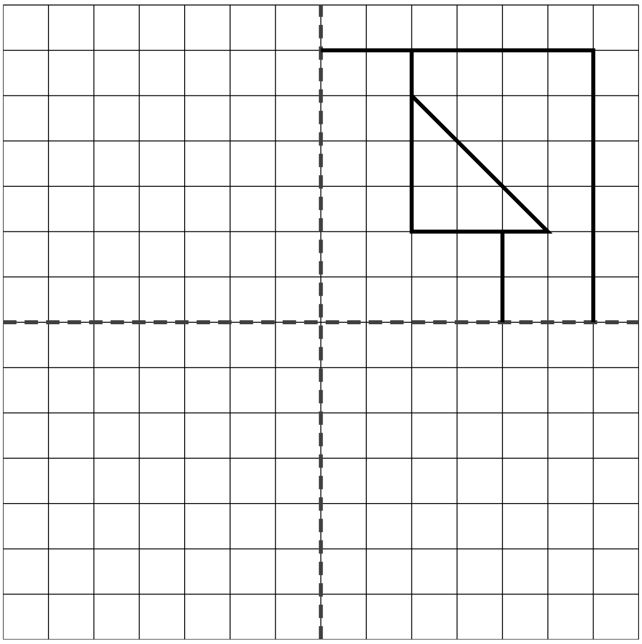


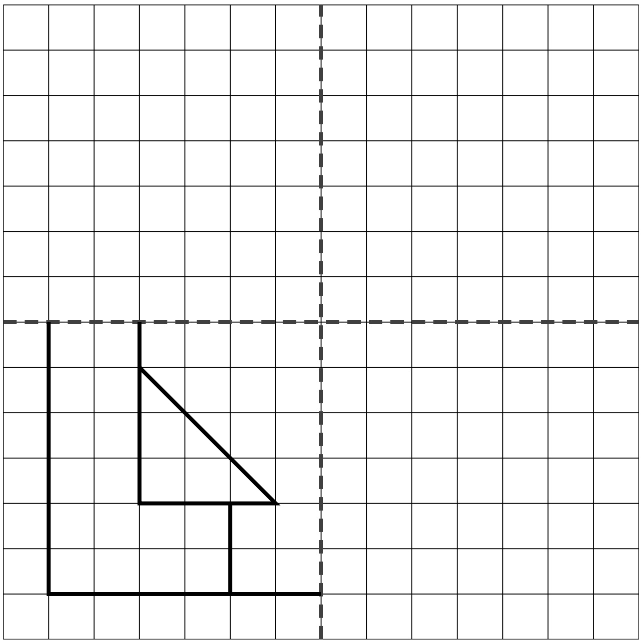
C0-1 : napperons (1)

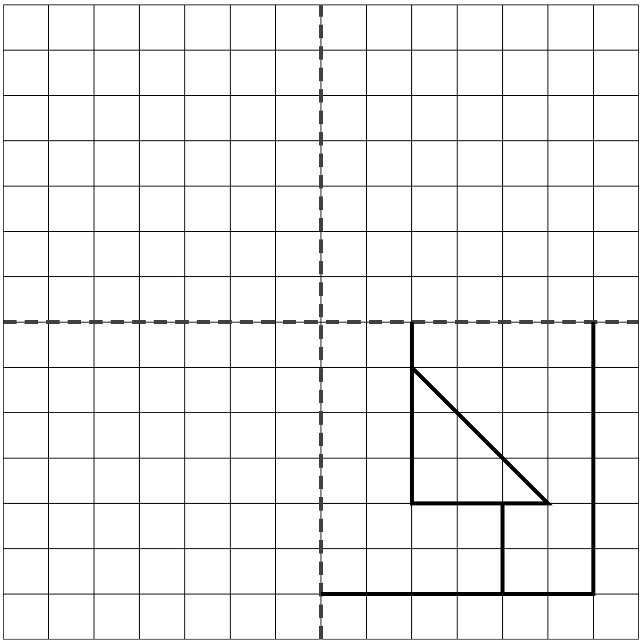
IREM de Lyon

Dessine les carrés symétriques par rapport aux deux axes.





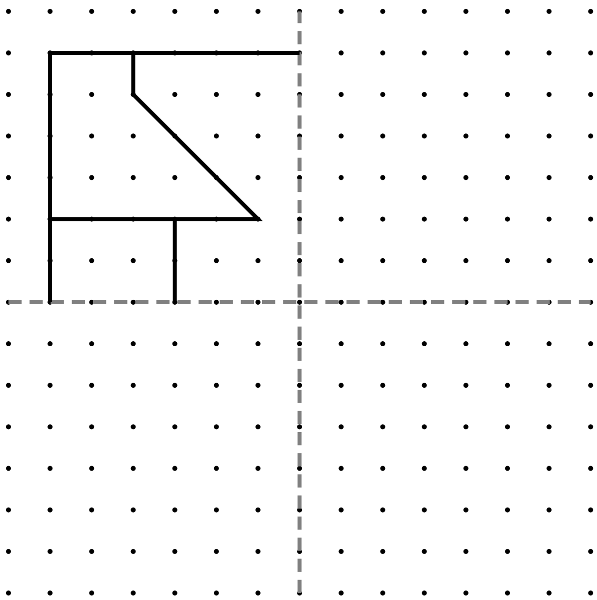


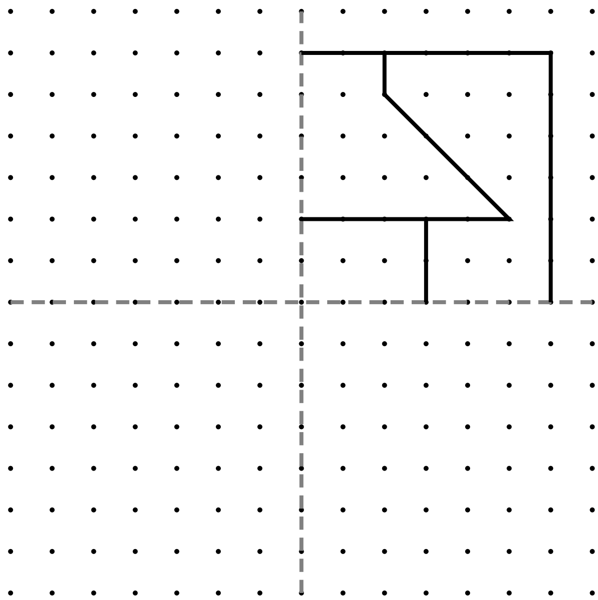


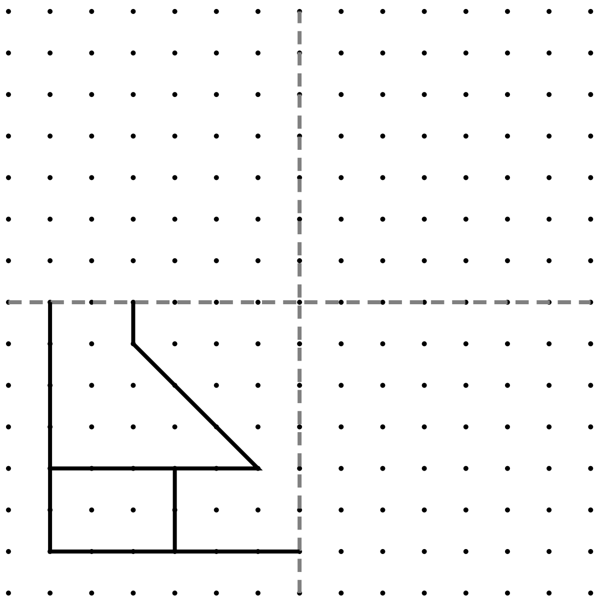
C0-1 : napperons (2)

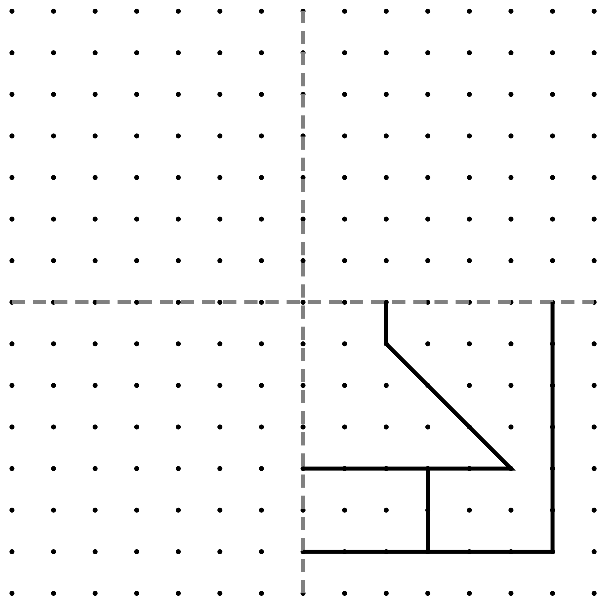
IREM de Lyon

Dessine les carrés symétriques par rapport aux deux axes.



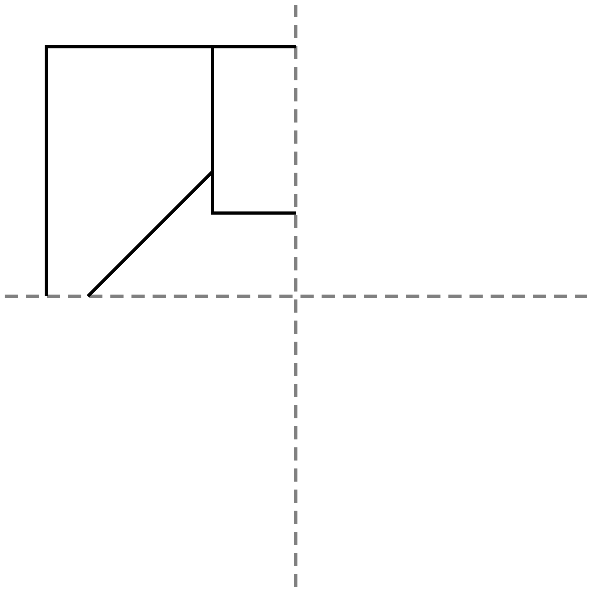


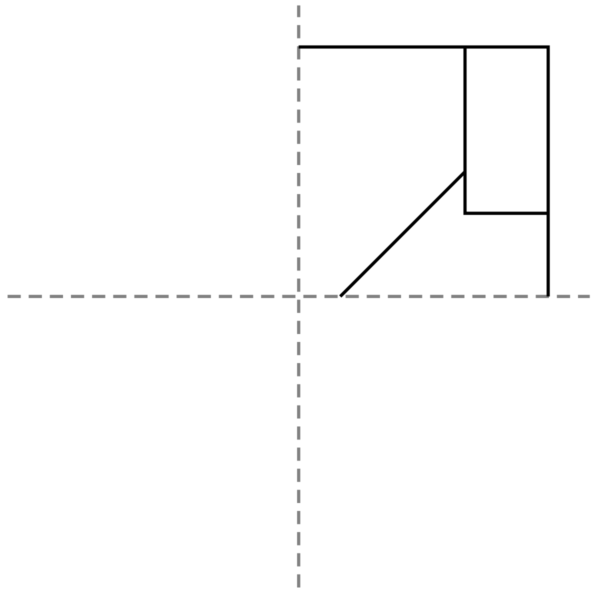


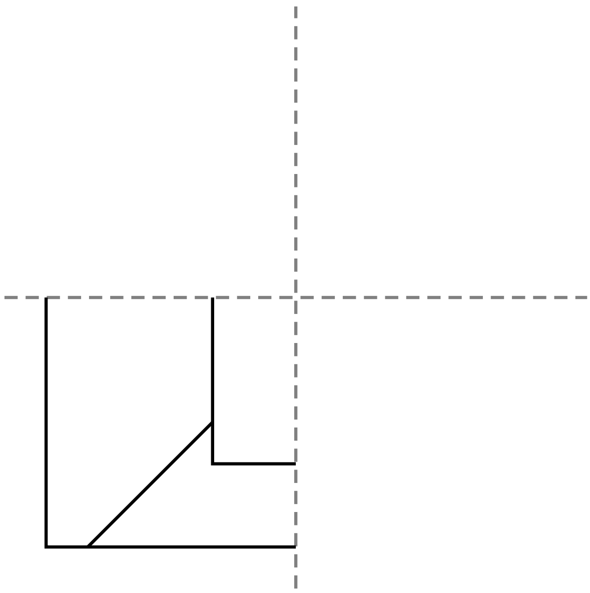


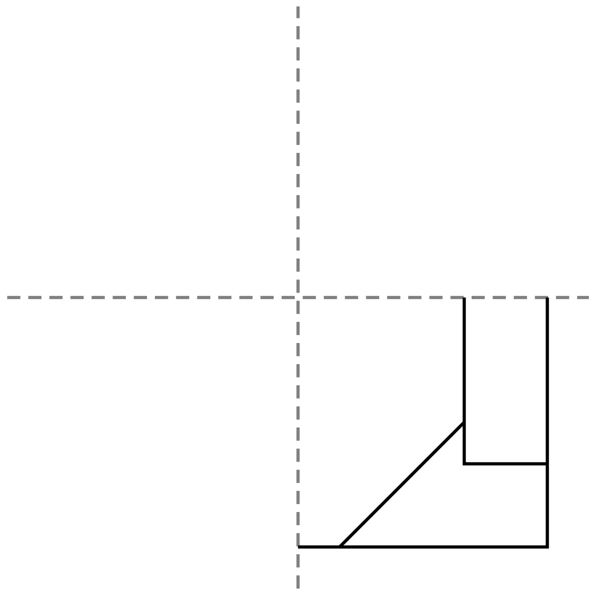
C0-1 : napperons (3)

Dessine les carrés symétriques par rapport aux deux axes.





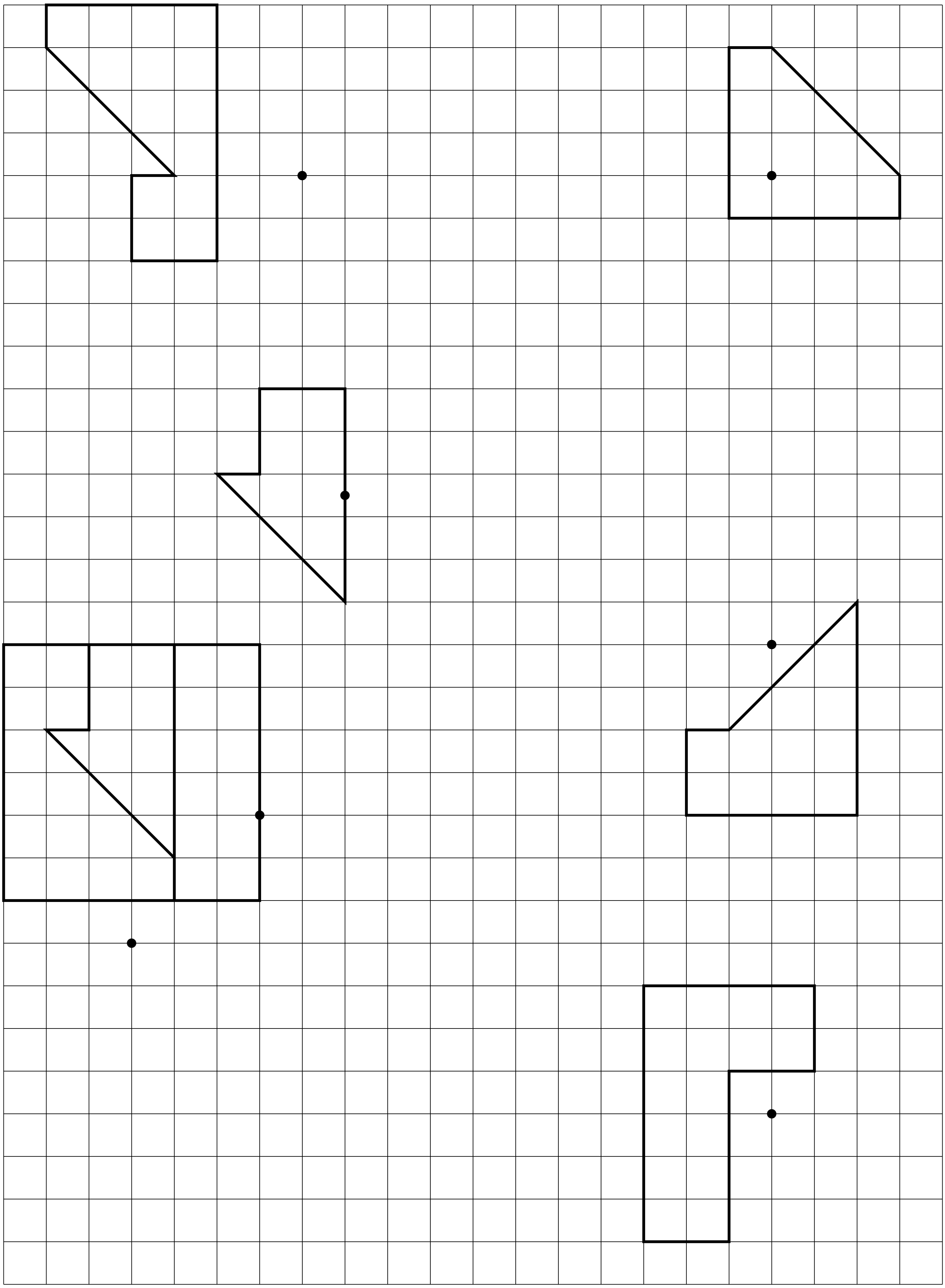




C0-1 : symétrie centrale (1)

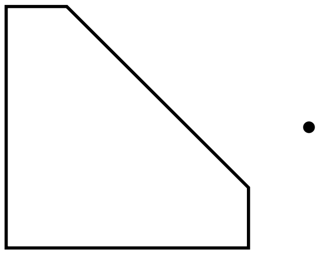
IREM de Lyon

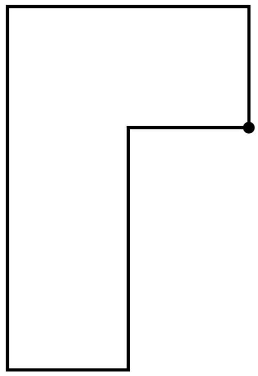
Dessine les figures symétriques par rapport aux centres.

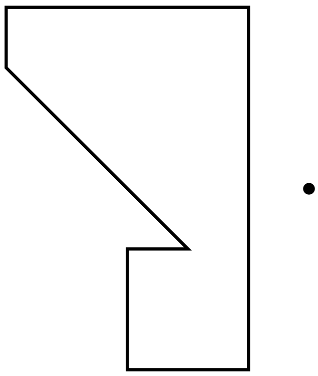


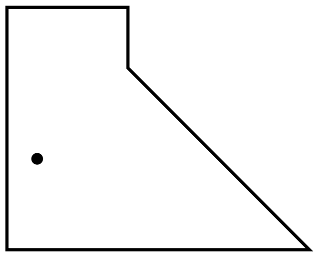
C0-1 : symétrie centrale (2)

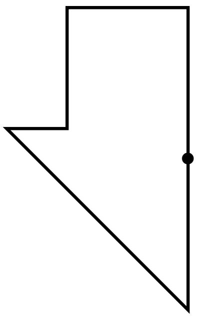
Dessine les figures symétriques par rapport aux centres.

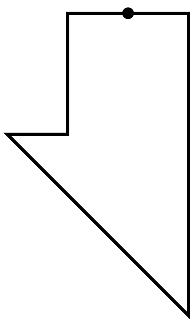






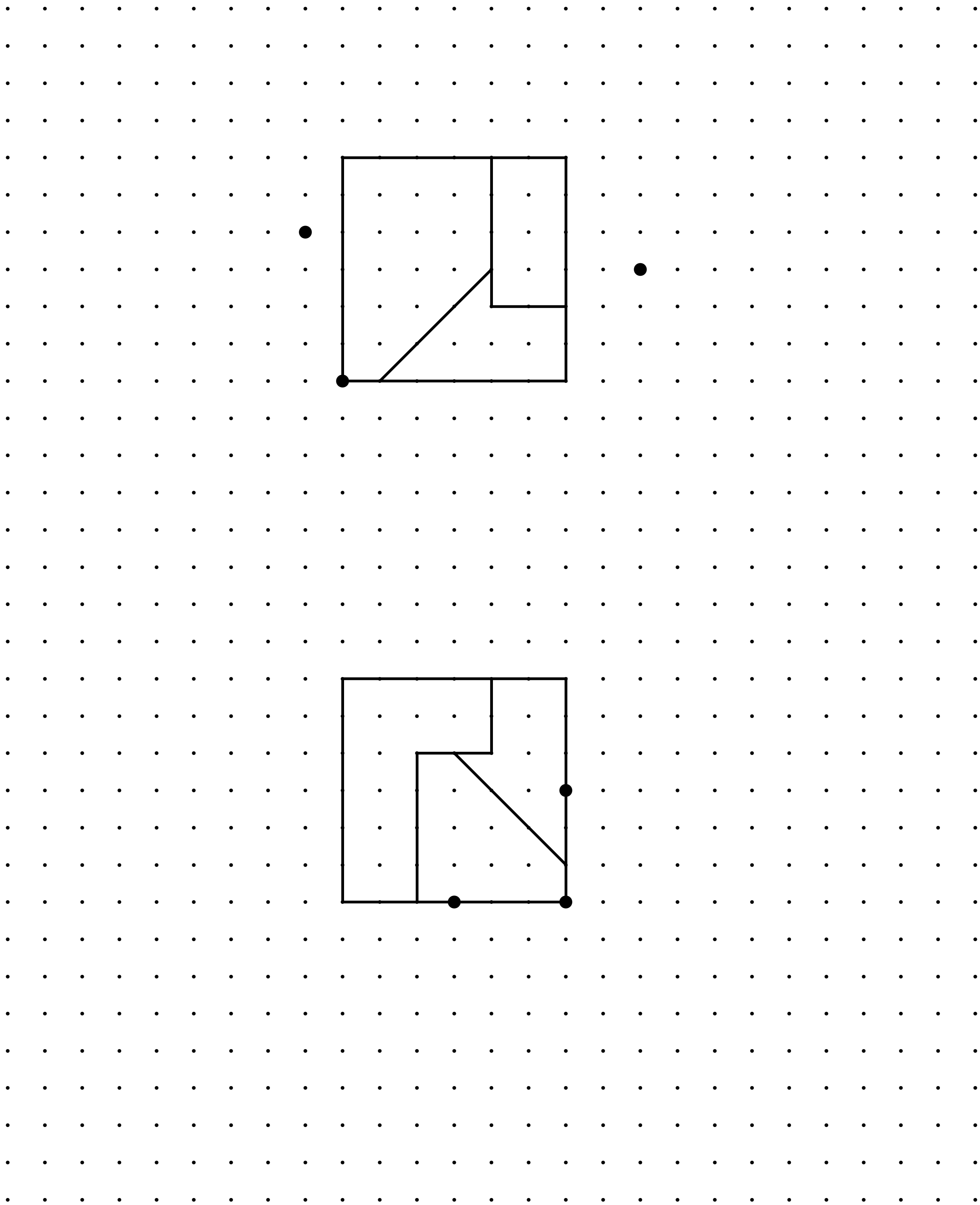






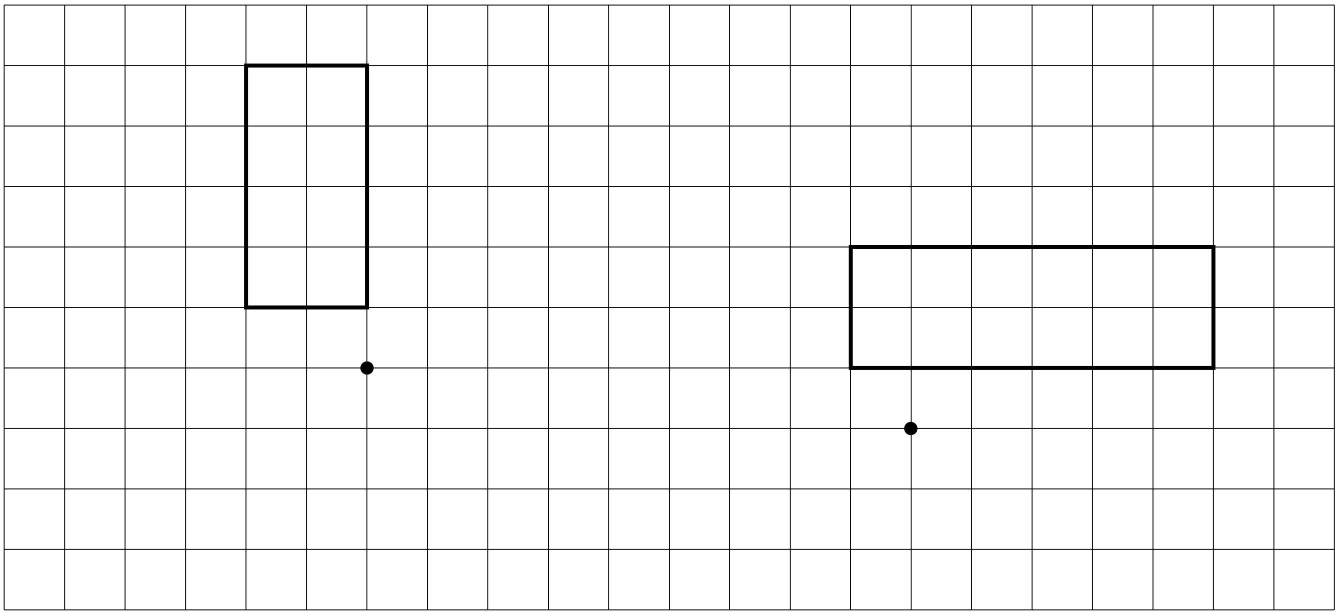
C0-1 : symétrie centrale (3)

Dessine les figures symétriques par rapport aux centres.

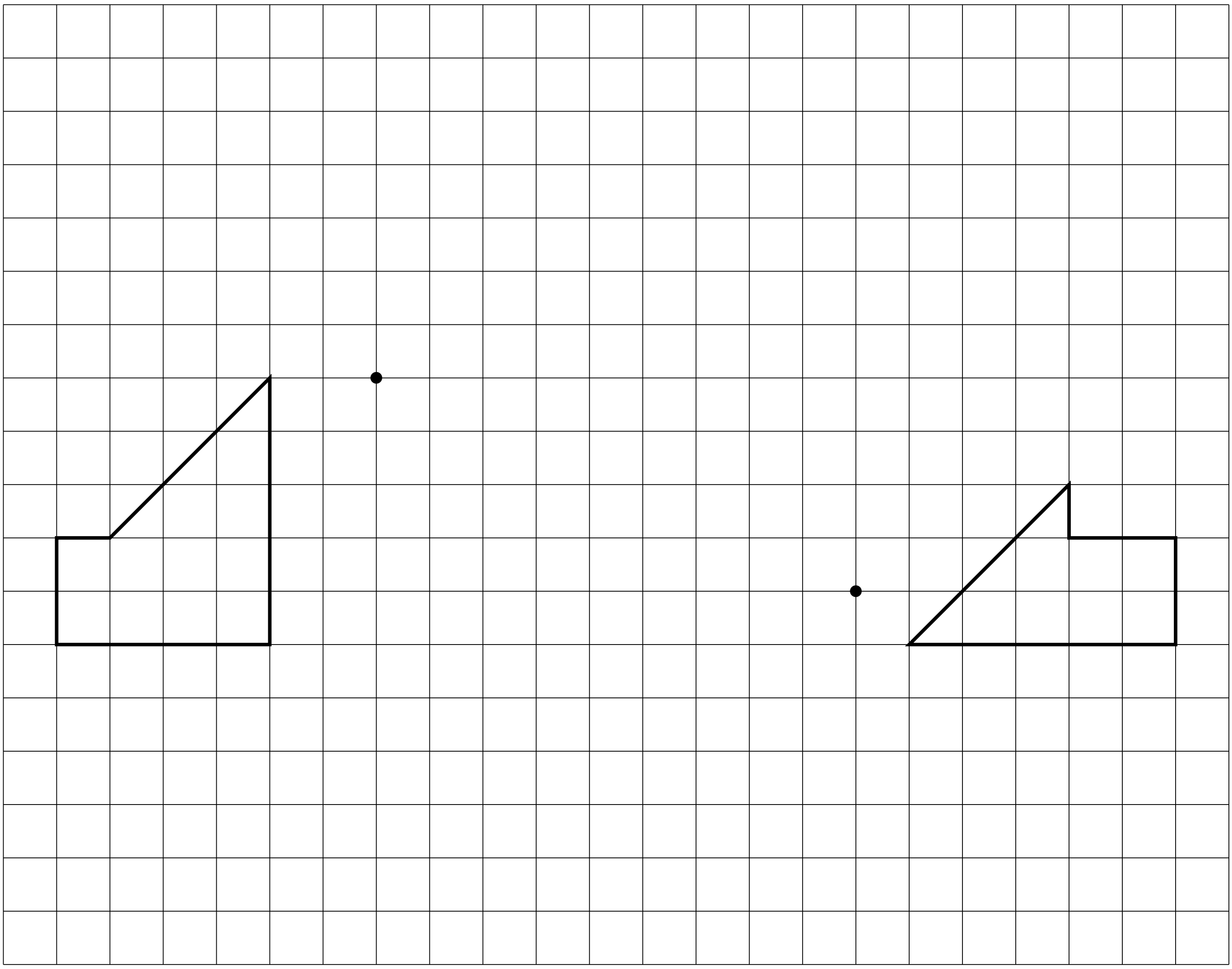


C0-1 : rotation (1)

Dessine les figures images dans la rotation d'angle 90° dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.

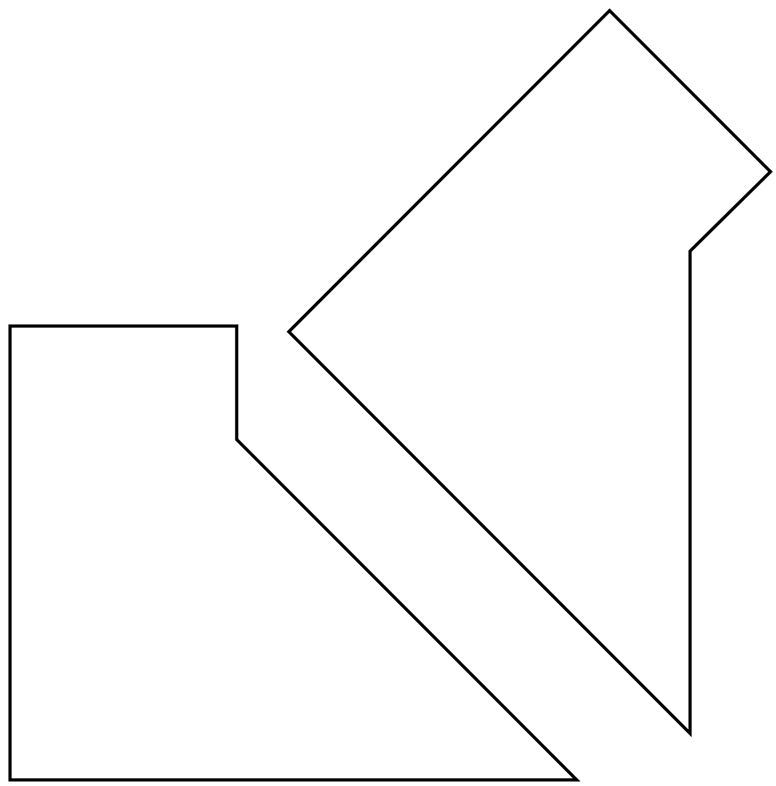


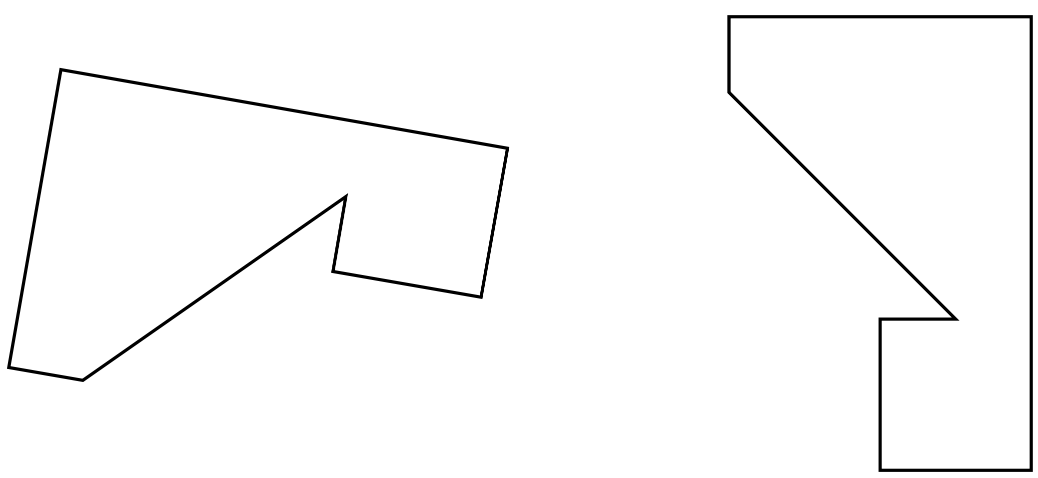
Dessine les figures images dans la rotation d'angle 90° dans le sens des aiguilles d'une montre



C0-1 : rotation (2)

Retrouve le centre O de la rotation transformant une figure en l'autre.

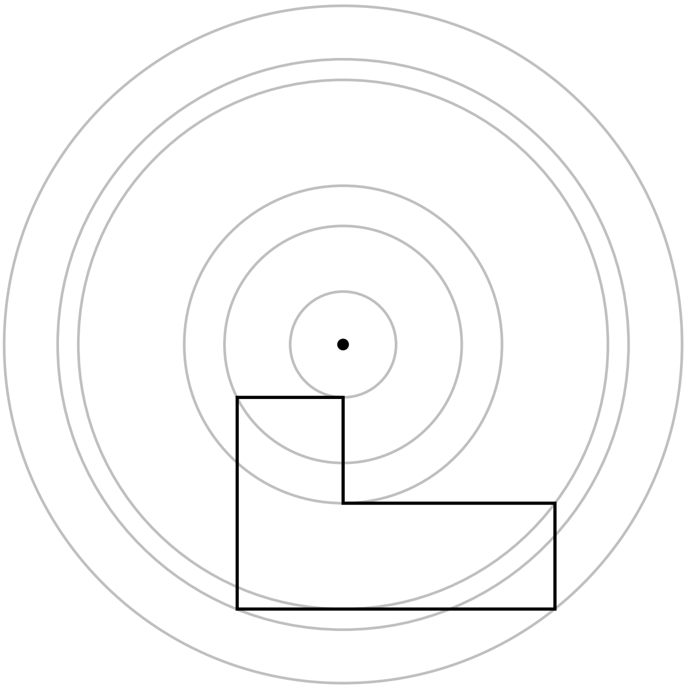




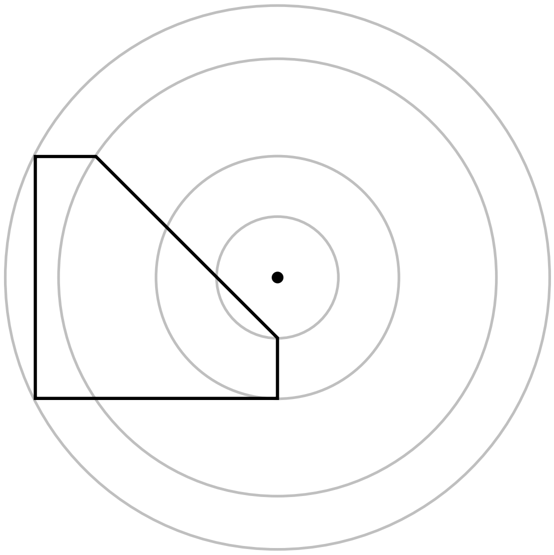
C0-1 : rotation (3)

Dessine la figure image dans la rotation. . .

d'angle 90° dans le sens des aiguilles d'une montre ;

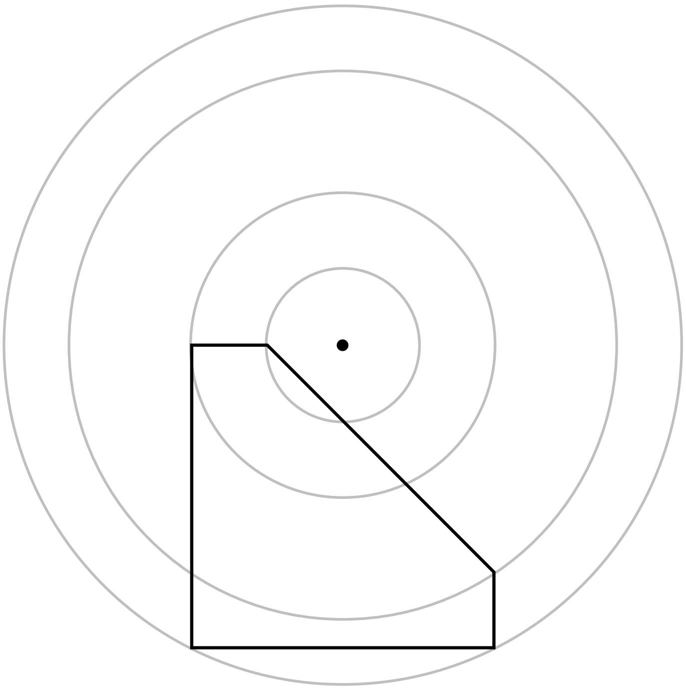


d'angle 90° dans le sens inverse des aiguilles d'une montre ;

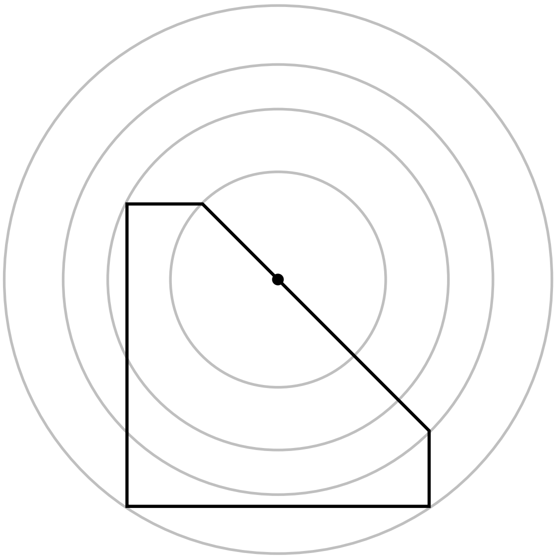


Dessine la figure image dans la rotation. . .

d'angle 30° dans le sens inverse des aiguilles d'une montre ;

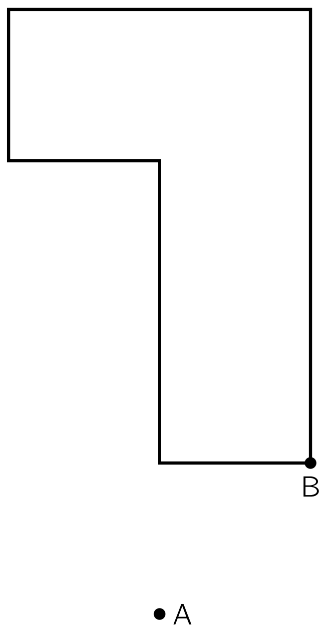


d'angle 45° dans le sens des aiguilles d'une montre.

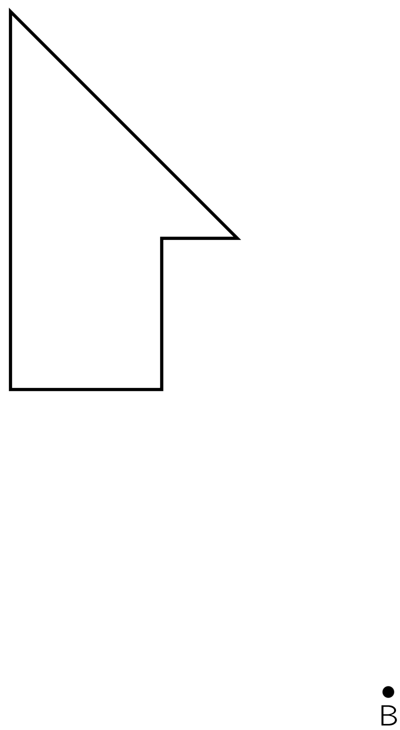


C0-1 : rotation (4)

Dessine la figure ① image dans la rotation de centre A et d'angle 60° dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.
Dessine la figure ② image dans la rotation de centre B et d'angle 60° dans le sens des aiguilles d'une montre.



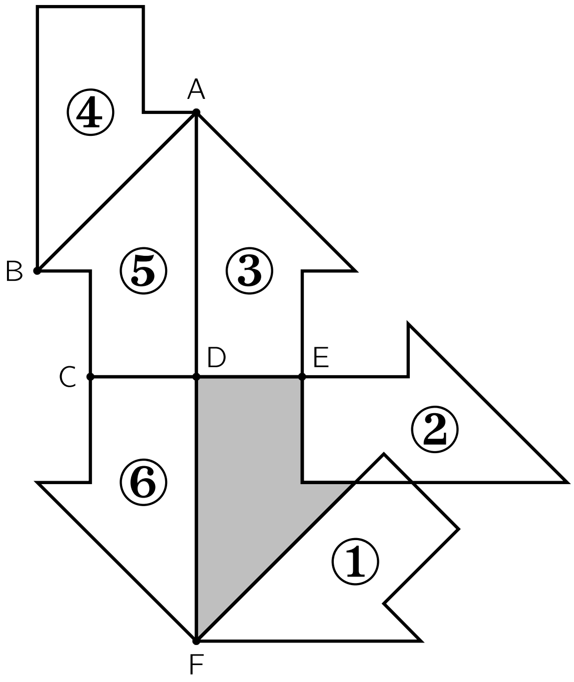
Dessine la figure ① image dans la rotation de centre A et d'angle 45° dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.
Dessine la figure ② image dans la rotation de centre B et d'angle 45° dans le sens des aiguilles d'une montre.



C0-1 : transformations (1)

IREM de Lyon

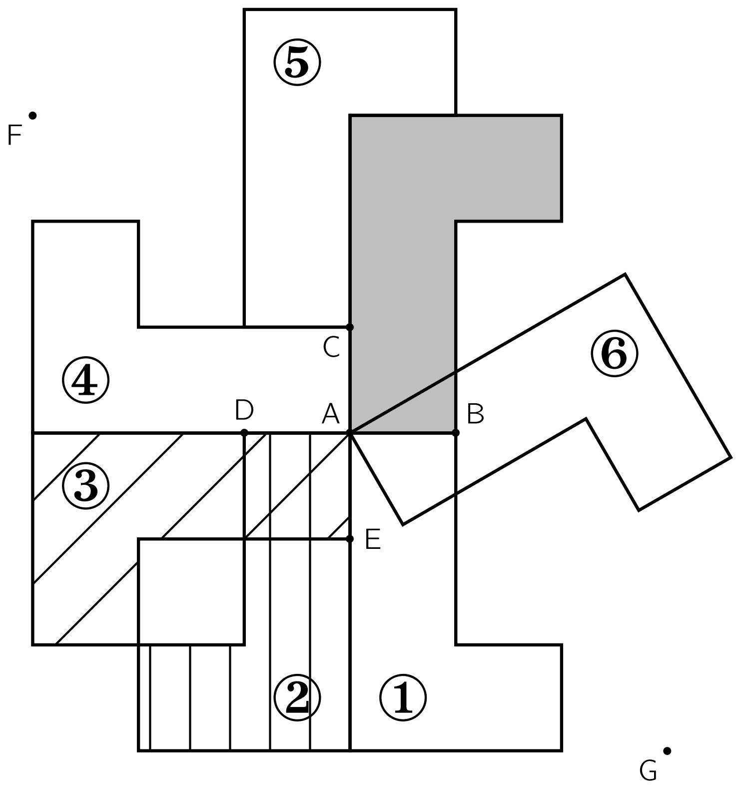
Caractérise, à l'aide des points donnés sur la figure, la transformation par laquelle on obtient chaque figure à partir de la figure colorée.



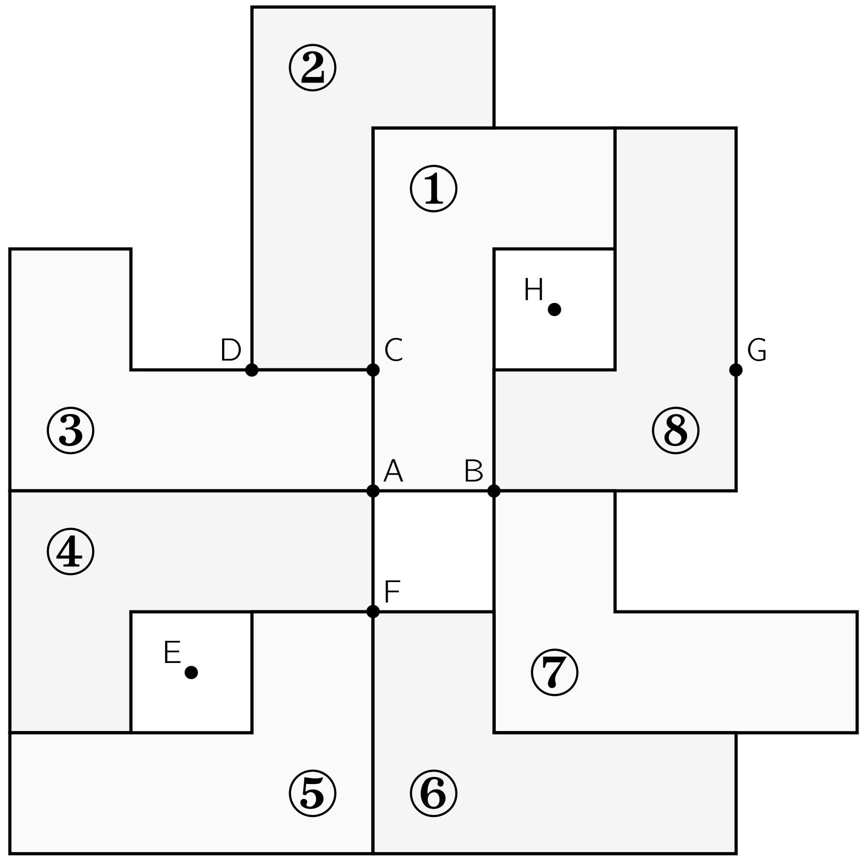
C0-1 : transformations (2)

IREM de Lyon

Caractérise, à l'aide des points donnés sur la figure, la transformation par laquelle on obtient chaque figure à partir de la figure colorée.



C0-1 : transformations (3)



À l'aide des points A, B, . . . , H :

1. caractérise chacune des huit transformations du plan qui permettent de faire la boucle suivante :

① ⟶ ② ⟶ ③ ⟶ ④ ⟶ ⑤ ⟶ ⑥ ⟶ ⑦ ⟶ ⑧ ⟶ ①

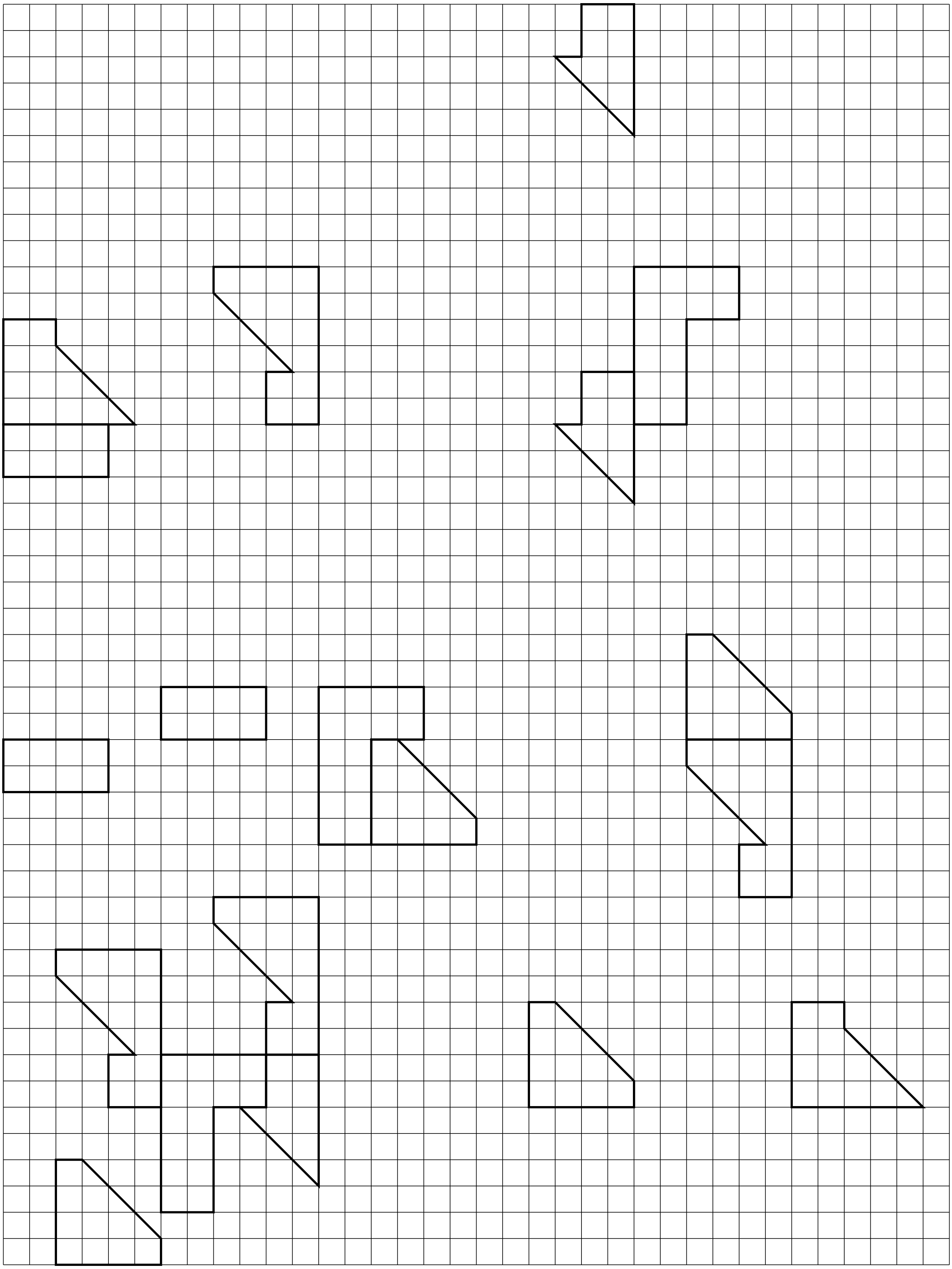
- ① ⟶ ② :
- ② ⟶ ③ :
- ③ ⟶ ④ :
- ④ ⟶ ⑤ :
- ⑤ ⟶ ⑥ :
- ⑥ ⟶ ⑦ :
- ⑦ ⟶ ⑧ :
- ⑧ ⟶ ① :

2. caractérise la symétrie qui transforme ① en ④ ;

3. caractérise la rotation qui transforme ① en ⑦.

C0-1 : pavages (1)

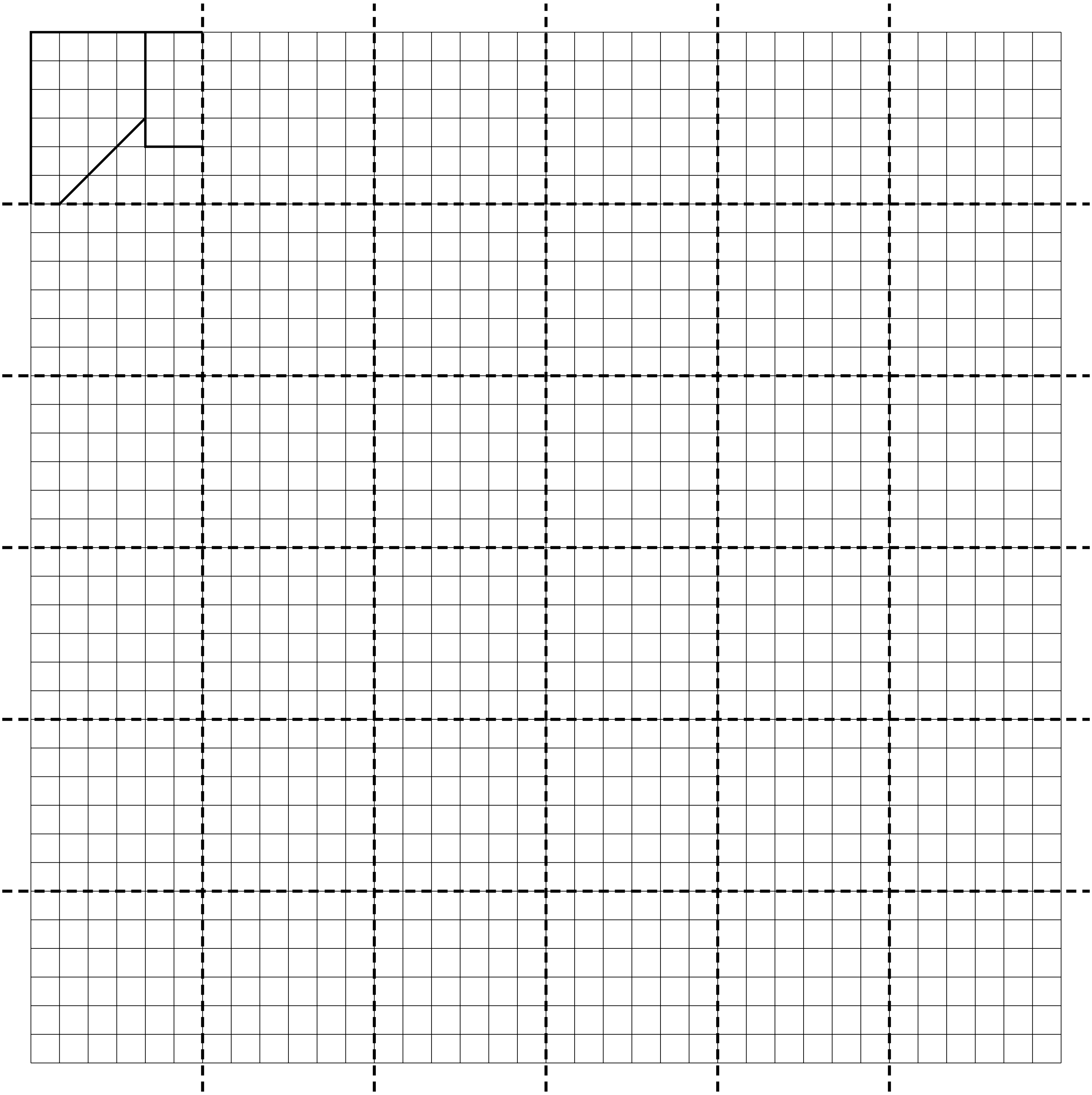
Complète le pavage obtenu par translations. Colorie-le ensuite.



C0-1 : pavages (2)

IREM de Lyon

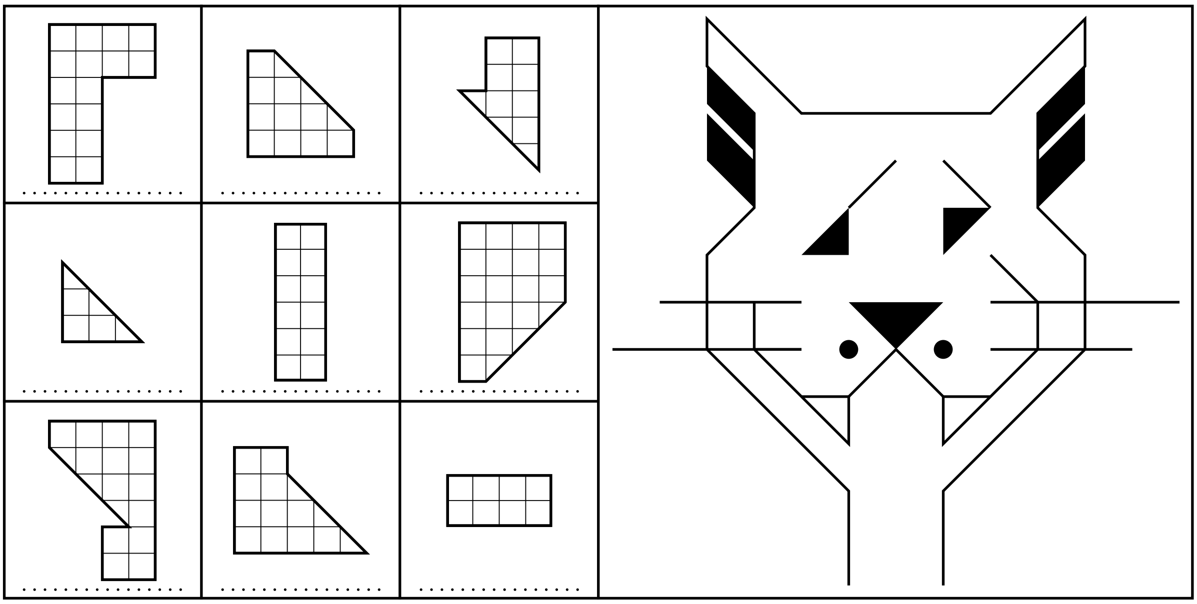
Complète le pavage obtenu par symétries axiales. Colorie-le ensuite.



C0-1 : photomathon et aire (1)

Détermine l'aire de chaque pièce en prenant pour unité d'aire un carreau.

(Les pointillés t'indiquent comment orienter les pièces.)



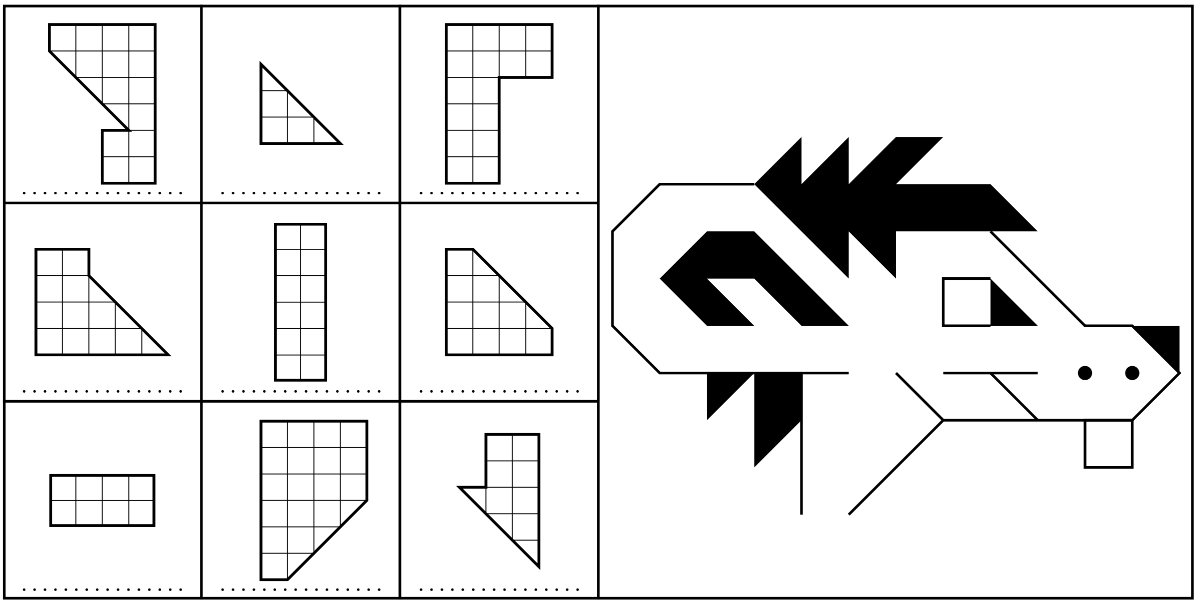
8,5	11,5	16 ....
19,5	12	4,5 ....
8	12,5	15,5 ....

C0-1 : photomathon et aire (2)

IREM de Lyon

Détermine l'aire de chaque pièce en prenant pour unité d'aire un carreau.

(Les pointillés t'indiquent comment orienter les pièces.)



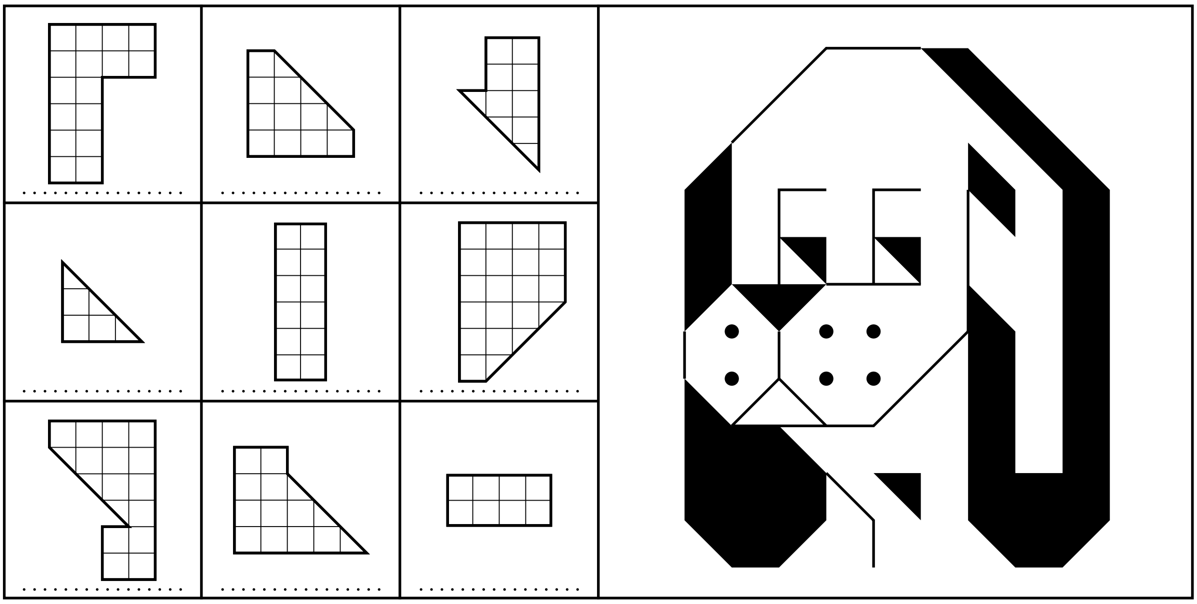
16	4,5	15,5
11,5	12	12,5
8,5	19,5	8

C0-1 : photomathon et aire (3)

IREM de Lyon

Détermine l'aire de chaque pièce en prenant pour unité d'aire une moitié (triangulaire) de carreau.

(Les pointillés t'indiquent comment orienter les pièces.)



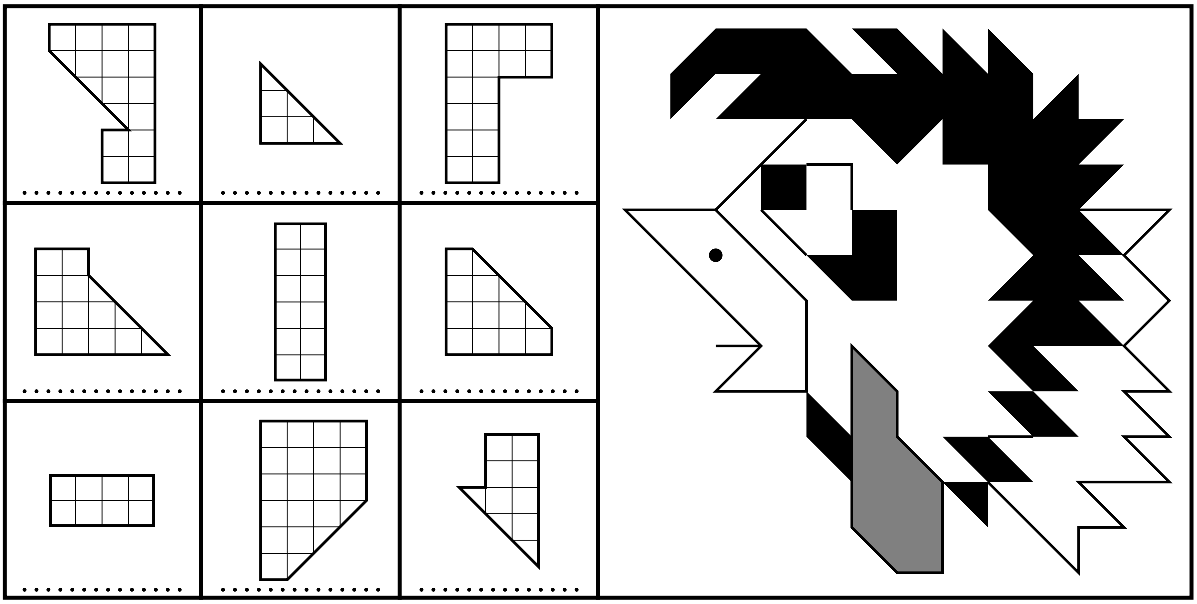
■ 17	■ 23	■ 32 ....
■ 39	■ 24	■ 9 ....
■ 16	■ 25	■ 31 ....

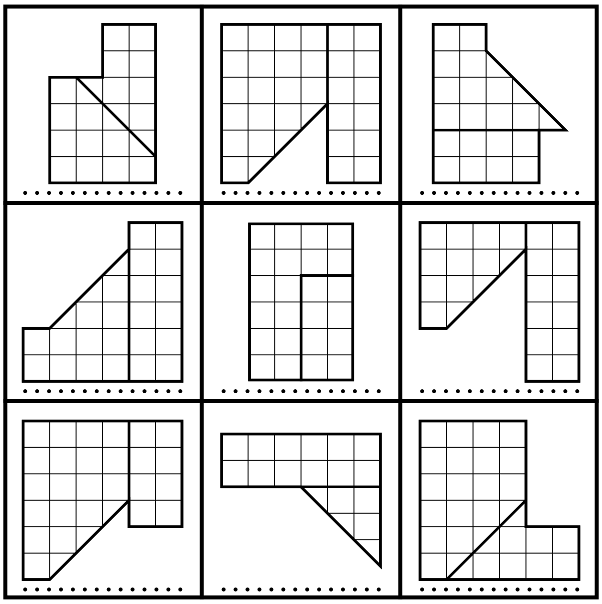
C0-1 : photomathon et construction

IREM de Lyon

Retrouve la pièce manquante pour construire un carré de côté 6.

(Les pointillés t'indiquent comment orienter les pièces.)

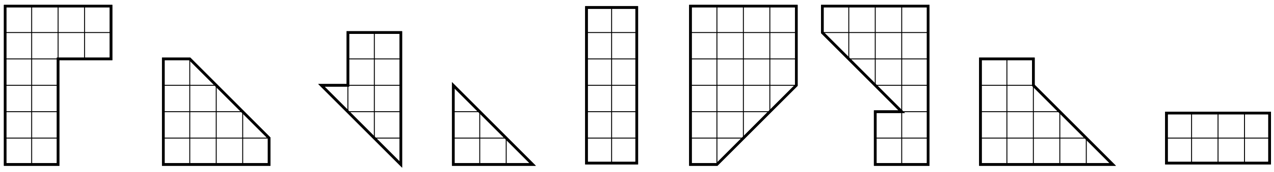




C0-1 : algèbre

IREM de Lyon

Tu disposes des neuf pièces suivantes :



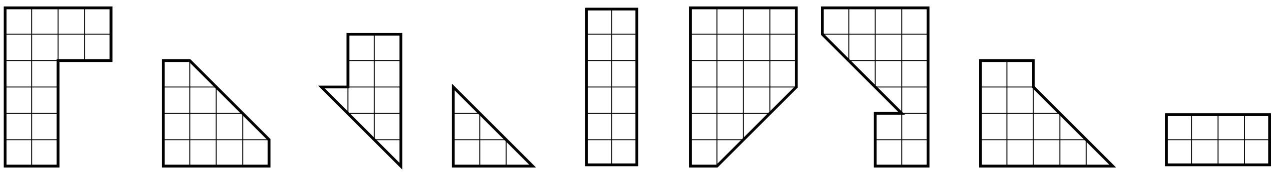
A B C D E F G H I

1. On note a la longueur d'un segment « horizontal » ou « vertical » et b celle d'un segment « diagonal ». Écris le périmètre de chaque pièce sous la forme $a\square + b\blacksquare$ où $\square$ est le nombre de segments « horizontaux » ou « verticaux » et $\blacksquare$ est le nombre de segments « diagonaux ».
2. Indique les deux pièces de même périmètre.
3. Écris une égalité liant a et b.
4. On choisit $a = 1$.
   Écris tous les périmètres sous la forme $\square + \blacksquare\sqrt{2}$.

C0-1 : algèbre

IREM de Lyon

Tu disposes des neuf pièces suivantes :



A B C D E F G H I

1. On note a la longueur d'un segment « horizontal » ou « vertical » et b celle d'un segment « diagonal ». Écris le périmètre de chaque pièce sous la forme $a\square + b\blacksquare$ où $\square$ est le nombre de segments « horizontaux » ou « verticaux » et $\blacksquare$ est le nombre de segments « diagonaux ».
2. Indique les deux pièces de même périmètre.
3. Écris une égalité liant a et b.
4. On choisit $a = 1$.
   Écris tous les périmètres sous la forme $\square + \blacksquare\sqrt{2}$.

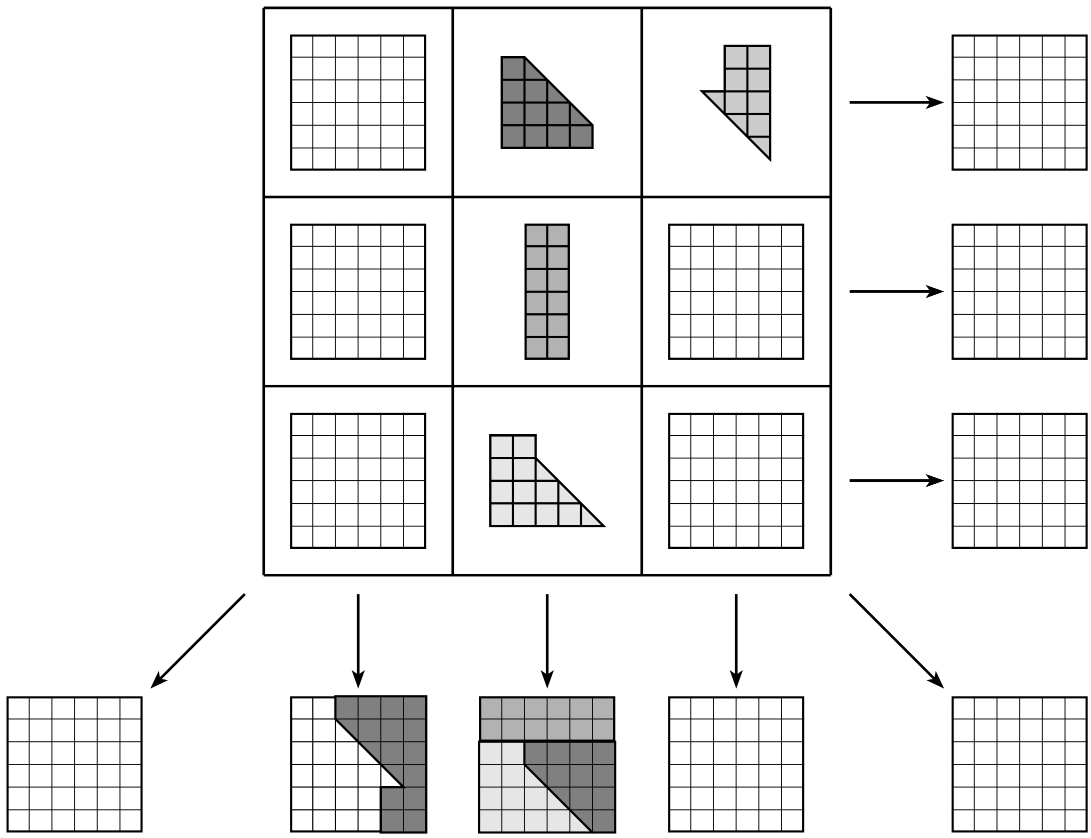
C-01 : un défi parisien

IREM de Lyon

Dans un carré géomagique, si l'on assemble les figures situées sur chaque ligne, sur chaque colonne et sur chaque diagonale, on doit obtenir la même figure.

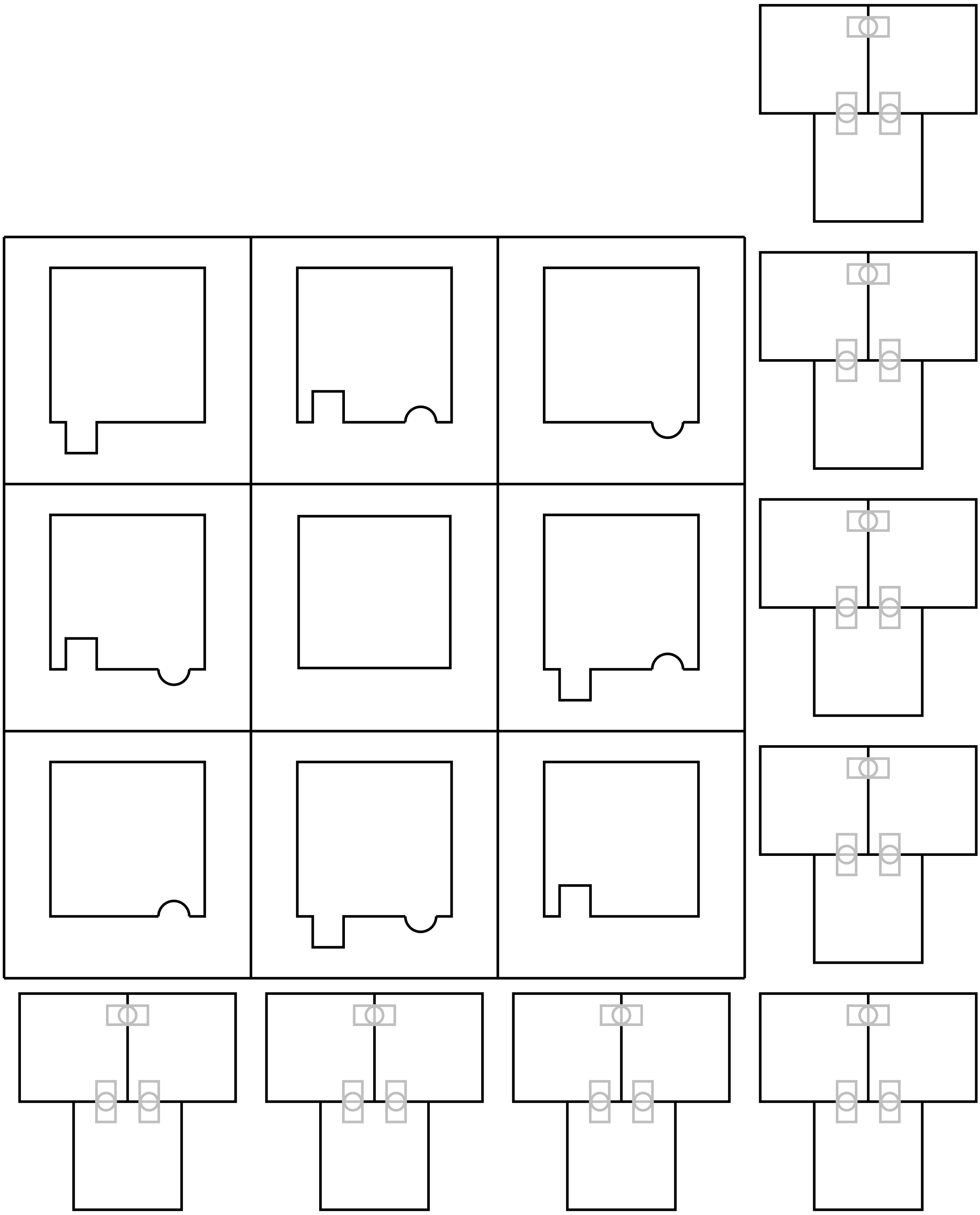
Complète le carré géomagique ci-dessous.

Conseil : utilise des couleurs différentes pour chaque pièce.

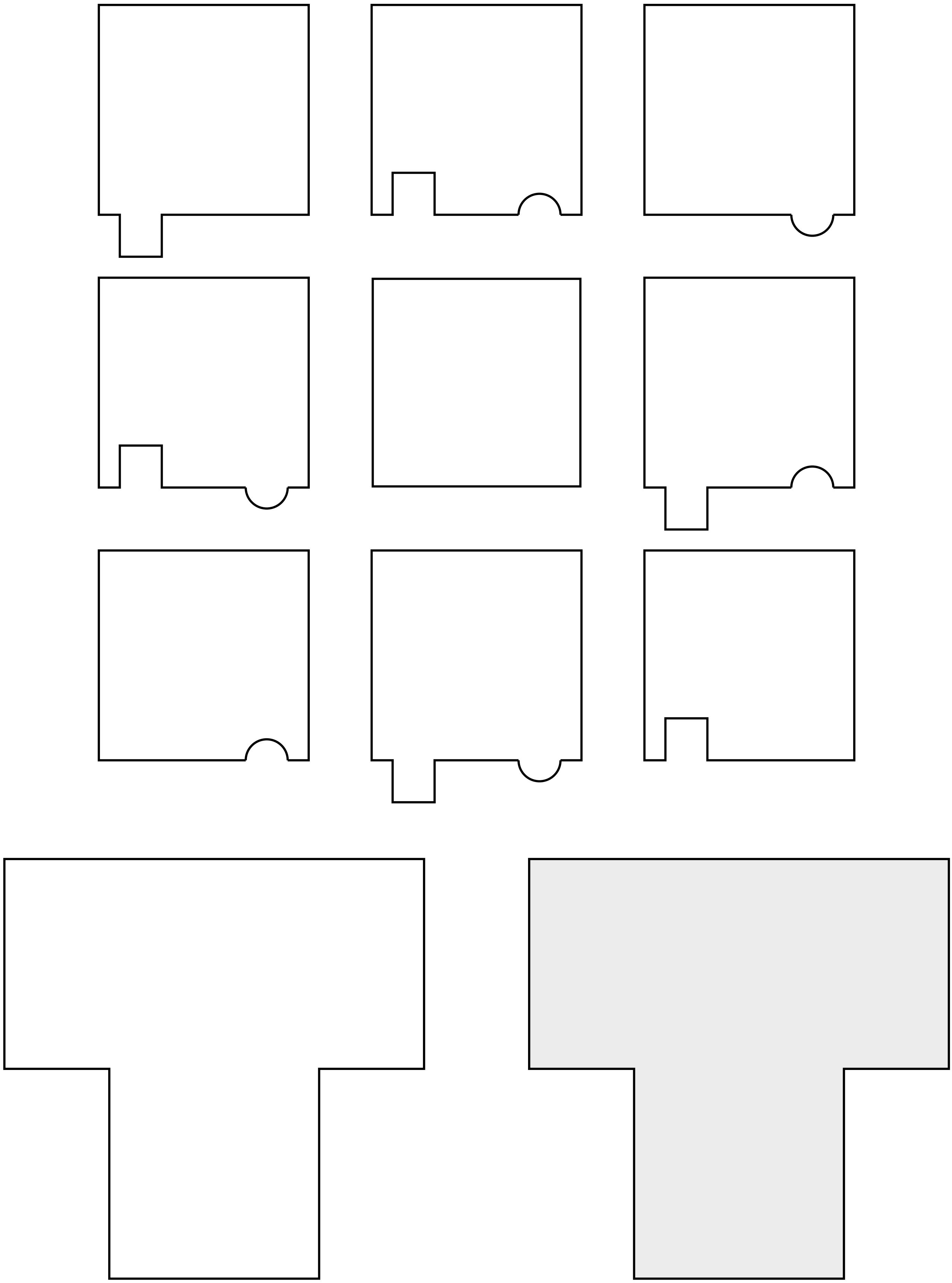


Ce défi a été proposé par l'IREM de Paris pour son Rallye (CM2 – 6ème) en 2014.

http://www-irem.univ-paris13.fr/site_spip/spip.php?article959



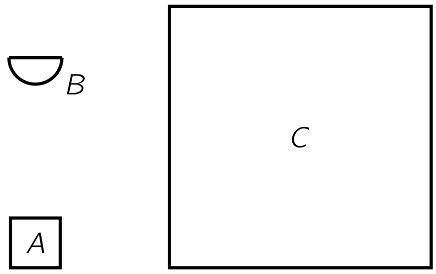
Note. Sur cette page, le modèle et les neuf pièces du carré géomagique ne sont pas à la même échelle.

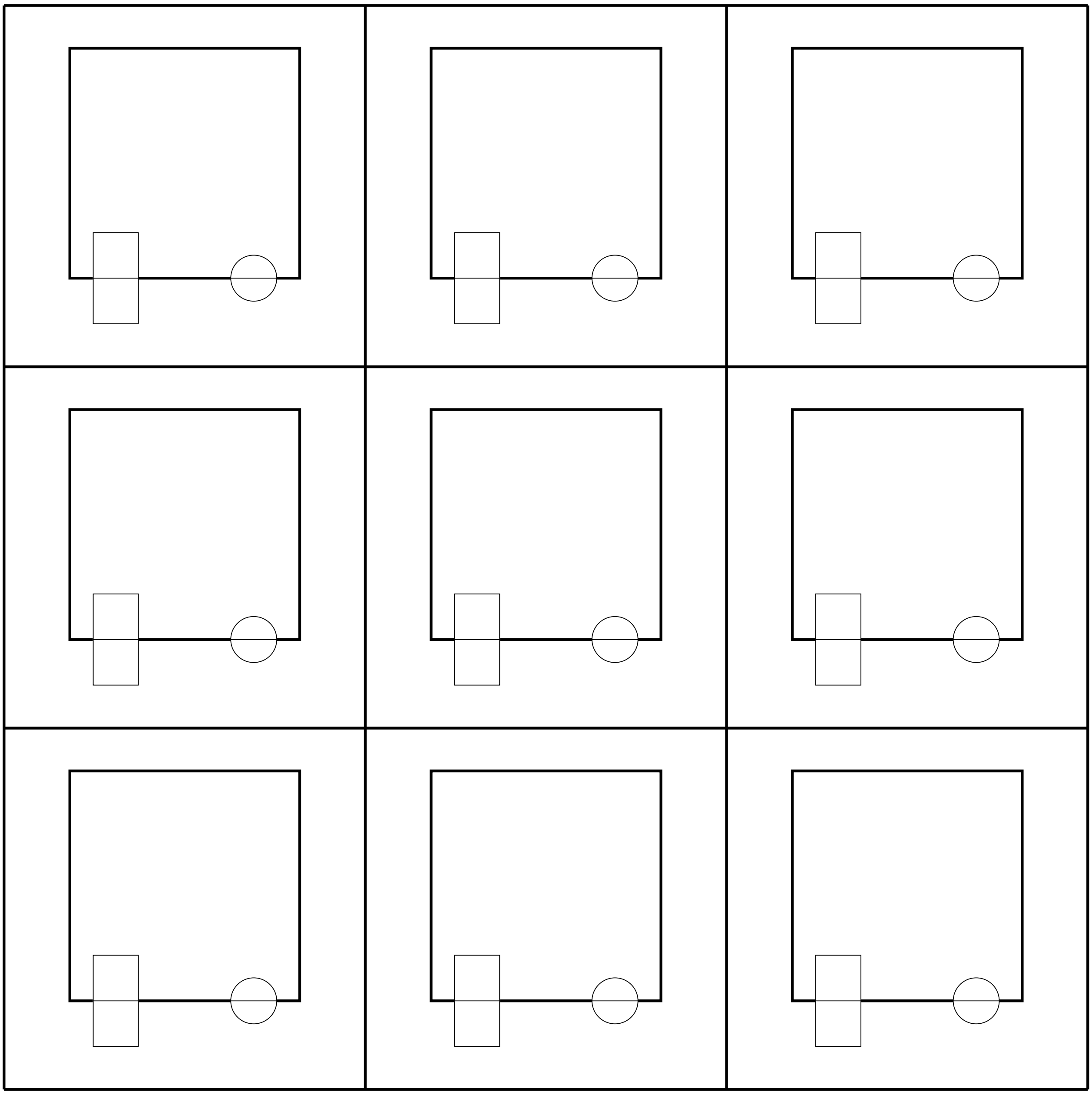


C0-2 : construction

À l'aide du carré magique et des trois pièces A, B et C ci-dessous, construis les neuf pièces de base du carré géomagique.

$C+A$	$C-A-B$	$C+B$
$C-A+B$	C	$C+A-B$
$C-B$	$C+A+B$	$C-A$

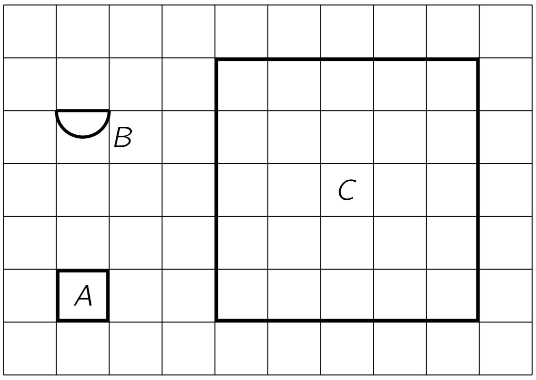




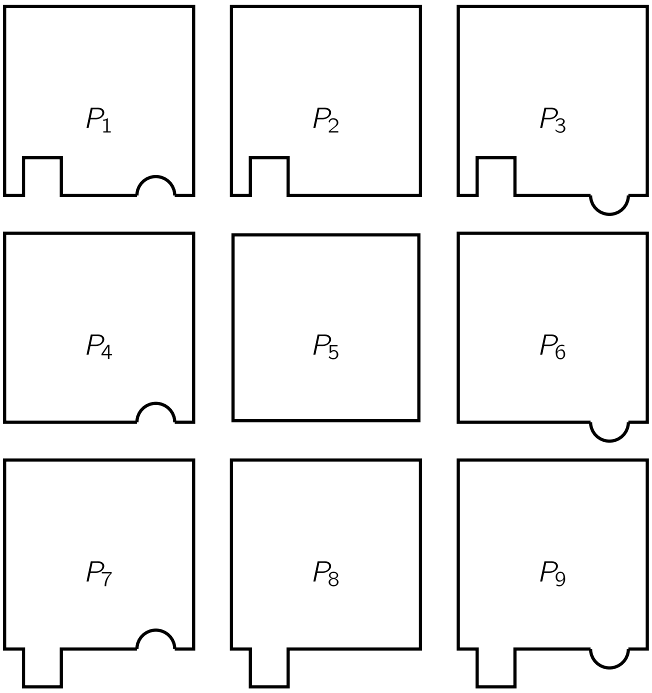
Source : `http://www.geomagicsquares.com/intro.php`

C0-2 : aire et périmètre

Trois pièces sont données :



Avec celles-ci, tu as construis neuf pièces :



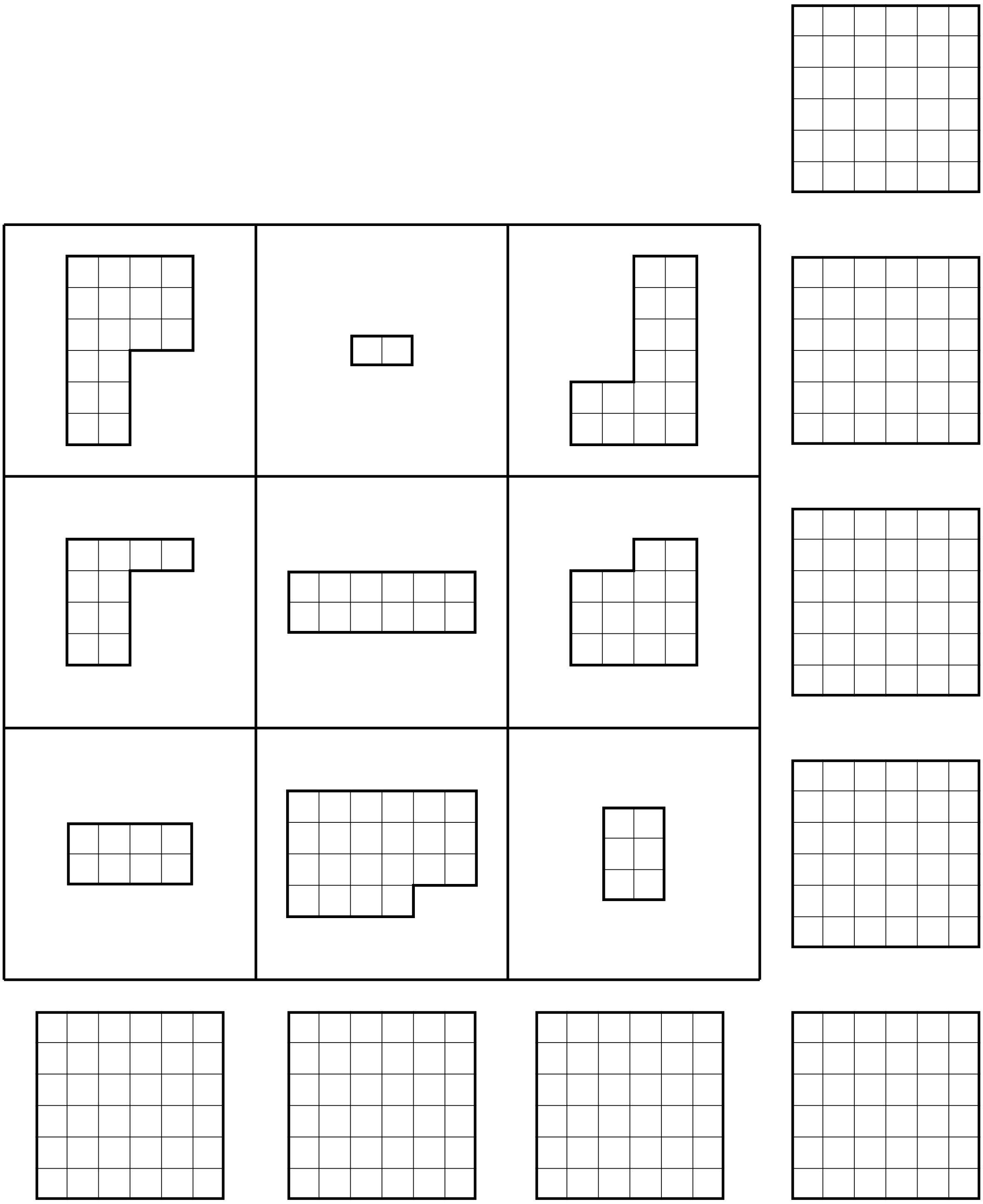
A est un carré de côté 1, B est un demi-disque de rayon $\frac{1}{2}$ et C est un carré de côté 5.

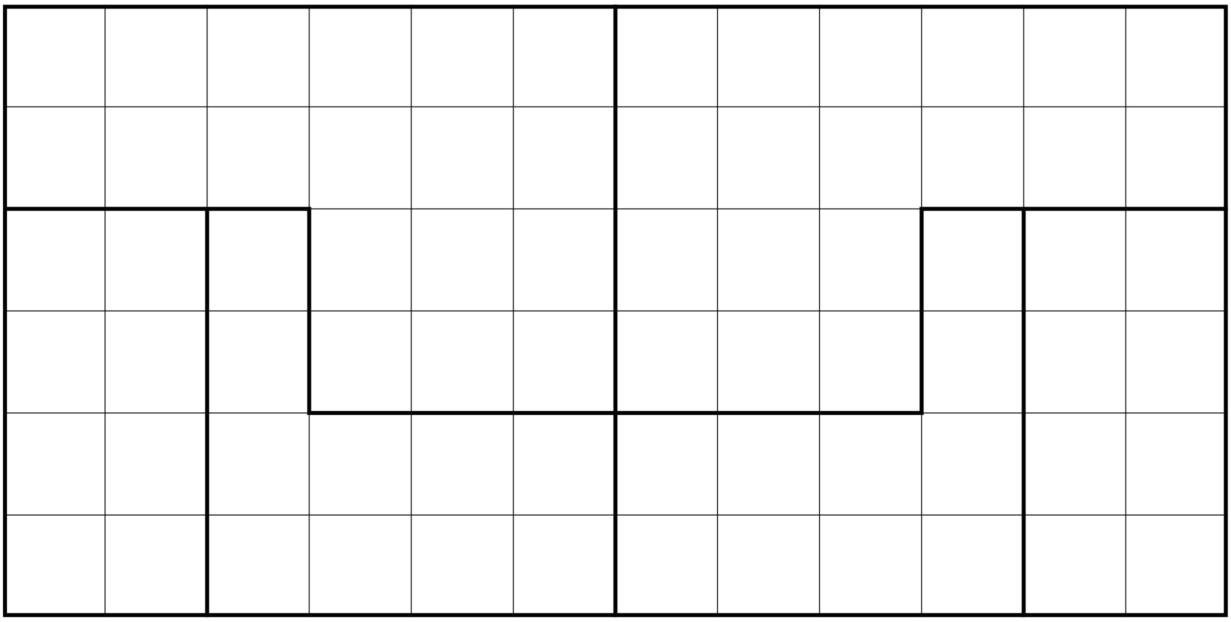
1. Aires

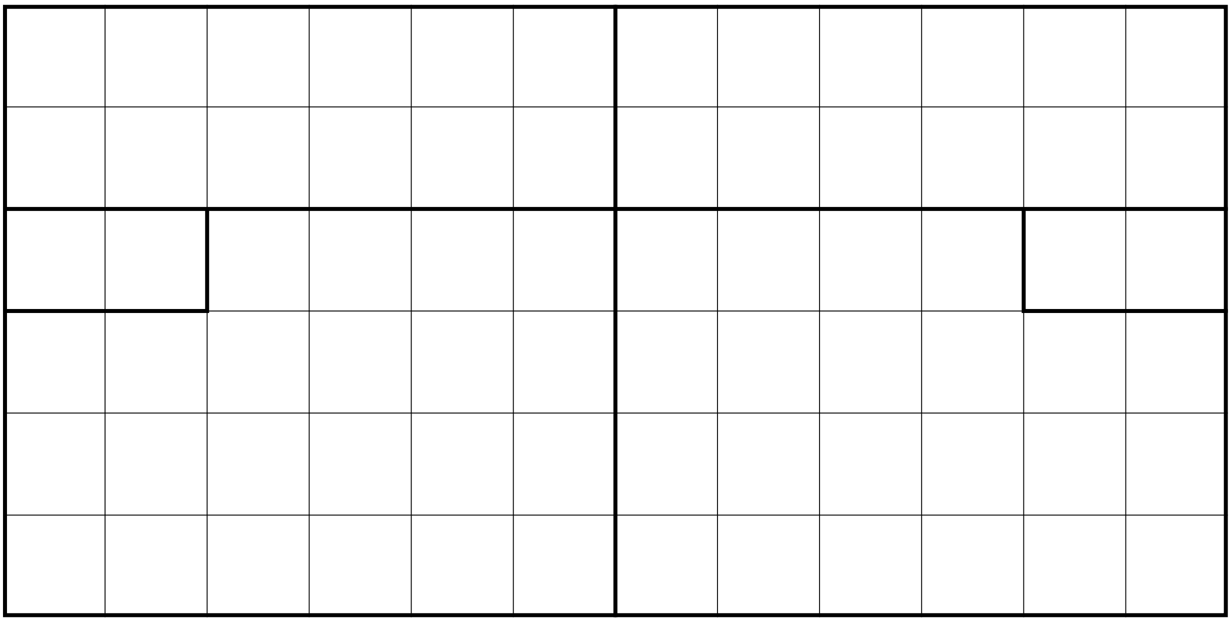
- **a.** Calcule l'aire de A, de B et de C.
- **b.** Calcule l'aire des neuf pièces en donnant la valeur exacte puis une valeur approchée au dixième.
- **c.** Range les aires des pièces en ordre croissant.

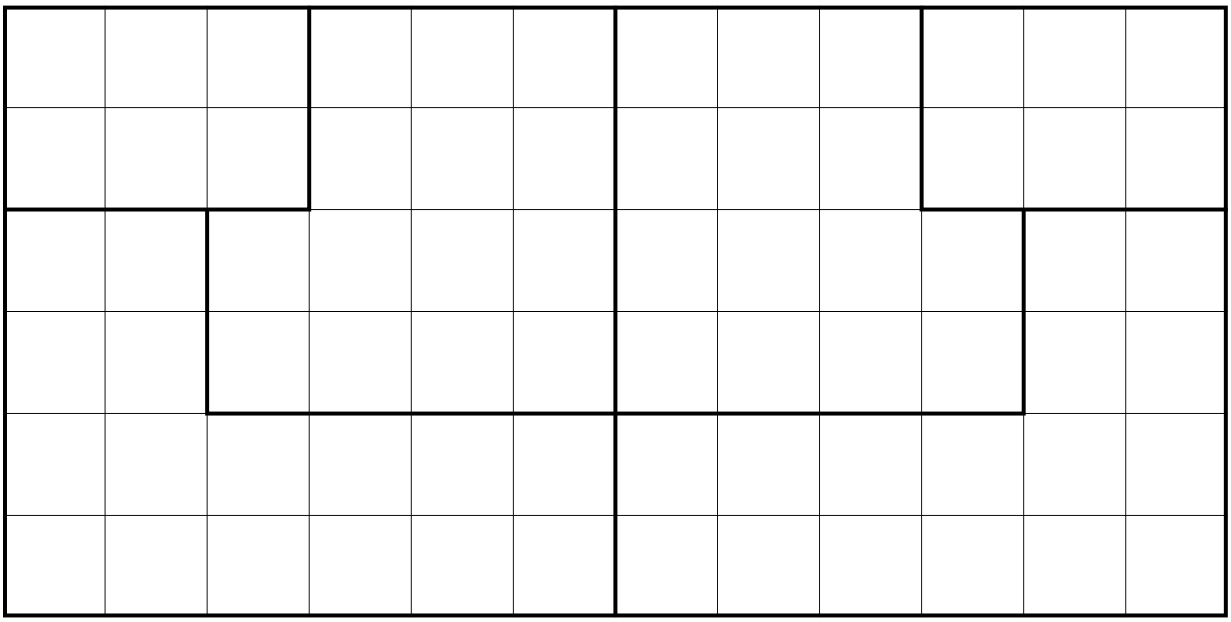
2. Périmètres

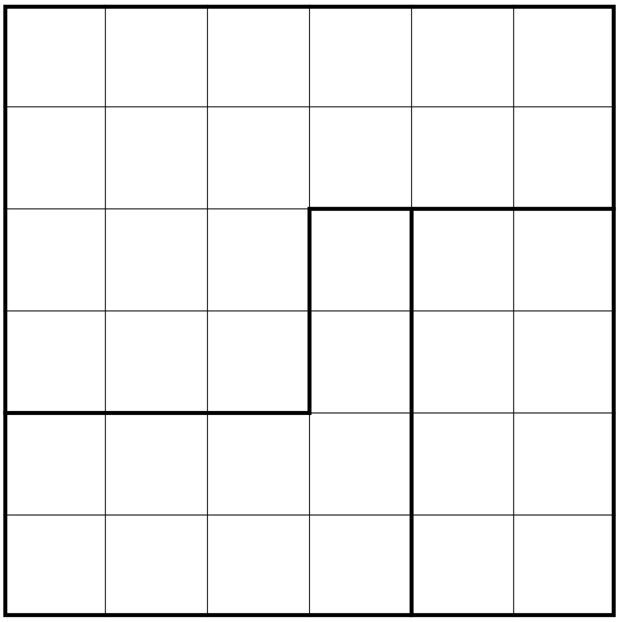
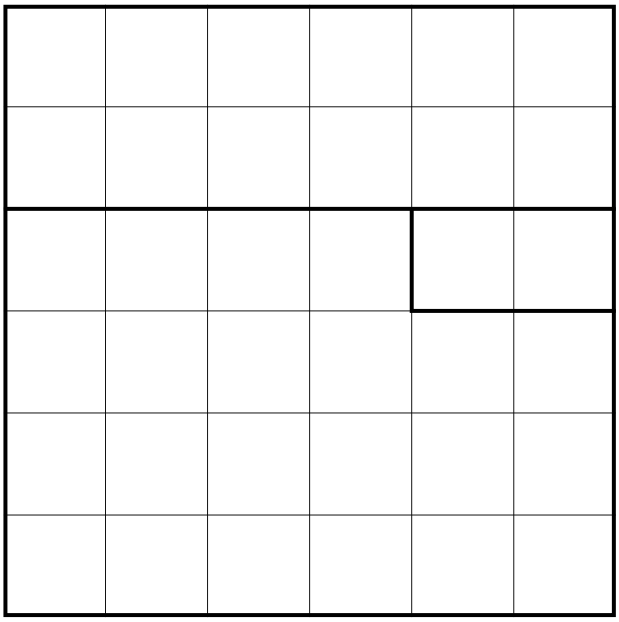
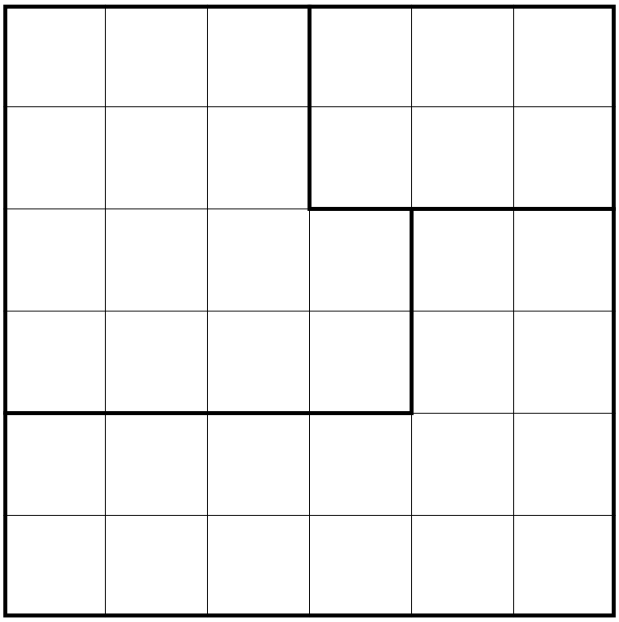
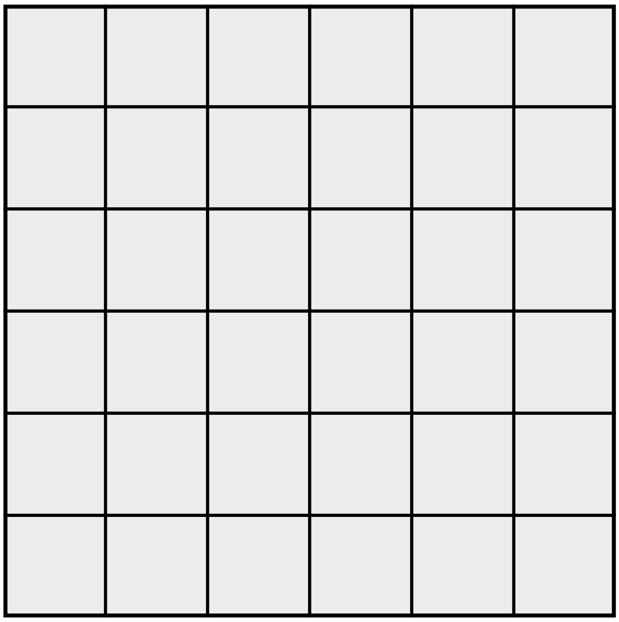
- **a.** À l'aide de ton précédent travail pour trouver le recouvrement du modèle, indique quelles sont les pièces qui ont le même périmètre.
- **b.** Calcule le périmètre d'un demi-cercle de rayon $\frac{1}{2}$.
- **c.** Calcule le périmètre des neuf pièces en donnant la valeur exacte puis une valeur approchée au dixième.
- **d.** Range les périmètres des pièces en ordre croissant.



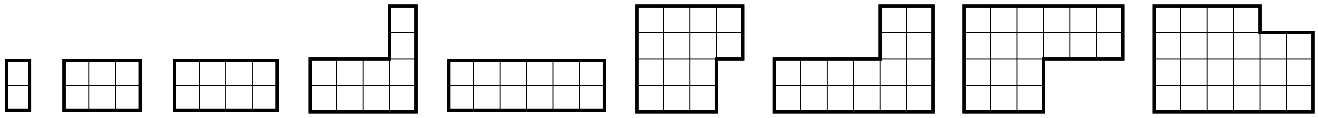






L'activité utilise les neuf pièces suivantes, retournables.



Note. Les pièces sont dessinées en pages 52 et 53 ; elles ont été assemblées sous la forme de trois carrés solution (pour réduire les manipulations de découpage !). Les pièces de la page 52 pourront être auparavant collées sur du carton souple ou imprimées sur du papier bristol ; les pièces sont présentées de façon à obtenir un recto-verso en pages 53. Les plateaux de jeu carrés sont en pages 54 et 55. La page 55 pourra être photocopiée sur des feuilles de couleur.

Il est demandé aux élèves de recouvrir, avec les neuf pièces, trois carrés de même dimension.

(Deux carrés dont l'un est obtenu par rotation ou retournement de l'autre sont identiques.)

Trois choix (surtout suivant l'âge des élèves) s'offrent à l'enseignant :

- l'élève recouvre trois carrés de dimension 6×6, construits à l'échelle des pièces ;
- l'élève sait seulement qu'il doit obtenir trois carrés de dimension 6×6 ;
- l'élève doit retrouver les dimensions du carré.

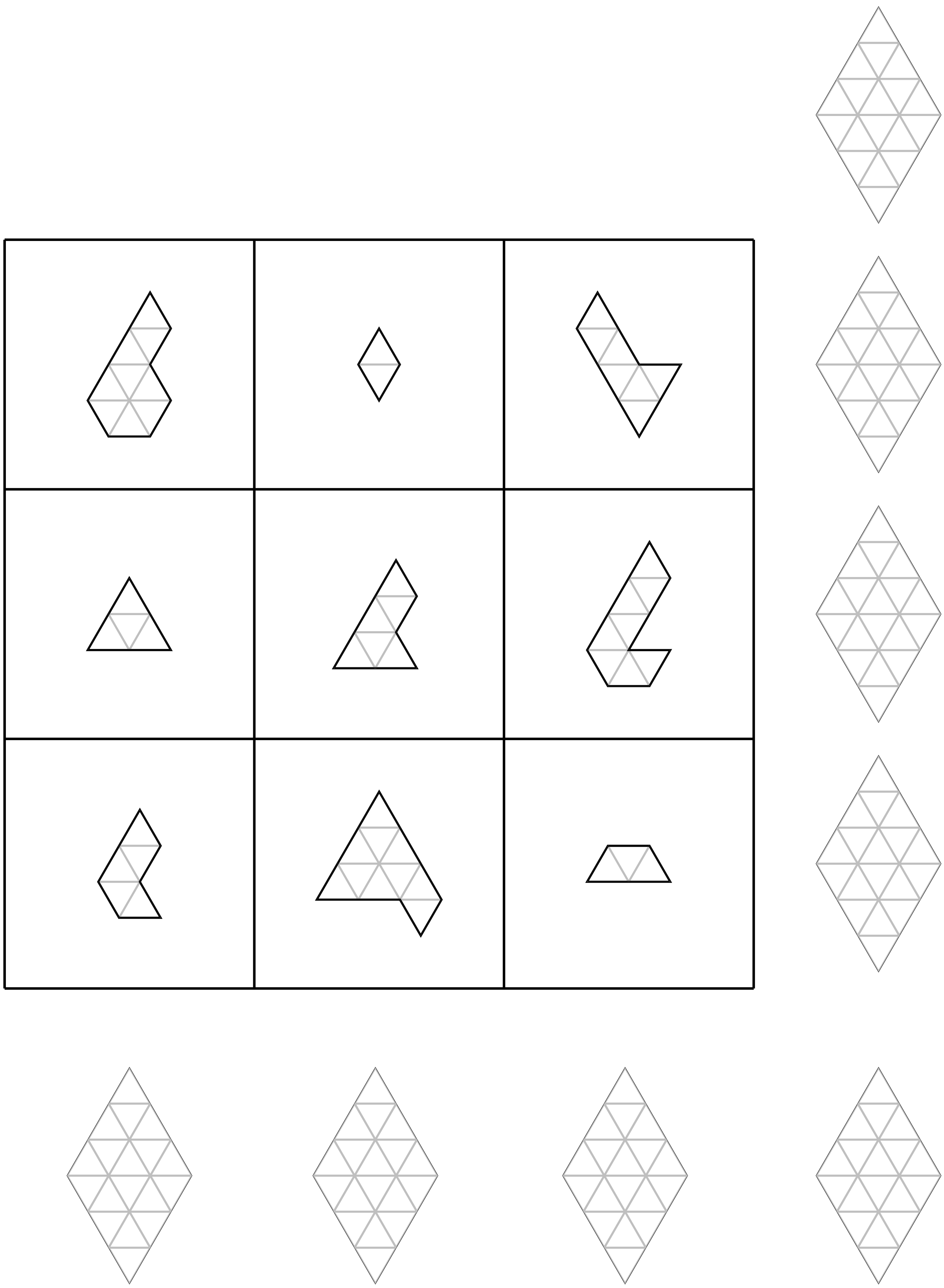
Pour ce dernier point, le raisonnement est le suivant.
Les nombres de carreaux unitaires des pièces sont égaux à 2, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18 et 22.
Donc leur somme est égale à 108.
Donc chaque carré contient $108 \div 3 = 36$ carrés unitaires.
Donc le côté du carré est égal à 6.

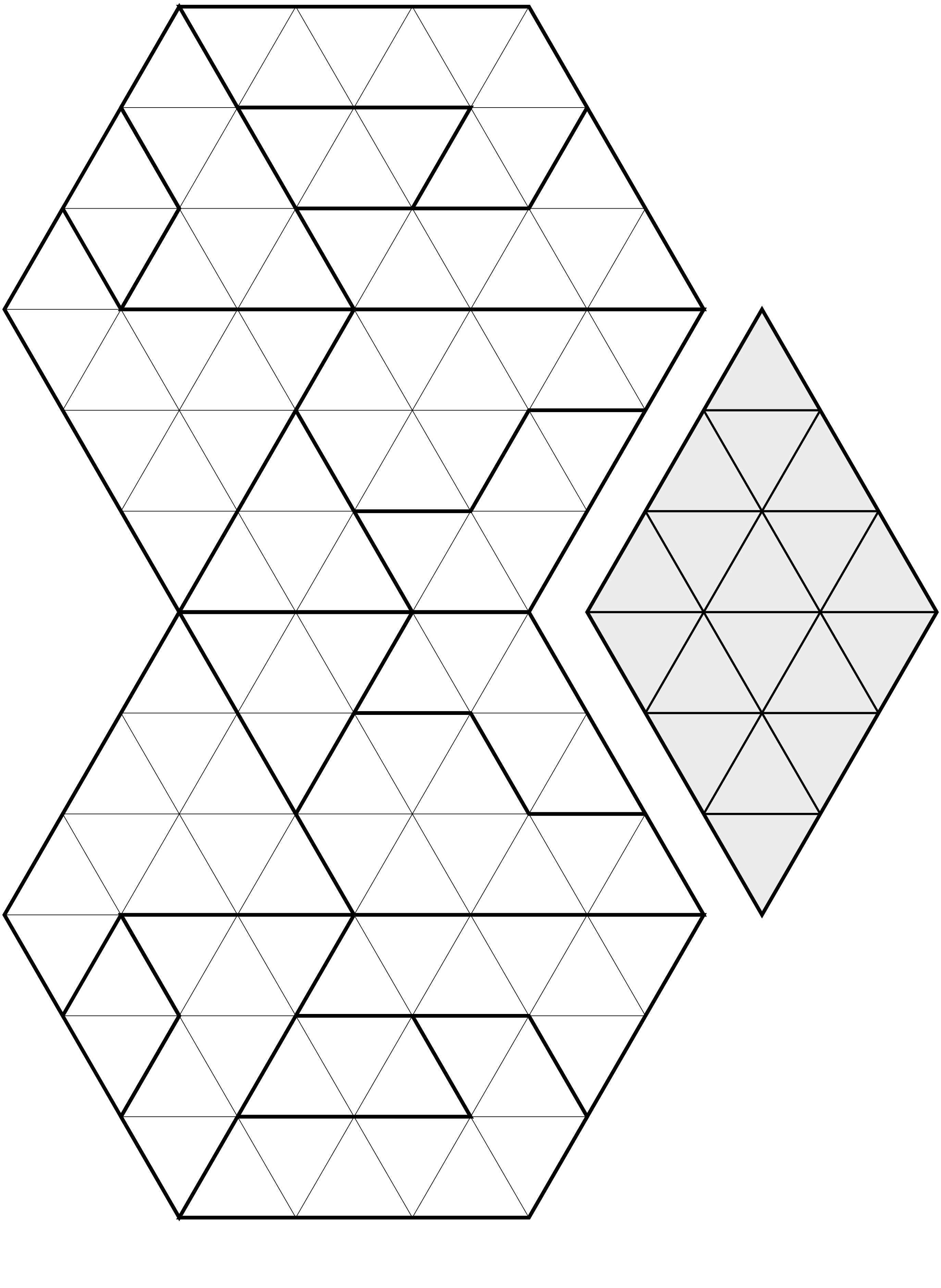
Les élèves trouveront divers triplets de carrés de dimensions 6×6 recouverts par les neuf pièces. Puisque ces pièces forment un carré géomagique, le nombre maximal de triplets est donc supérieur ou égal à 8.

L'élève remplit le tableau de la page 51 par ses solutions ; une solution est donnée en page 161. L'enseignant expliquera le mode d'emploi du tableau : les trois carrés obtenus en ligne, les trois carrés obtenus en colonne et les deux carrés obtenus en diagonale.

Note. Ce travail s'inspire de l'article « Avec les pièces d'un carré géomagique » de François Drouin, publié dans *Le Petit Vert*, n° 133, Mars 2018.

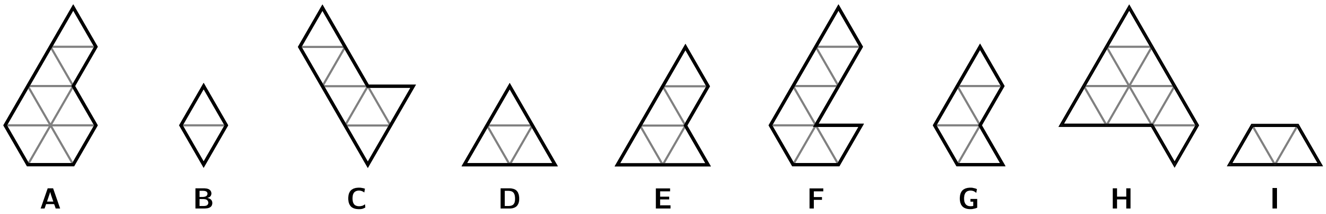
Carré géomagique C8





C8 : périmètre, aire et Saute-grenouille (1)

IREM de Lyon



1 ♡ Si le périmètre de **G** est égal à 7 alors le périmètre de **A** est égal à . . .

2 ♡ Si le périmètre de **I** est égal à 50 alors le périmètre de **H** est égal à . . .

3 ♡ Si le périmètre de **E** est égal à 40 alors le périmètre de **H** est égal à . . .

1 ♣ Si le périmètre de **B** est égal à 12 alors le périmètre de **D** est égal à . . .

2 ♣ Si le périmètre de **E** est égal à 12 alors le périmètre de **F** est égal à . . .

3 ♣ Si le périmètre de **B** est égal à 8 alors le périmètre de **I** est égal à . . .

4 ♣ Si le périmètre de **D** est égal à 12 alors le périmètre de **B** est égal à . . .

1 ♢ Si le périmètre de **C** est égal à 27 alors le périmètre de **E** est égal à . . .

2 ♢ Si la somme des périmètres de **F** et de **H** est égale à 80 alors le périmètre de **E** est égal à . . .

3 ♢ Si la somme des périmètres de **A** et de **G** est égale à 128 alors le périmètre de **E** est égal à . . .

4 ♢ Si l'aire de **B** est égale à 16 alors l'aire de **C** est égale à . . .

5 ♢ Si l'aire de **D** est égale à 36 alors l'aire de **H** est égale à . . .

6 ♢ Si l'aire de **E** est égale à 12 alors l'aire de **F** est égale à . . .

7 ♢ Si l'aire de **B** est égale à 4 alors l'aire de **C** est égale à . . .

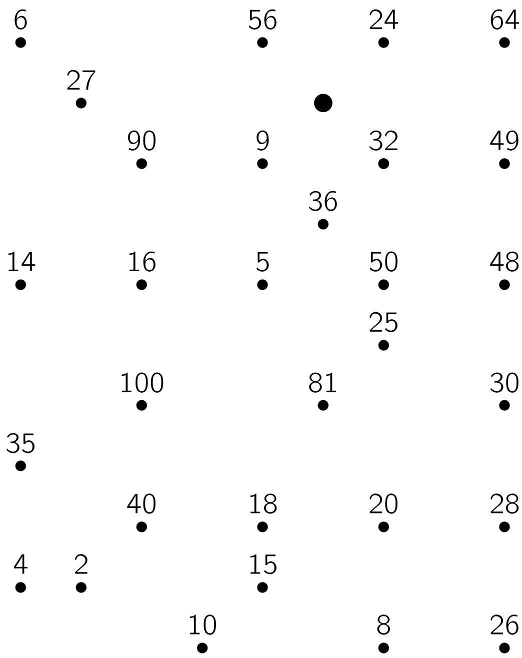
8 ♢ Si l'aire de **G** est égale à 25 alors l'aire de **F** est égale à . . .

9 ♢ Si la somme des aires de **A** et de **E** est égale à 30 alors l'aire de **H** est égale à . . .

10 ♢ Si la somme des aires de **D** et de **E** est égale à 100 alors l'aire de **I** est égale à . . .

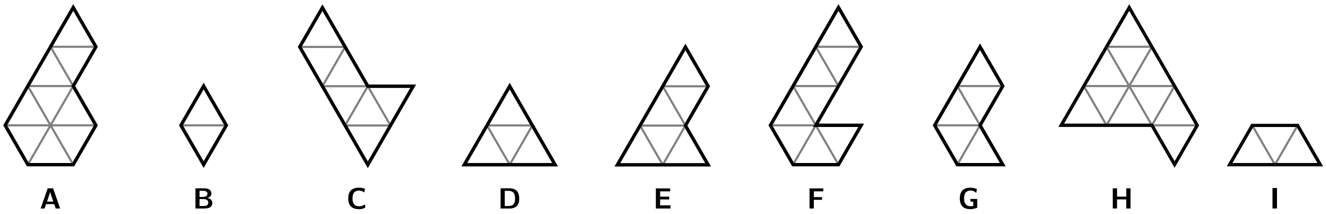
11 ♢ Si la somme des aires de **B** et de **D** est égale à 36 alors l'aire de **F** est égale à . . .

12 ♢ Si l'aire de **C** est égale à 28 alors la somme des aires de **G** et de **I** est égale à . . .

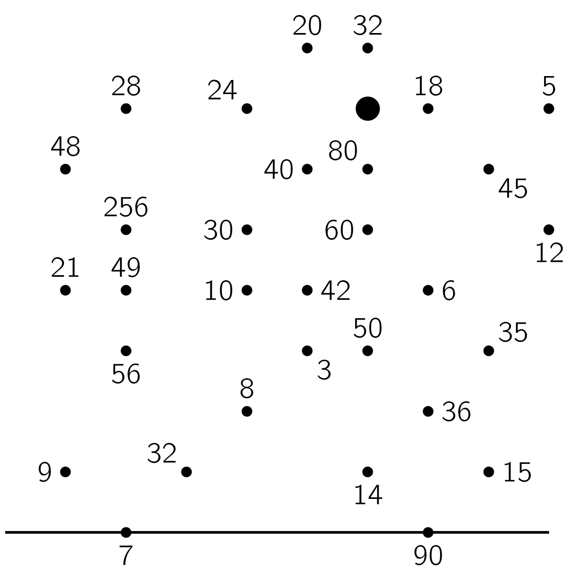


C8 : périmètre, aire et Saute-grenouille (2)

IREM de Lyon



1 ♡ Si l'aire de **C** est égale à 7 alors l'aire de **F** est égale à . . .
2 ♡ Si l'aire de **B** est égale à 8 alors l'aire de **F** est égale à . . .
3 ♡ Si l'aire de **G** est égale à 10 alors l'aire de **C** est égale à . . .
4 ♡ Si l'aire de **D** est égale à 24 alors l'aire de **E** est égale à . . .
5 ♡ Si l'aire de **F** est égale à 80 alors l'aire de **G** est égale à . . .
1 ♠ Si l'aire de **B** est égale à 6 alors l'aire de **E** est égale à . . .
2 ♠ Si l'aire de **D** est égale à 160 alors l'aire de **B** est égale à . . .
3 ♠ Si l'aire de **C** est égale à 35 alors l'aire de **A** est égale à . . .
4 ♠ Si le périmètre de **E** est égal à 8 alors le périmètre de **I** est égal à . . .
5 ♠ Si le périmètre de **D** est égal à 12 alors le périmètre de **C** est égal à . . .
6 ♠ Si le périmètre de **F** est égal à 40 alors le périmètre de **E** est égal à . . .
7 ♠ Si le périmètre de **G** est égal à 35 alors le périmètre de **B** est égal à . . .
8 ♠ Si le périmètre de **H** est égal à 40 alors le périmètre de **D** est égal à . . .
9 ♠ Si le périmètre de **E** est égal à 48 alors le périmètre de **I** est égal à . . .
10 ♠ Si le périmètre de **D** est égal à 36 alors le périmètre de **G** est égal à . . .
11 ♠ Si la somme des aires de **B** et de **D** est égale à 6 alors l'aire de **I** est égale à . . .
12 ♠ Si la somme des aires de **A** et de **B** est égale à 88 alors l'aire de **C** est égale à . . .
13 ♠ Si la somme des aires de **E** et de **F** est égale à 42 alors l'aire de **C** est égale à . . .
14 ♠ Si la somme des aires de **C** et de **E** est égale à 13 alors la somme des aires de **B** et de **C** est égale à . . .
15 ♠ Si la somme des périmètres de **A** et de **B** est égale à 13 alors le périmètre de **G** est égal à . . .
16 ♠ Si la somme des périmètres de **D** et de **E** est égale à 140 alors le périmètre de **C** est égal à . . .
17 ♠ Si la somme des périmètres de **B** et de **D** est égale à 30 alors le périmètre de **I** est égal à . . .
18 ♠ Si l'aire de **G** est égale à 35 alors la somme des aires de **B** et de **I** est égale à . . .
19 ♠ Si le périmètre de **I** est égal à 15 alors la somme des périmètres de **F** et de **H** est égale à . . .
20 ♠ Si le périmètre de **C** est égal à 45 alors la somme des périmètres de **C** et de **G** est égale à . . .

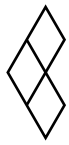


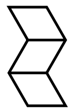
C8 : recherche de trilosanges

Le modèle du carré géomagique C8 est un losange.

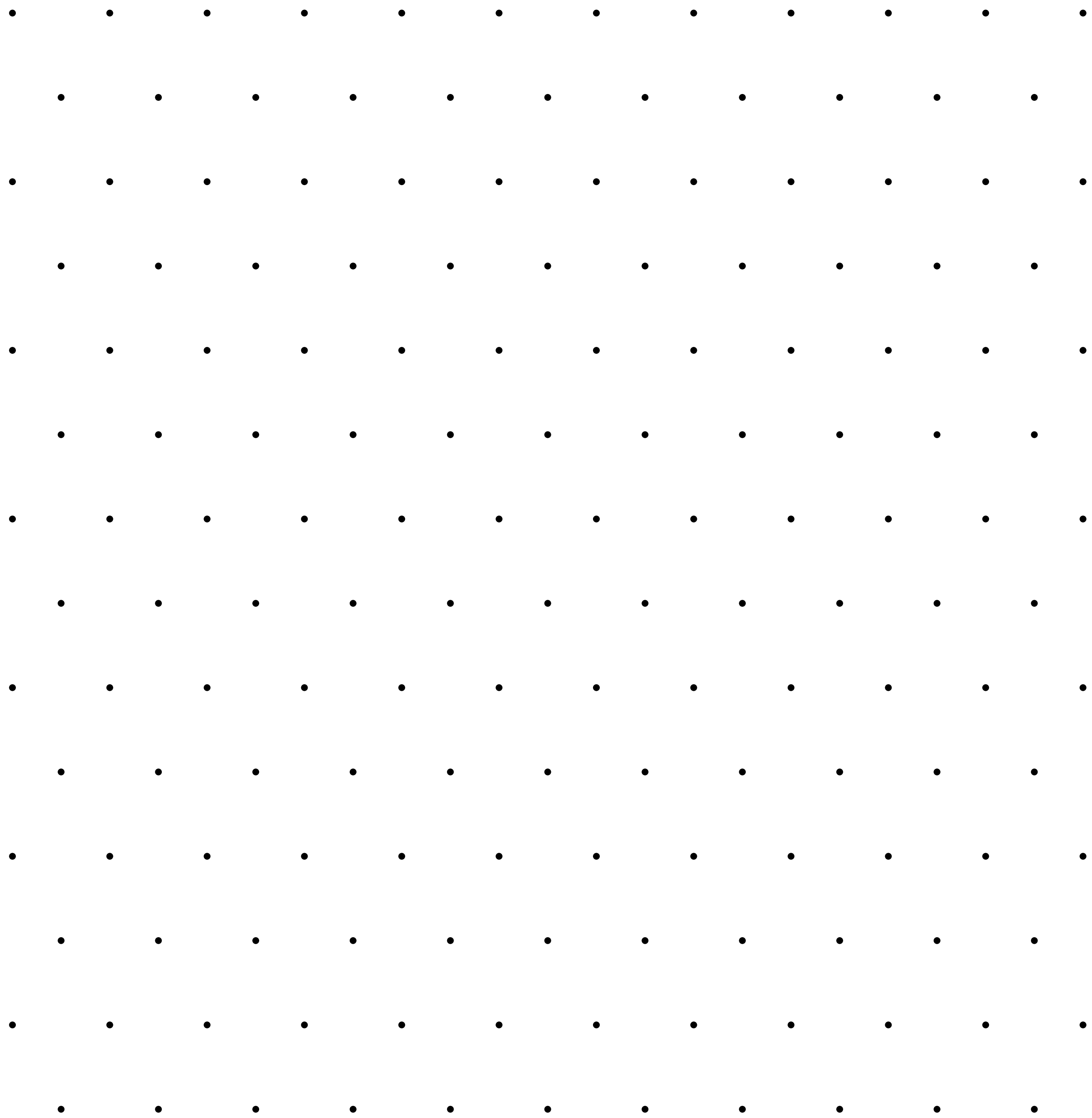
Avec trois losanges, tu peux construire un « trilosange », formé de trois losanges tels que deux losanges ont un côté en commun.

En voici deux exemples :





Dessine les neuf trilosanges différents qui existent.



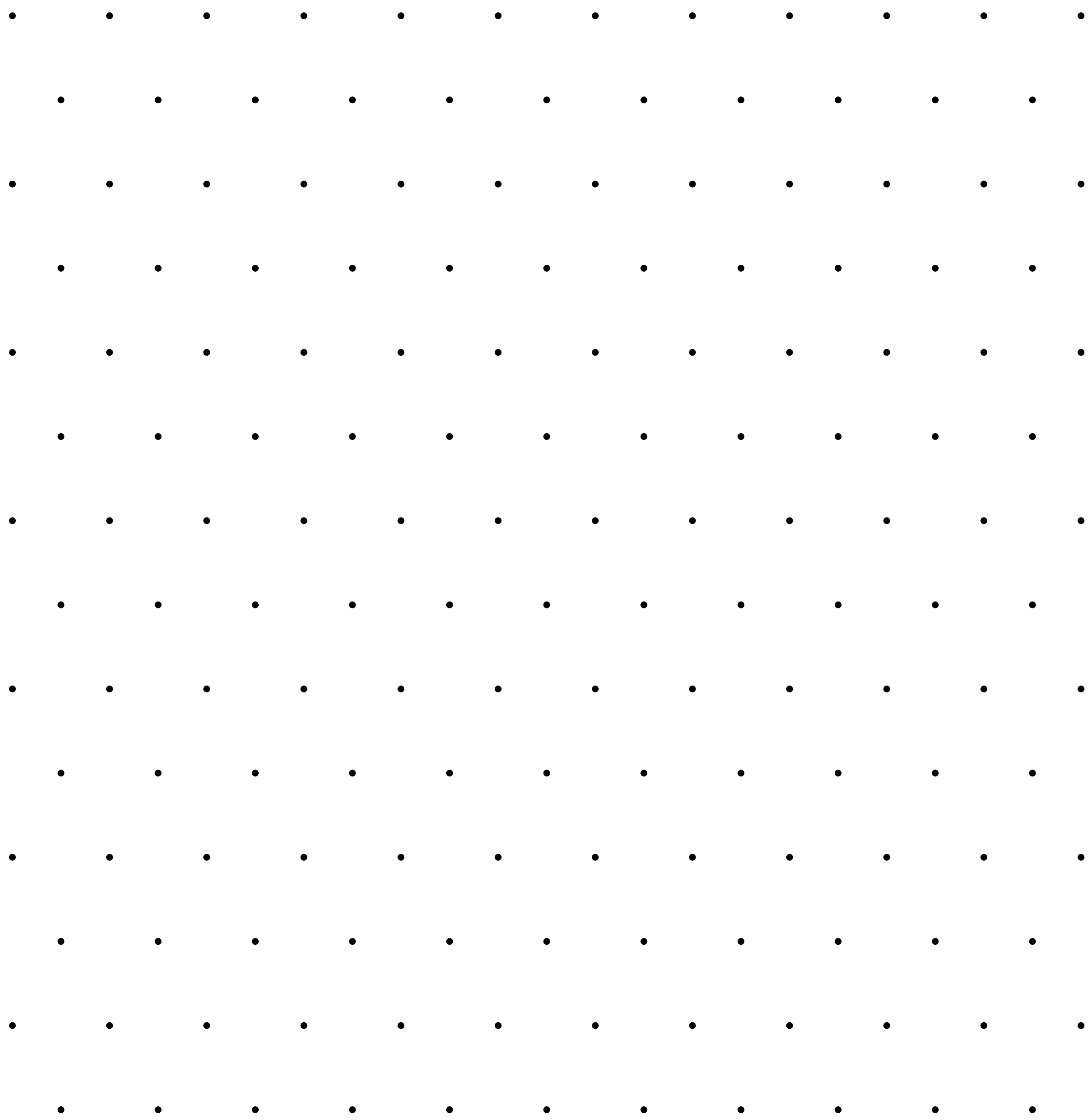
C8 : recouvrement de trilosanges

IREM de Lyon

Si tu choisis les trois alignements en ligne ou les trois alignements en colonne, tu peux recouvrir trois losanges. C'est-à-dire qu'avec les neuf pièces, tu peux recouvrir un trilosange.

Choisis l'un des neuf trilosanges trouvés, reproduis-le ci-dessous puis recouvre-le avec les pièces.

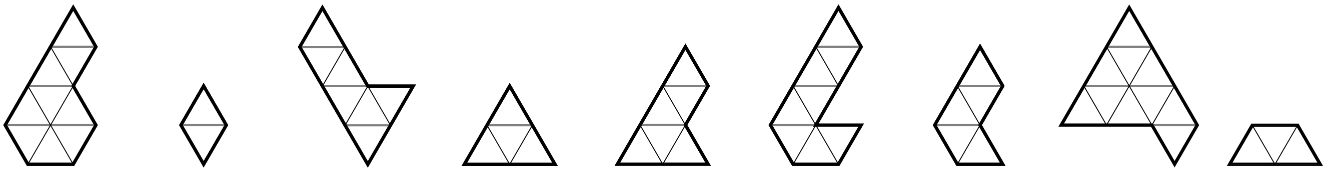
Colorie ta figure avec neuf couleurs différentes.

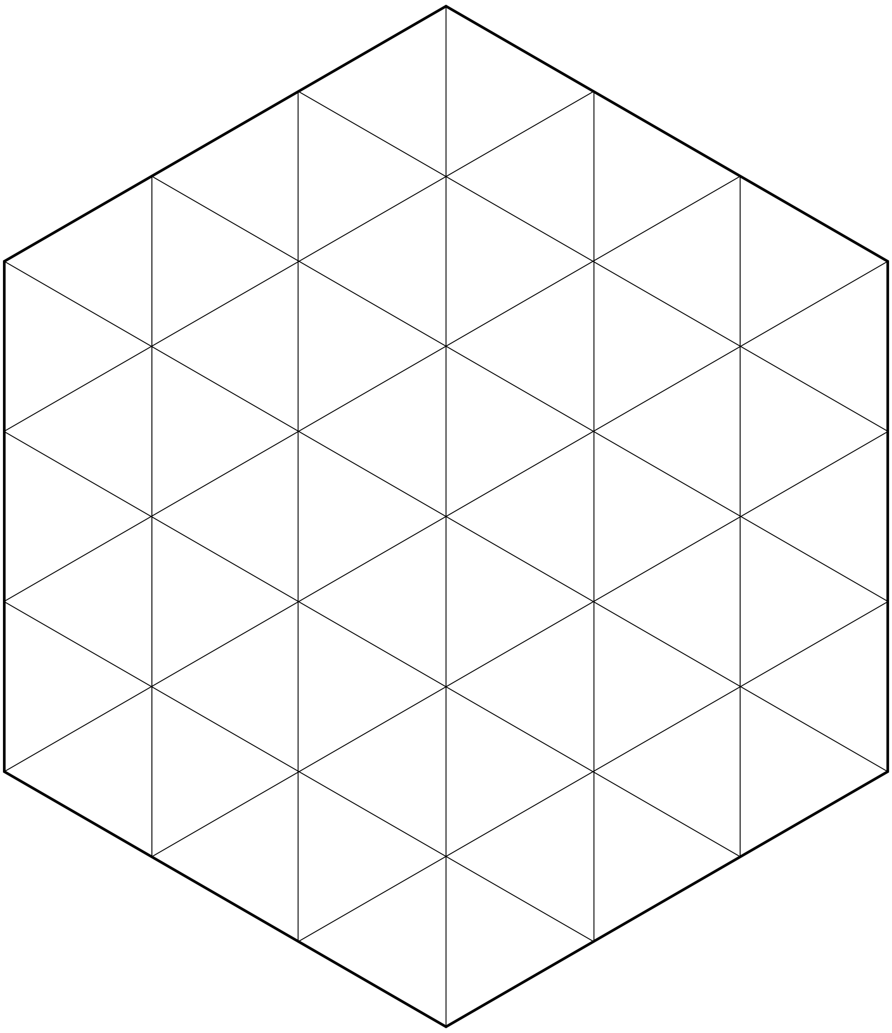


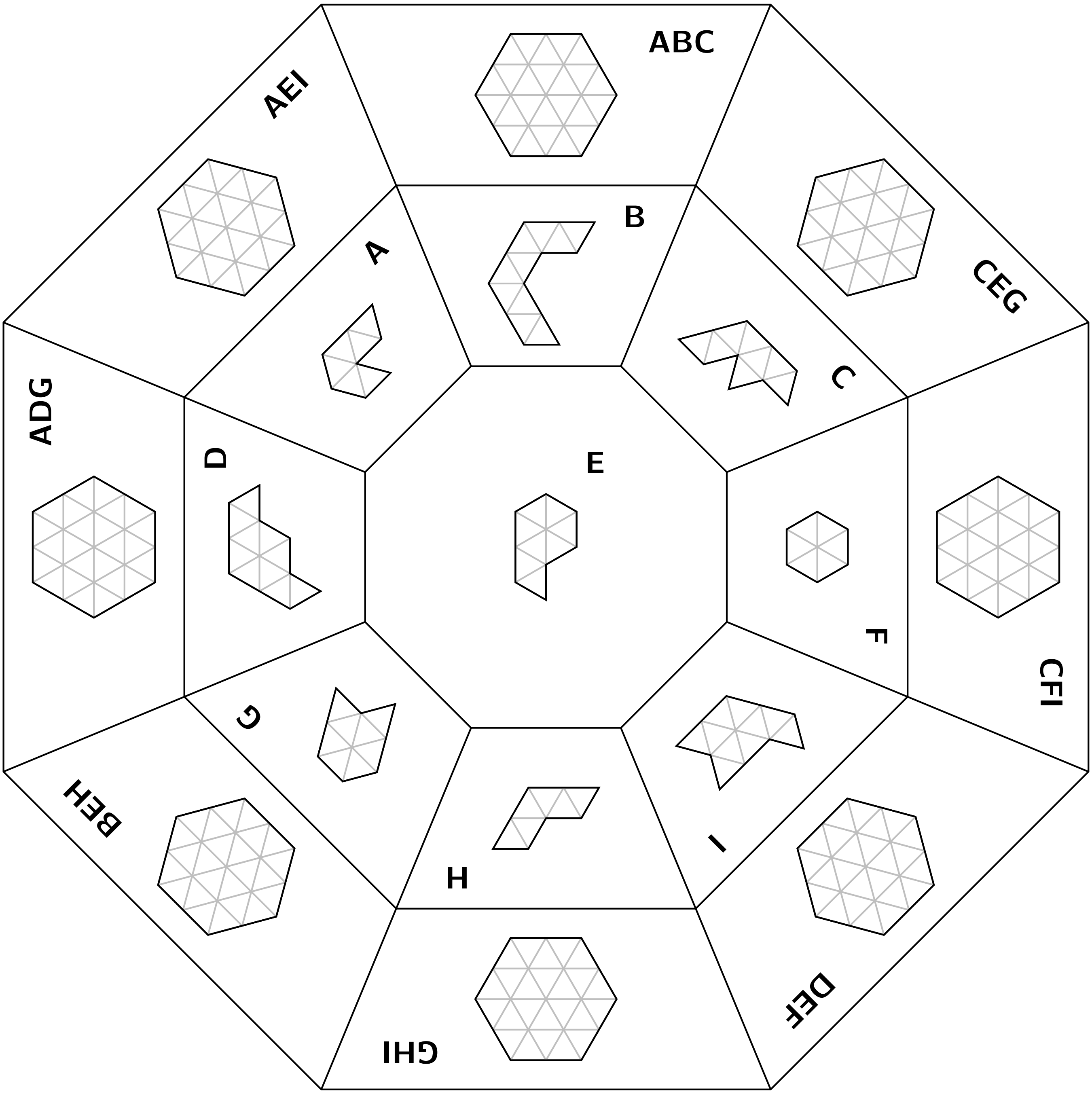
C8 : recouvrement d'un hexagone

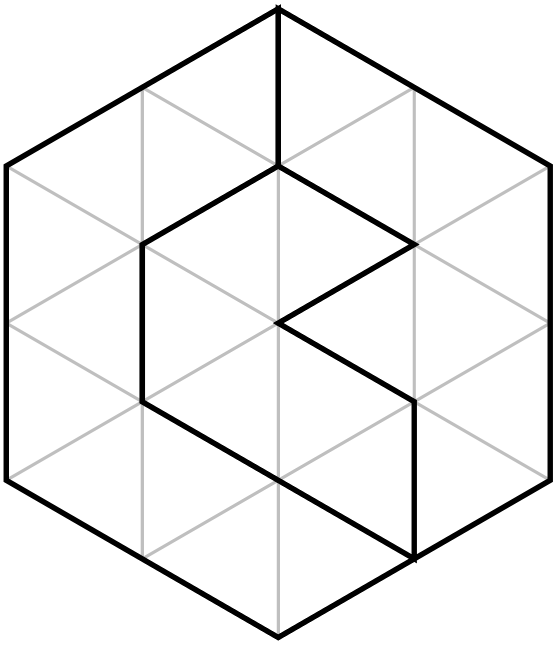
IREM de Lyon

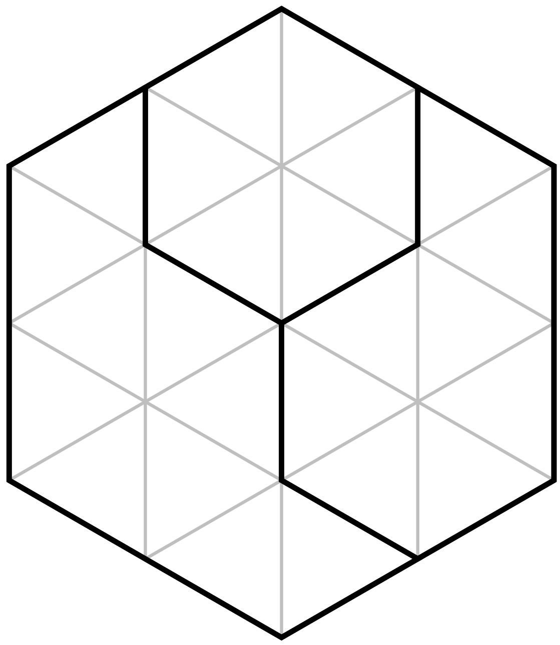
À l'aide des neuf pièces du carré géomagique, recouvre l'hexagone ci-dessous.

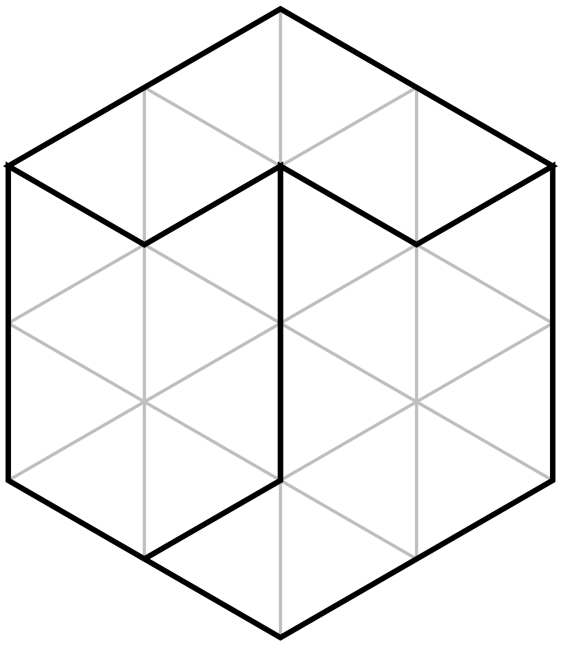


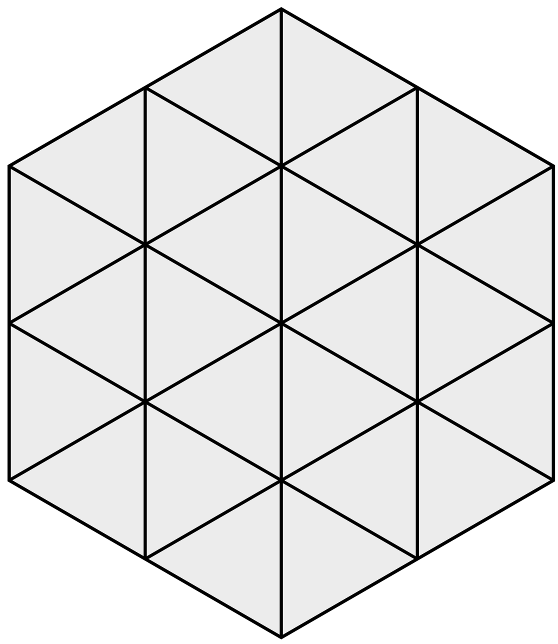


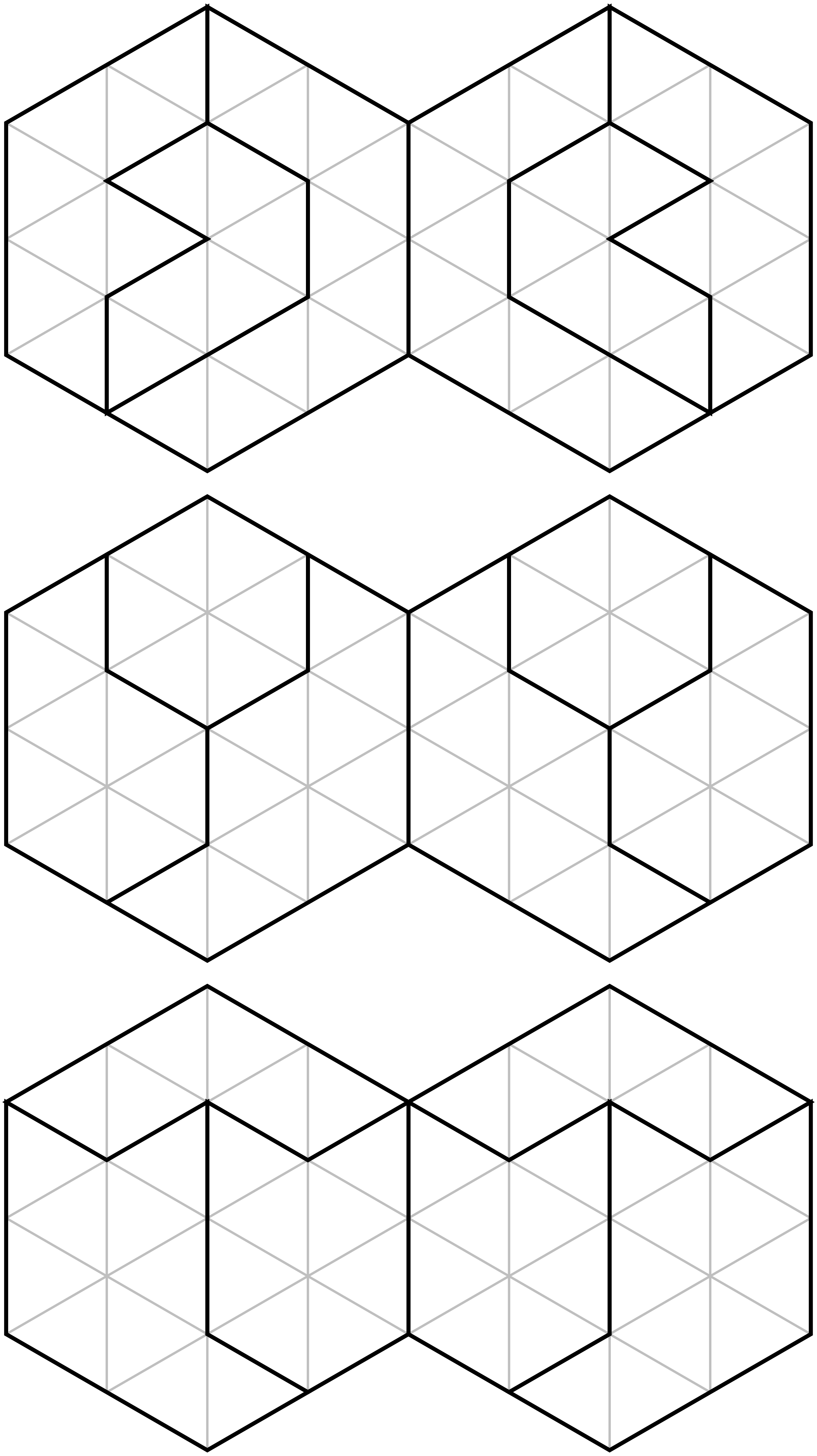

ABC
AEI
CEG
A
B
C
ADG
D
E
F
CFI
G
H
I
BEH
GHI
DEF

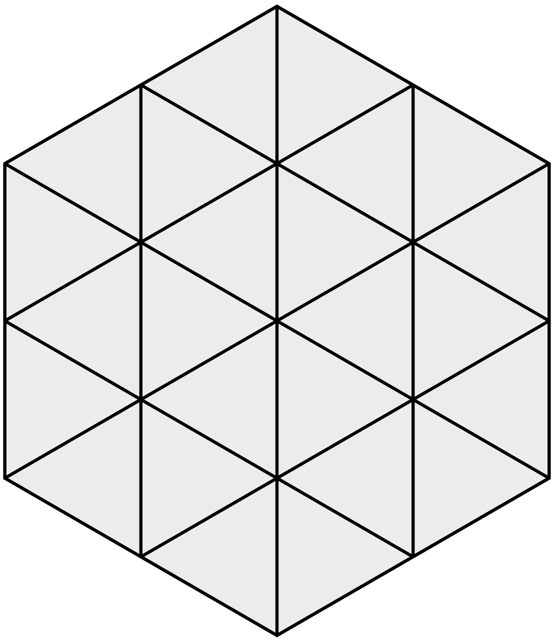


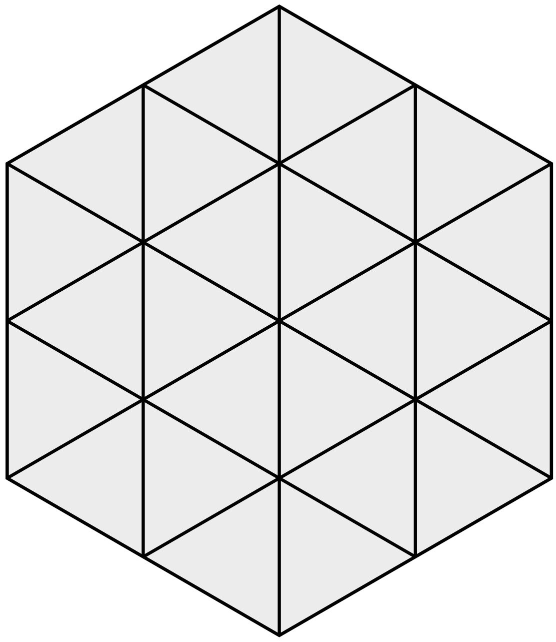


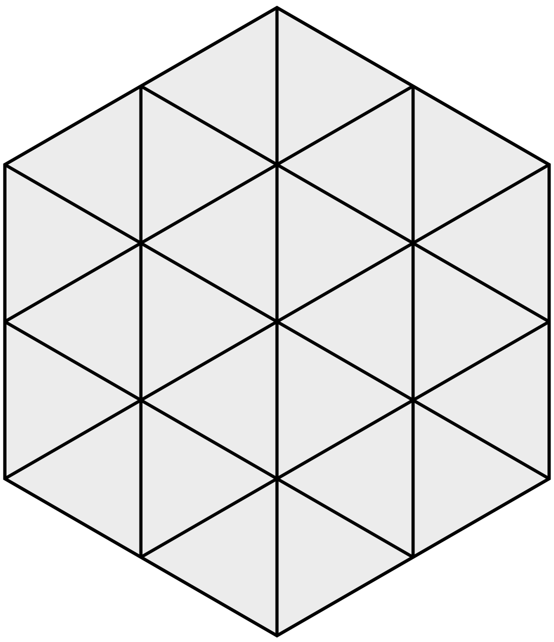


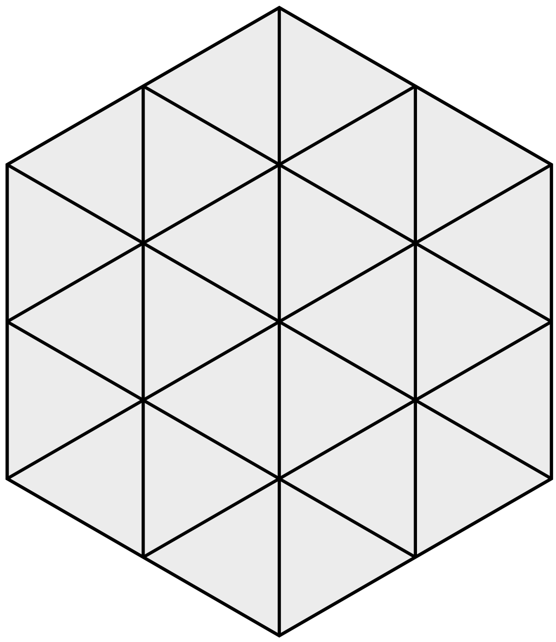


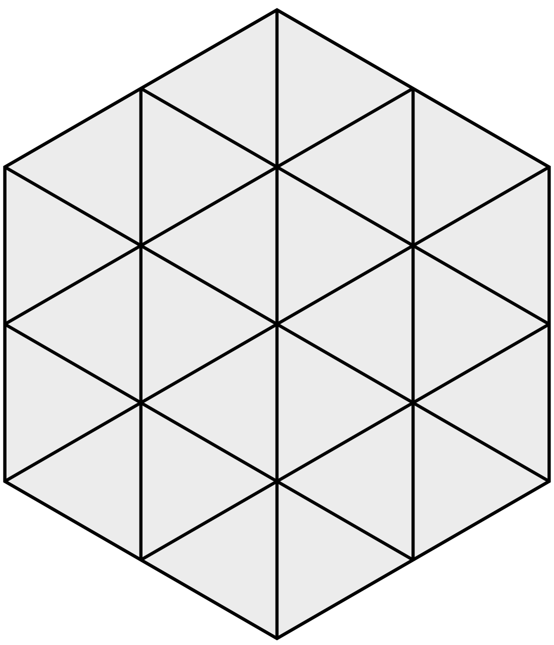


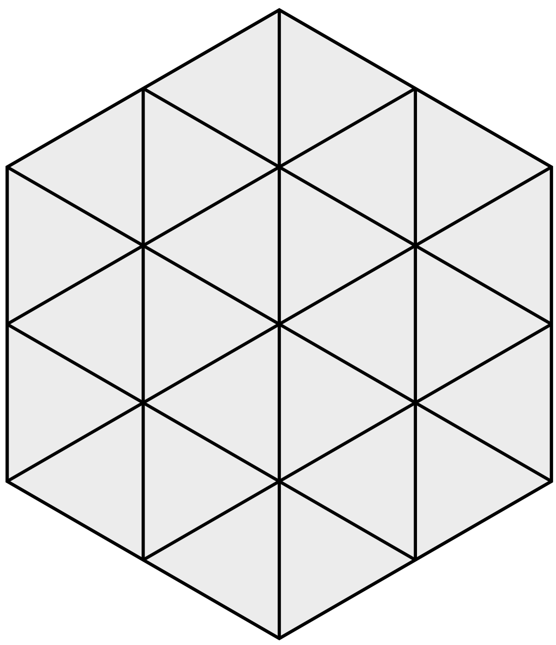


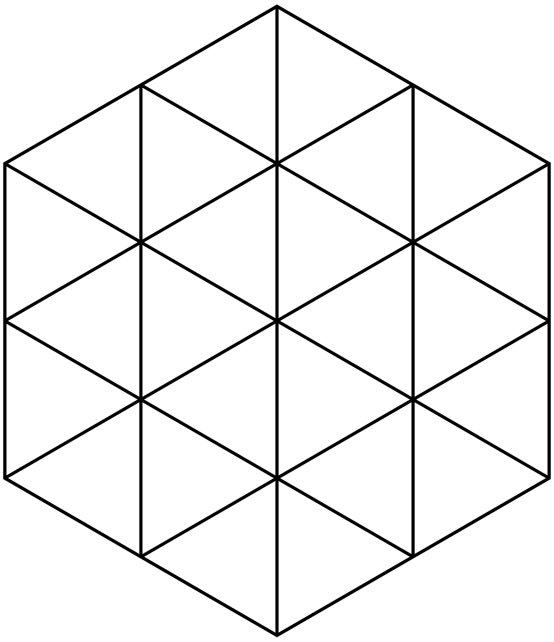
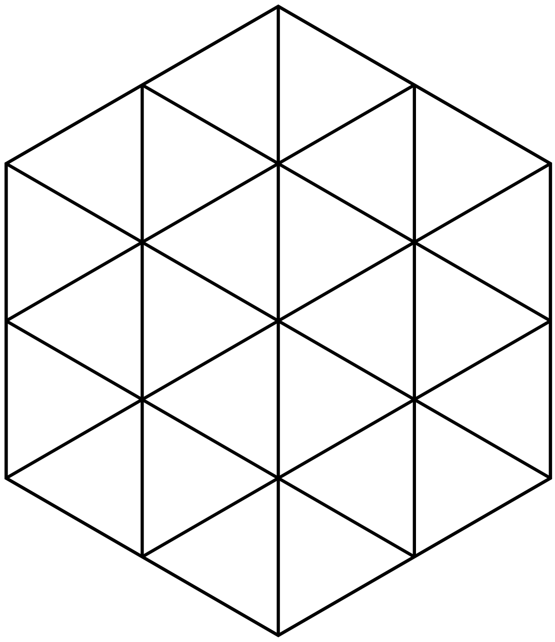
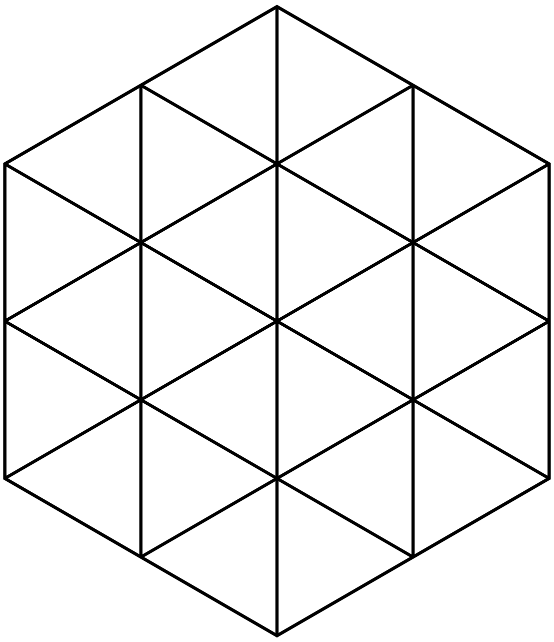
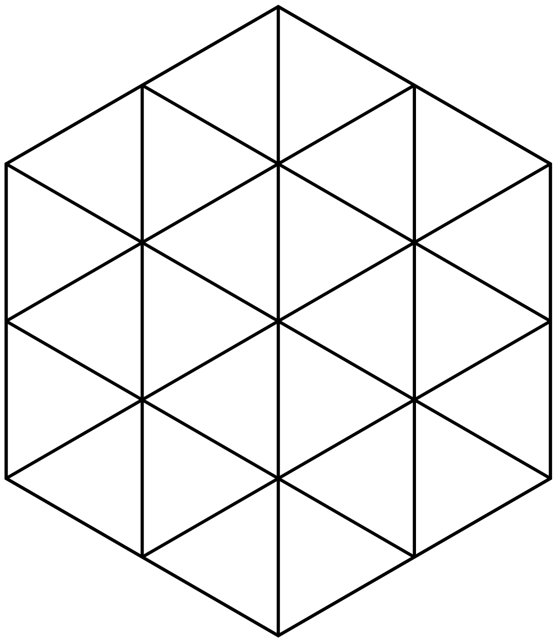
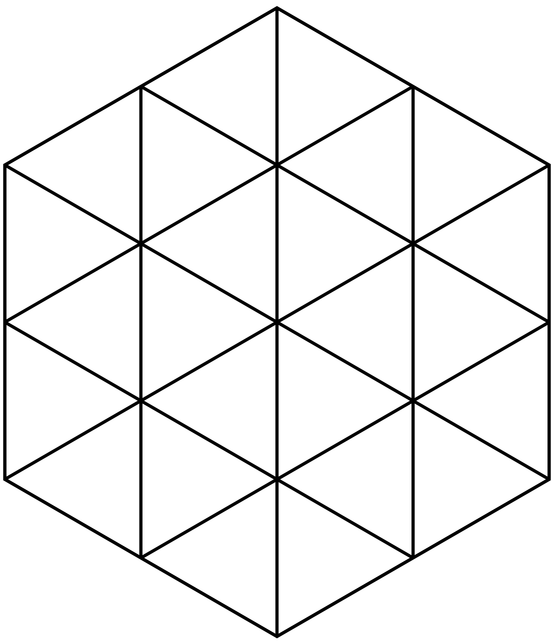
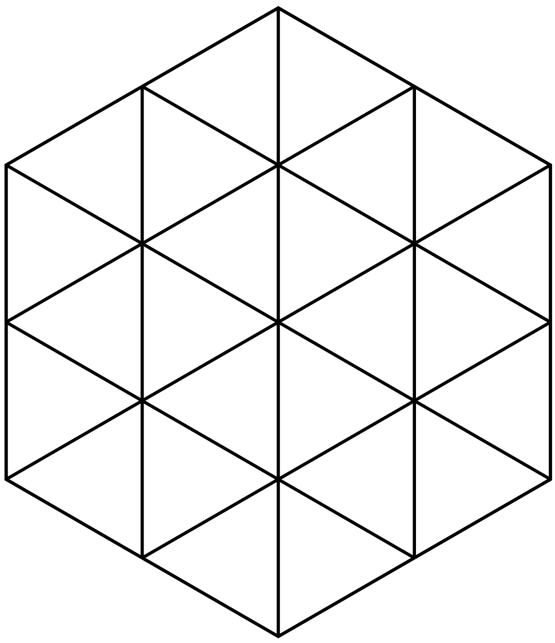








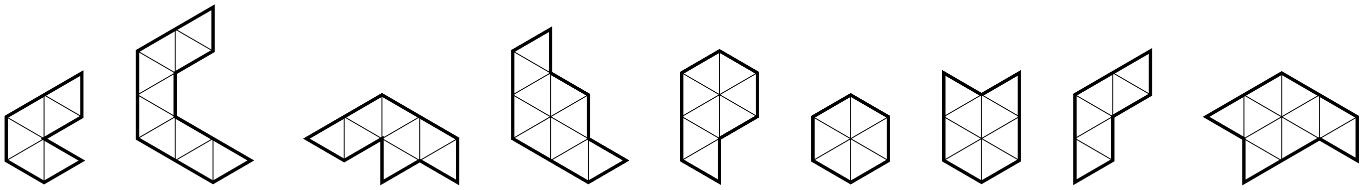


C10 : aire et périmètre

IREM de Lyon

Tu disposes des neuf pièces suivantes :



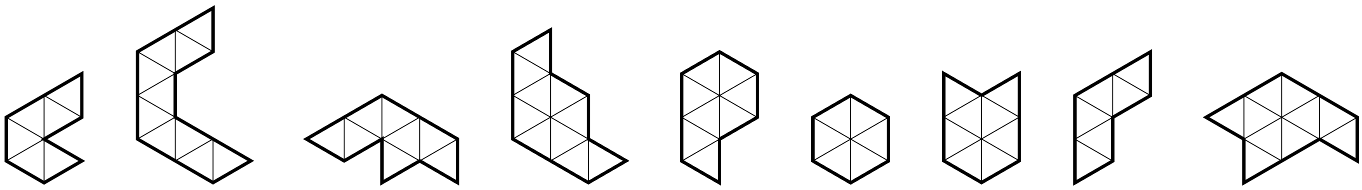
A B C D E F G H I

1. Aire
   - **a.** Regroupe par tas les pièces qui ont la même aire.
   - **b.** Ordonne ces tas de pièces dans l'ordre croissant de leur aire.
2. Périmètre
   - **a.** Regroupe par tas les pièces qui ont le même périmètre.
   - **b.** Ordonne ces tas de pièces dans l'ordre croissant de leur périmètre.
3. Aire et périmètre
   - **a.** Cherche s'il existe des pièces différentes ayant la même aire et le même périmètre.
   - **b.** Dispose les pièces sous la forme d'un tableau à double entrée, horizontalement par aire croissante et verticalement par périmètre croissant.

C10 : aire et périmètre

IREM de Lyon

Tu disposes des neuf pièces suivantes :

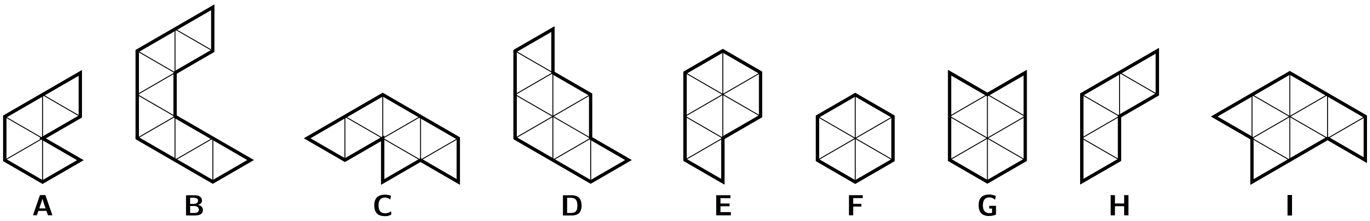


A B C D E F G H I

1. Aire
   - **a.** Regroupe par tas les pièces qui ont la même aire.
   - **b.** Ordonne ces tas de pièces dans l'ordre croissant de leur aire.
2. Périmètre
   - **a.** Regroupe par tas les pièces qui ont le même périmètre.
   - **b.** Ordonne ces tas de pièces dans l'ordre croissant de leur périmètre.
3. Aire et périmètre
   - **a.** Cherche s'il existe des pièces différentes ayant la même aire et le même périmètre.
   - **b.** Dispose les pièces sous la forme d'un tableau à double entrée, horizontalement par aire croissante et verticalement par périmètre croissant.

C10 : aire, périmètre et fractions

Tu disposes des neuf pièces suivantes :



1. Détermine l'aire (en triangle unité) et le périmètre (en segment unité) de chaque pièce.

2. Complète le tableau ci-dessous, qui indique la proportion de l'aire d'une pièce par rapport à une autre.

↗	A	B	C	D	E	F	G	H	I
A	1	$\frac{3}{5}$							
B	$\frac{5}{3}$	1							
C									
D									
E									
F									
G									
H									
I									

3. Complète le tableau ci-dessous, qui indique la proportion du périmètre d'une pièce par rapport à une autre.

↗	A	B	C	D	E	F	G	H	I
A	1	$\frac{8}{12} = \frac{2}{3}$							
B	$\frac{12}{8} = \frac{3}{2}$	1							
C									
D									
E									
F									
G									
H									
I									

C10 : programme de construction (1)

Construction de la pièce **A**

1. Place un point O puis construis le cercle de centre O et de rayon 4 cm.
2. Place un point A sur le cercle.
3. Construis soigneusement B, C, D, E et F sur le cercle tel que ABCDEF soit un hexagone régulier.
4. Construis G, H, J, K, L et N, milieux respectifs des segments [OA], [OB], [OD], [OE], [OF] et [BC].
5. La pièce **A** est le polygone OGLKJNH.

Construction de la pièce **B**

1. Place un point O puis construis le cercle de centre O et de rayon 4 cm.
2. Place un point A sur le cercle.
3. Construis soigneusement B, C, D, E et F sur le cercle tel que ABCDEF soit un hexagone régulier.
4. Construis H, I, J et K, milieux respectifs des segments [OB], [OC], [OD] et [EF].
5. La pièce **B** est le polygone HBCDEKJI.

Construction de la pièce **C**

1. Place un point O puis construis le cercle de centre O et de rayon 4 cm.
2. Place un point A sur le cercle.
3. Construis soigneusement B, C, D, E et F sur le cercle tel que ABCDEF soit un hexagone régulier.
4. Construis G, H, L et R, milieux respectifs des segments [OA], [OB], [OF] et [EF].
5. La pièce **C** est le polygone ABHGOLRF.

Construction de la pièce **D**

1. Place un point O puis construis le cercle de centre O et de rayon 4 cm.
2. Place un point A sur le cercle.
3. Construis soigneusement B, C, D, E et F sur le cercle tel que ABCDEF soit un hexagone régulier.
4. Construis G, I, P et S, milieux respectifs des segments [OA], [OC], [CD] et [AF].
5. La pièce **D** est le polygone ABCPIOGS.

Construction de la pièce **E**

1. Place un point O puis construis le cercle de centre O et de rayon 4 cm.
2. Place un point A sur le cercle.
3. Construis soigneusement B, C, D, E et F sur le cercle tel que ABCDEF soit un hexagone régulier.
4. Construis H, I, J, K, L et S, milieux respectifs des segments [OB], [OC], [OD], [OE], [OF] et [AF].
5. La pièce **E** est le polygone IHSFLKJ.

Construction de la pièce **F**

1. Place un point O puis construis le cercle de centre O et de rayon 4 cm.
2. Place un point A sur le cercle.
3. Construis soigneusement B, C, D, E et F sur le cercle tel que ABCDEF soit un hexagone régulier.
4. Construis G, H, I, J, K et L, milieux respectifs des segments [OA], [OB], [OC], [OD], [OE] et [OF].
5. La pièce **F** est le polygone GHIJKL.

Construction de la pièce **G**

1. Place un point O puis construis le cercle de centre O et de rayon 4 cm.
2. Place un point A sur le cercle.
3. Construis soigneusement B, C, D, E et F sur le cercle tel que ABCDEF soit un hexagone régulier.
4. Construis H, J, K, L, M et N, milieux respectifs des segments [OB], [OD], [OE], [OF], [AB] et [BC].
5. La pièce **G** est le polygone JKLMHN.

Construction de la pièce **H**

1. Place un point O puis construis le cercle de centre O et de rayon 4 cm.
2. Place un point A sur le cercle.
3. Construis soigneusement B, C, D, E et F sur le cercle tel que ABCDEF soit un hexagone régulier.
4. Construis G, H et I, milieux respectifs des segments [OA], [OB] et [OC].
5. La pièce **H** est le polygone ABCIHG.

Construction de la pièce **I**

1. Place un point O puis construis le cercle de centre O et de rayon 4 cm.
2. Place un point A sur le cercle.
3. Construis soigneusement B, C, D, E et F sur le cercle tel que ABCDEF soit un hexagone régulier.
4. Construis H, I, L et R, milieux respectifs des segments [OB], [OC], [OF] et [EF].
5. La pièce **I** est le polygone ABHILRF.

Construction du **plateau**

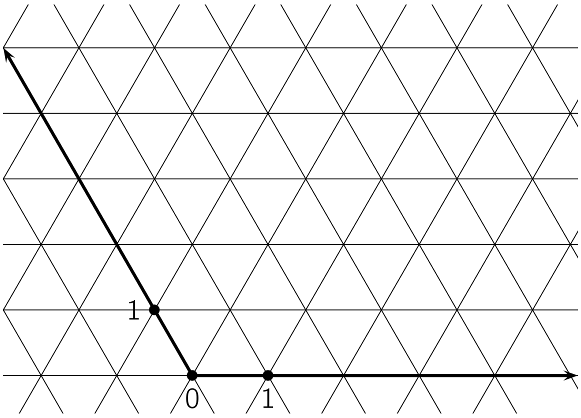
1. Place un point O puis construis le cercle de centre O et de rayon 8 cm.
2. Place un point U sur le cercle.
3. Construis soigneusement V, W, X, Y et Z sur le cercle tel que UVWXYZ soit un hexagone régulier.
4. Le **plateau** est le polygone UVWXYZ.

Le modèle est recouvert avec les trois pièces (réversibles) des huit possibilités suivantes :

- **A**, **B** et **C**
- **A**, **E** et **I**
- **C**, **E** et **G**
- **D**, **E** et **F**
- **A**, **D** et **G**
- **B**, **E** et **H**
- **C**, **F** et **I**
- **G**, **H** et **I**

C10 : programme de construction (2)

IREM de Lyon



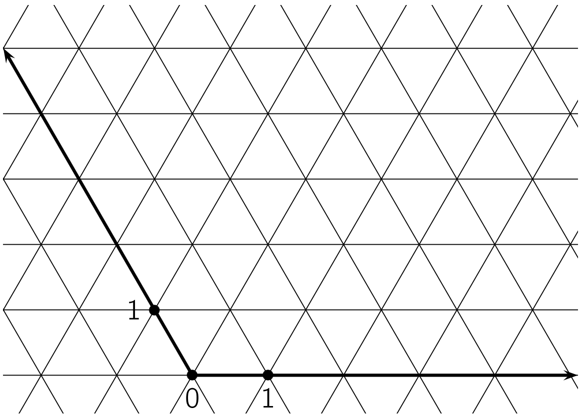
1. Dans le repère ci-contre, place les points suivants :

A (3 ; 5)	C (5 ; 5)	D (2 ; 4)	E (3 ; 4)
F (4 ; 4)	H (1 ; 3)	J (3 ; 3)	K (4 ; 3)
L (5 ; 3)	M (1 ; 2)	N (2 ; 2)	Q (1 ; 1)
S (3 ; 1)			

2. Trace l'hexagone AHQSLC.
Trace la ligne brisée DEJ.
Trace la ligne brisée MNFKL.

C10 : programme de construction (2)

IREM de Lyon



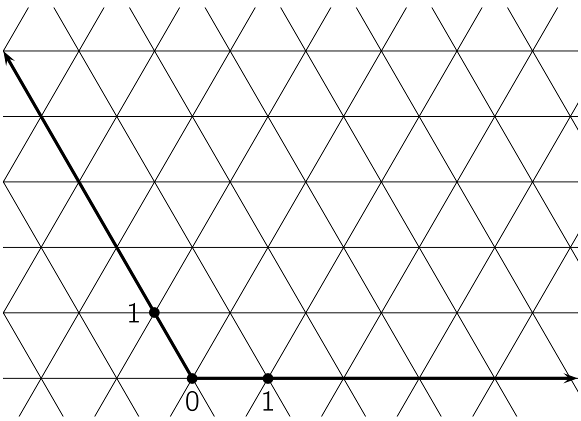
1. Dans le repère ci-contre, place les points suivants :

A (3 ; 5)	C (5 ; 5)	E (3 ; 4)	F (4 ; 4)
H (1 ; 3)	K (4 ; 3)	L (5 ; 3)	M (1 ; 2)
N (2 ; 2)	O (3 ; 2)	Q (1 ; 1)	S (3 ; 1)

2. Trace l'hexagone AHQSLC.
Trace la ligne brisée MEFK.
Trace la ligne brisée QNOKL.

C10 : programme de construction (2)

IREM de Lyon



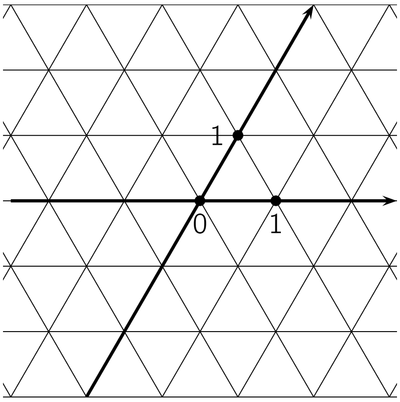
1. Dans le repère ci-contre, place les points suivants :

A (3 ; 5)	C (5 ; 5)	C (5 ; 5)	E (3 ; 4)
F (4 ; 4)	H (1 ; 3)	J (3 ; 3)	K (4 ; 3)
L (5 ; 3)	N (2 ; 2)	Q (1 ; 1)	R (2 ; 1)
S (3 ; 1)			

2. Trace l'hexagone AHQSLC.
Trace la ligne brisée BEJ.
Trace la ligne brisée RNFKL.

C10 : programme de construction (3)

IREM de Lyon



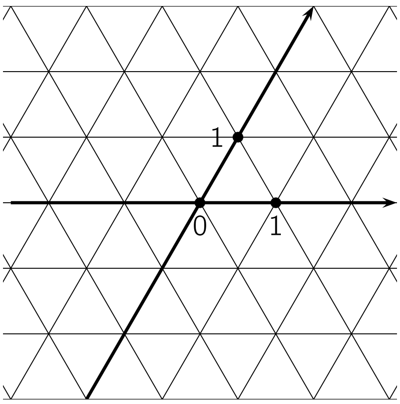
1. Dans le repère ci-contre, place les points suivants :

A (2 ; 0) B (0 ; 2) C (−2 ; 2) D (−2 ; 0) E (0 ; −2)
F (2 ; −2) G (1 ; 0) H (0 ; 1) I (−1 ; 1) J (−1 ; 0)
K (1 ; −2) L (1 ; −1) O (0 ; 0)

2. Trace l'hexagone ABCDEF.
Trace la ligne brisée BHIJKLOGH.

C10 : programme de construction (3)

IREM de Lyon



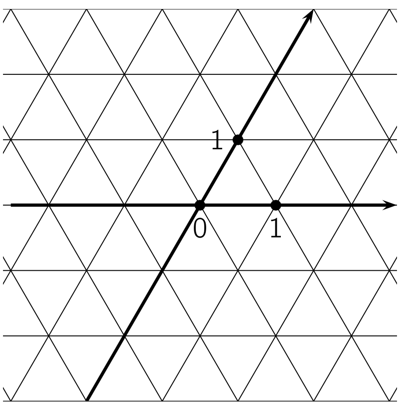
1. Dans le repère ci-contre, place les points suivants :

A (2 ; 0) B (0 ; 2) C (−2 ; 2) D (−2 ; 0)
E (0 ; −2) F (2 ; −2) G (−2 ; 1) H (1 ; 0)
I (0 ; 1) J (−1 ; 0) K (1 ; −1)

2. Trace l'hexagone ABCDEF.
Trace la ligne brisée GJH.
Trace la ligne brisée BIHKF.

C10 : programme de construction (3)

IREM de Lyon

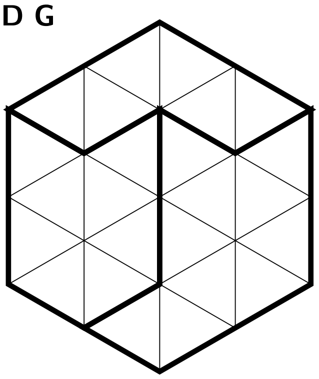


1. Dans le repère ci-contre, place les points suivants :

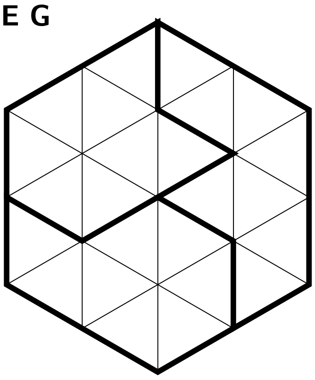
A (2 ; 0) B (0 ; 2) C (−2 ; 2) D (−2 ; 0) E (0 ; −2)
F (2 ; −2) G (−2 ; 1) H (1 ; −2) I (2 ; −1) J (1 ; 0)
K (−1 ; 1) L (0 ; −1) O (0 ; 0)

2. Trace l'hexagone ABCDEF.
Trace la ligne brisée OLH.
Trace la ligne brisée GKOJI.

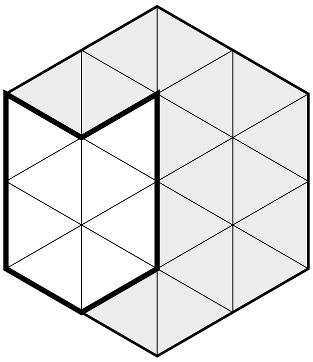
A D G



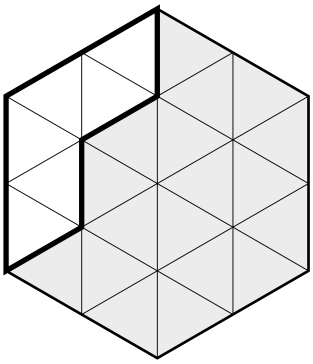
C E G



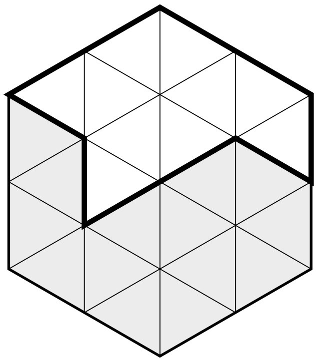
G



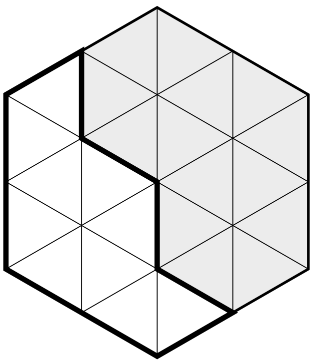
H



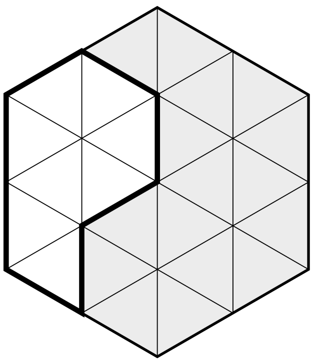
I



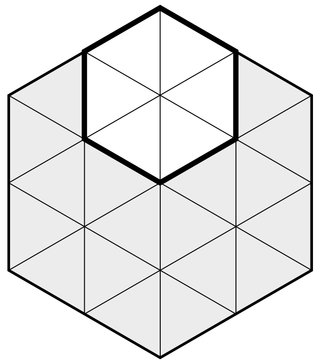
D



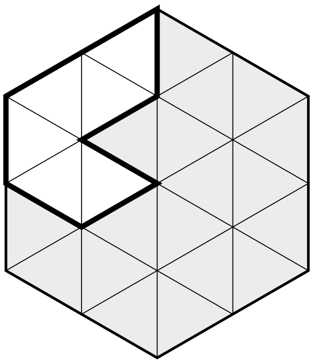
E



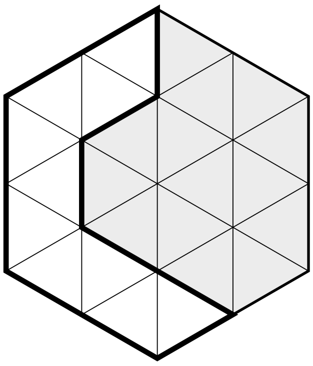
F



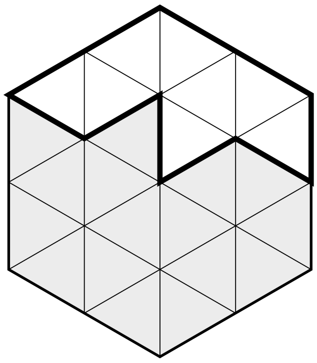
A

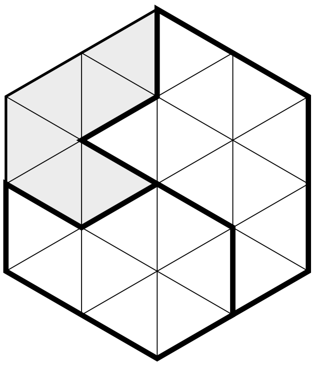
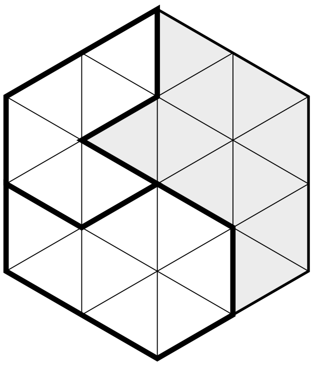
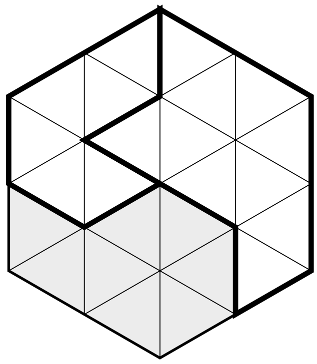
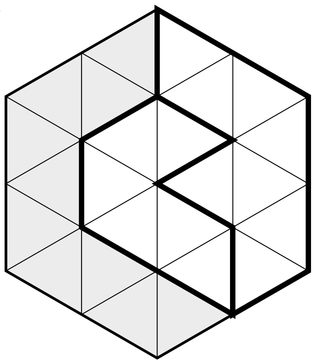
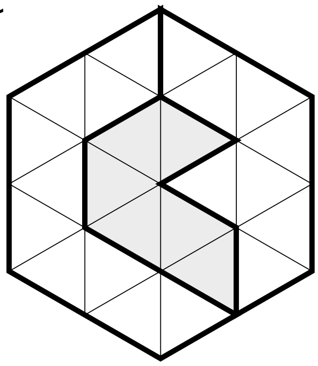
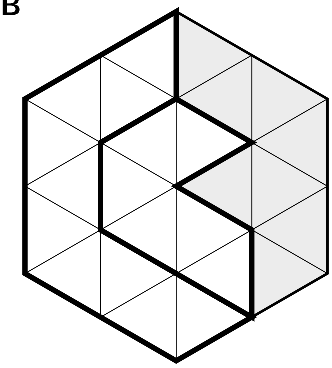
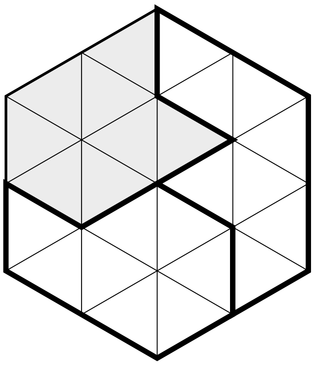
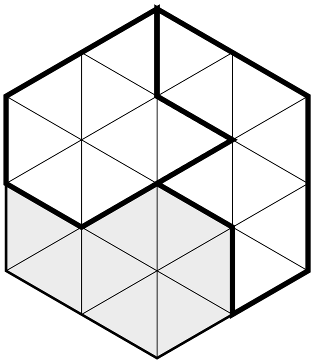
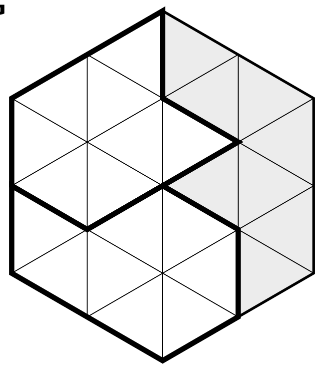
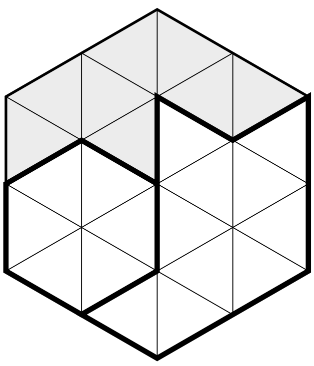
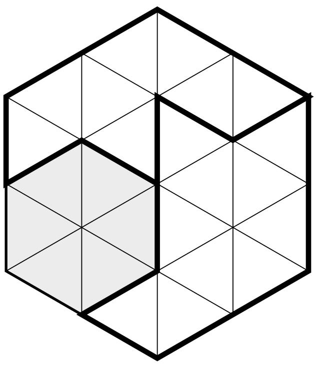
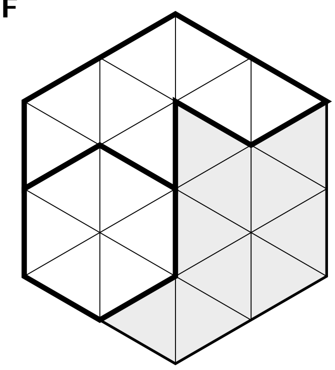


B

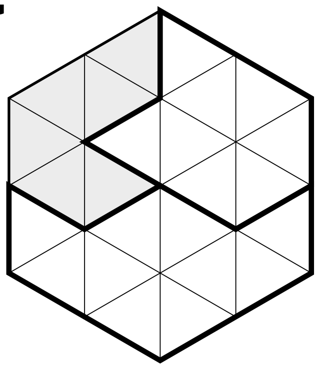


C

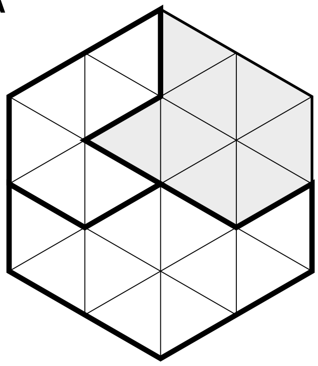


E I 	**E A** 	**A I** 
A C 	**B C** 	**A B** 
C E 	**C G** 	**E G** 
F I 	**C I** 	**C F** 

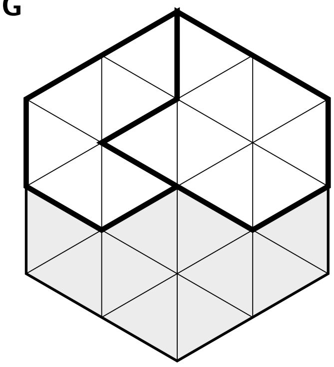
D G



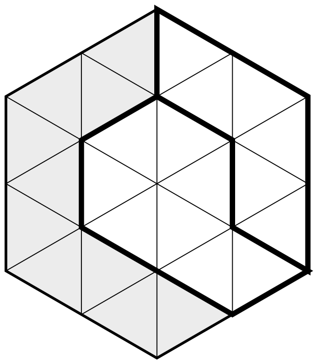
D A



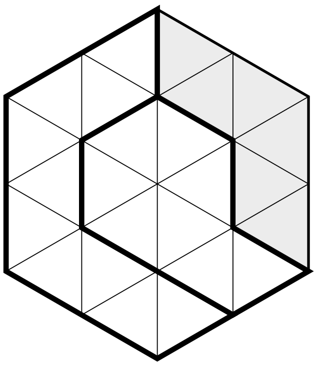
A G



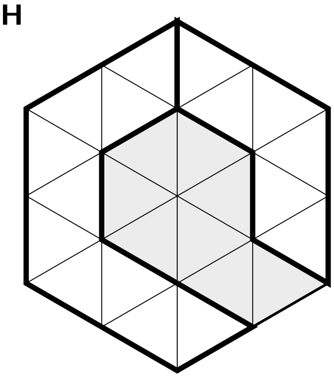
E H



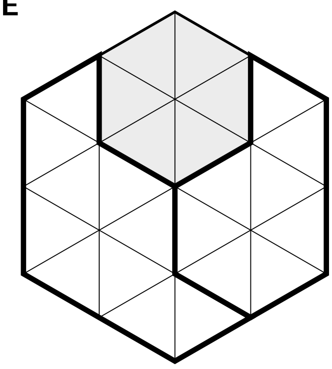
E B



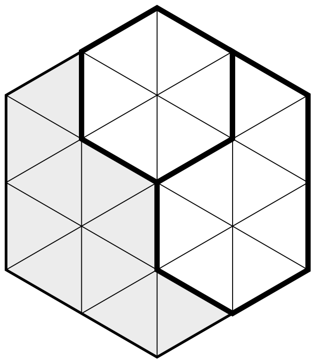
B H



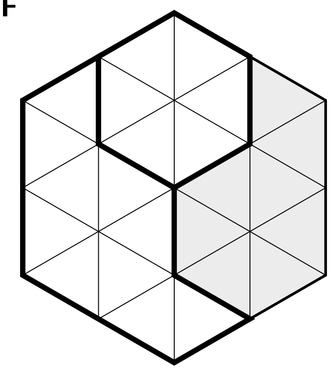
D E



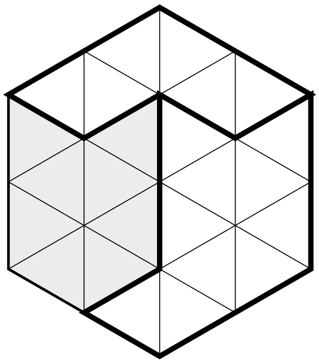
E F



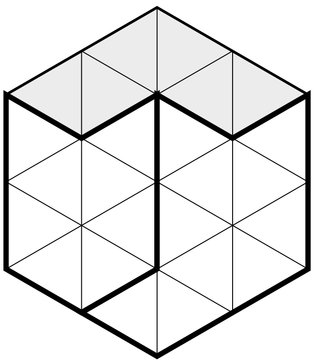
D F



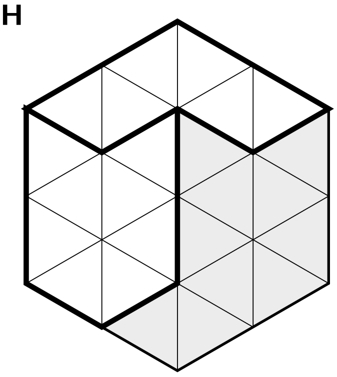
H I



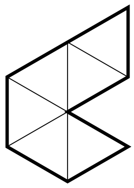
G I



G H

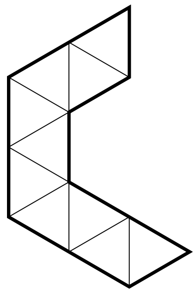


A



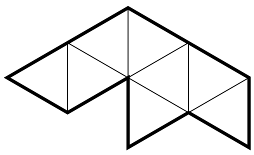
6

B



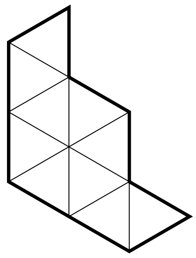
6

C



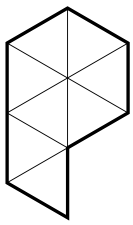
6

D



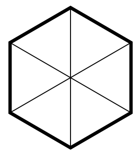
6

E



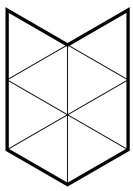
6

F



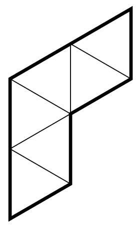
6

G



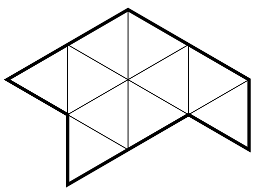
6

H



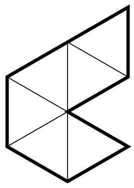
6

I



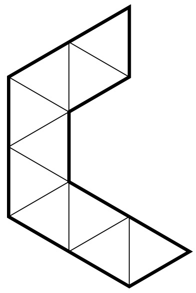
6

A



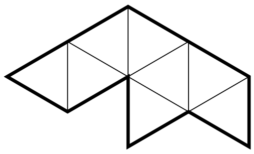
8

B



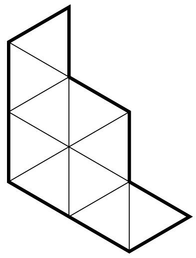
8

C



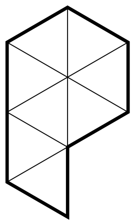
8

D



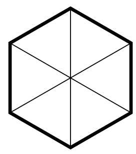
8

E



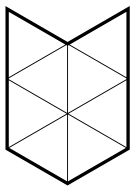
8

F



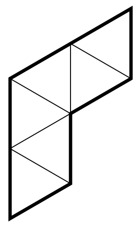
8

G



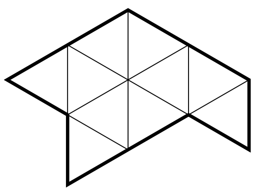
8

H



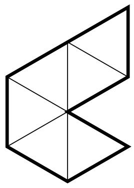
8

I



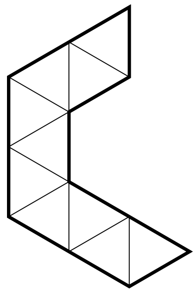
8

A



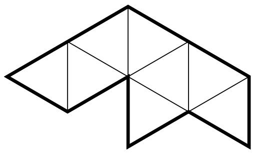
10

B



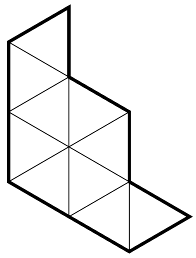
10

C



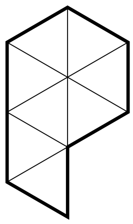
10

D



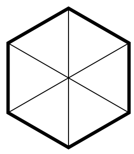
10

E



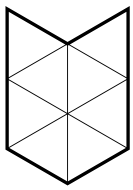
10

F



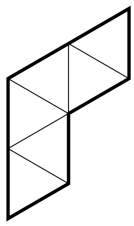
10

G



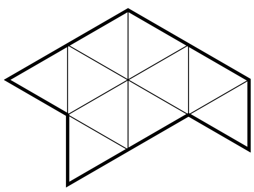
10

H



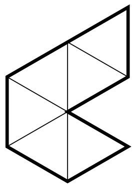
10

I



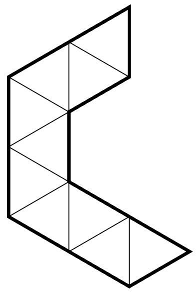
10

A



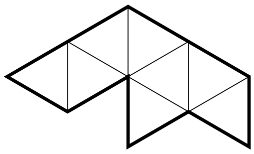
12

B



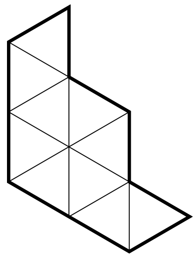
12

C



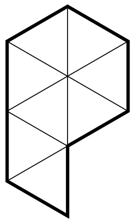
12

D



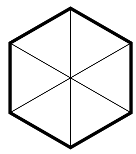
12

E



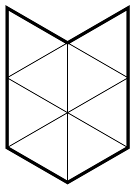
12

F



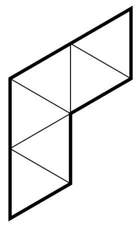
12

G



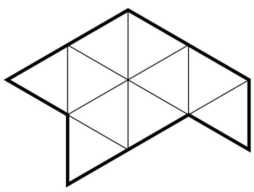
12

H



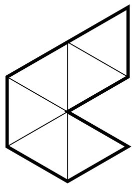
12

I



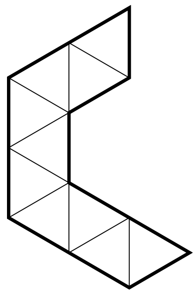
12

A



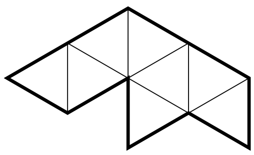
6

B



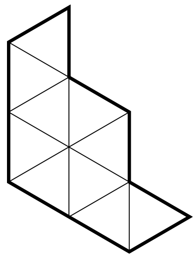
6

C



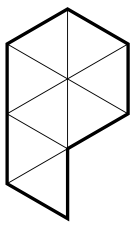
6

D



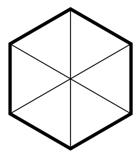
6

E



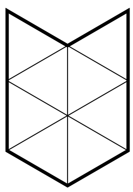
6

F



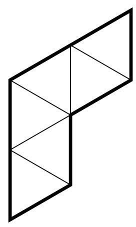
6

G



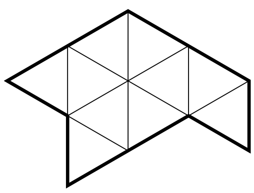
6

H



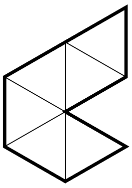
6

I



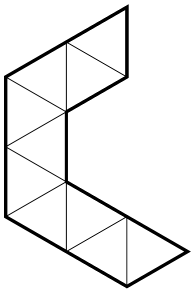
6

A



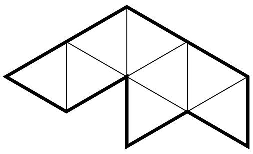
8

B



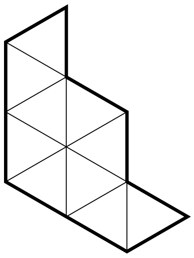
8

C



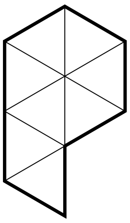
8

D



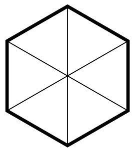
8

E



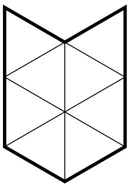
8

F



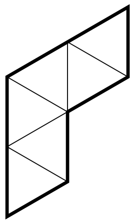
8

G



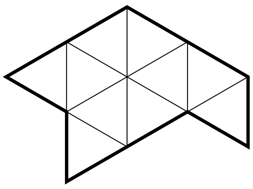
8

H



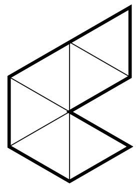
8

I



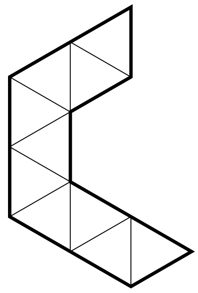
8

A



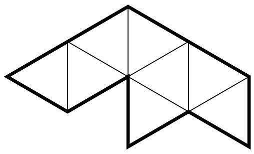
10

B



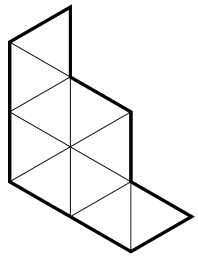
10

C



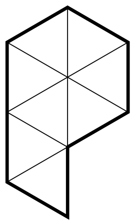
10

D



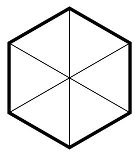
10

E



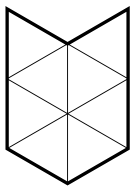
10

F



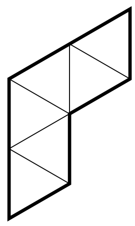
10

G



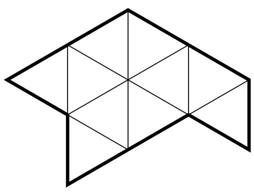
10

H



10

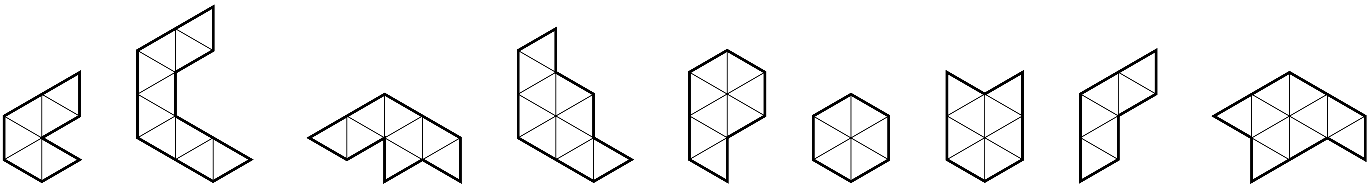
I



10

C10 : aire, périmètre et MosaColla (1)

IREM de Lyon



A **B** **C** **D** **E** **F** **G** **H** **I**

❶

A1 Les pièces **A** et **F** ont la même aire. . . . .

B1 Les pièces **E** et **H** ont la même aire. . . . .

C1 Les pièces **C** et **G** ont la même aire. . . . .

A2 Les pièces **B** et **I** ont le même périmètre. . . . .

B2 Les pièces **C** et **I** ont la même aire. . . . .

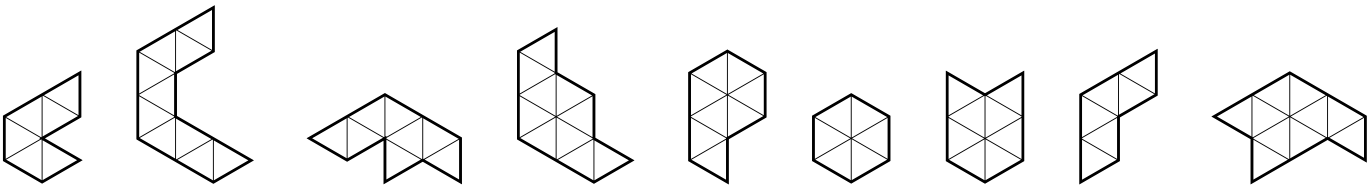
C2 Les pièces **F** et **H** ont la même aire. . . . .

A3 Les pièces **B** et **D** ont la même aire. . . . .

B3 Les pièces **A** et **E** ont la même aire. . . . .

C3 Les pièces **A** et **G** ont le même périmètre. . . . .

	A	B	C
1	↑	↑	↑
2	↑	↑	↑
3	↑	↑	↑



A **B** **C** **D** **E** **F** **G** **H** **I**

❷

A1 Les pièces **A** et **F** ont la même aire. . . . .

B1 Les pièces **E** et **H** ont la même aire. . . . .

C1 Les pièces **C** et **G** ont la même aire. . . . .

A2 Les pièces **B** et **I** ont le même périmètre. . . . .

B2 Les pièces **C** et **I** ont le même périmètre. . . . .

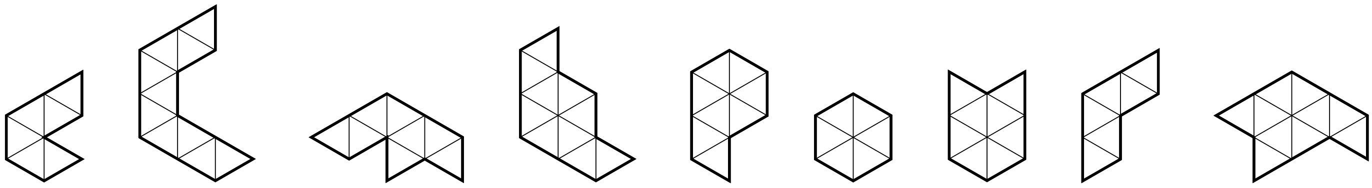
C2 Les pièces **F** et **H** ont le même périmètre. . . . .

A3 Les pièces **B** et **D** ont le même périmètre. . . . .

B3 Les pièces **A** et **E** ont le même périmètre. . . . .

C3 Les pièces **A** et **G** ont la même aire. . . . .

	A	B	C
1	↑	↑	↑
2	↑	↑	↑
3	↑	↑	↑



A **B** **C** **D** **E** **F** **G** **H** **I**

❸

A1 Les pièces **A** et **F** ont la même aire. ....

B1 Les pièces **E** et **H** ont la même aire. ....

C1 Les pièces **C** et **G** ont la même aire. ....

A2 Les pièces **B** et **I** ont la même aire. ....

B2 Les pièces **C** et **I** ont la même aire. ....

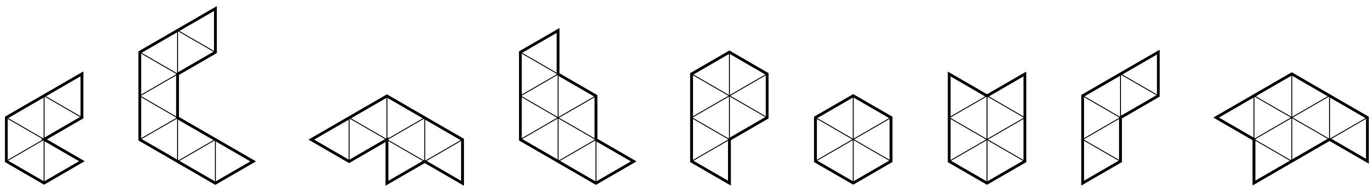
C2 Les pièces **F** et **H** ont la même aire. ....

A3 Les pièces **B** et **D** ont le même périmètre. ....

B3 Les pièces **A** et **E** ont la même aire. ....

C3 Les pièces **A** et **G** ont la même aire. ....

	A	B	C
1	↑	↑	↑
2	↑	↑	↑
3	↑	↑	↑



A **B** **C** **D** **E** **F** **G** **H** **I**

❹

A1 Les pièces **A** et **F** ont le même périmètre. ....

B1 Les pièces **E** et **H** ont le même périmètre. ....

C1 Les pièces **C** et **G** ont le même périmètre. ....

A2 Les pièces **B** et **I** ont le même périmètre. ....

B2 Les pièces **C** et **I** ont le même périmètre. ....

C2 Les pièces **F** et **H** ont le même périmètre. ....

A3 Les pièces **B** et **D** ont la même aire. ....

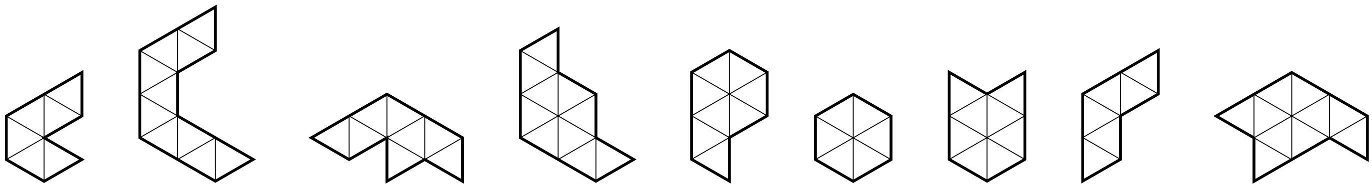
B3 Les pièces **A** et **E** ont la même aire. ....

C3 Les pièces **A** et **G** ont le même périmètre. ....

	A	B	C
1	↑	↑	↑
2	↑	↑	↑
3	↑	↑	↑

C10 : aire, périmètre et MosaColla (2)

IREM de Lyon



A **B** **C** **D** **E** **F** **G** **H** **I**

❶

A1 Les pièces **A** et **F** ont la même aire. . . . .

B1 Les pièces **E** et **H** ont la même aire. . . . .

C1 Les pièces **C** et **G** ont le même périmètre. . . . .

A2 Les pièces **B** et **I** ont la même aire. . . . .

B2 Les pièces **C** et **I** ont le même périmètre. . . . .

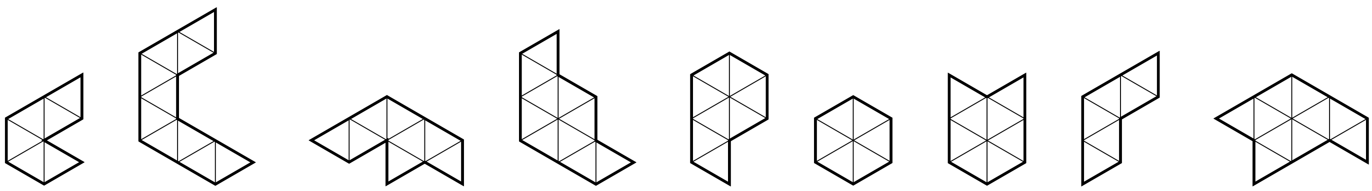
C2 Les pièces **F** et **H** ont la même aire. . . . .

A3 Les pièces **B** et **D** ont la même aire. . . . .

B3 Les pièces **A** et **E** ont le même périmètre. . . . .

C3 Les pièces **A** et **G** ont la même aire. . . . .

	A	B	C
1	↑	↑	↑
2	↑	↑	↑
3	↑	↑	↑



A **B** **C** **D** **E** **F** **G** **H** **I**

❷

A1 Les pièces **A** et **F** ont le même périmètre. . . . .

B1 Les pièces **E** et **H** ont le même périmètre. . . . .

C1 Les pièces **C** et **G** ont la même aire. . . . .

A2 Les pièces **B** et **I** ont le même périmètre. . . . .

B2 Les pièces **C** et **I** ont le même périmètre. . . . .

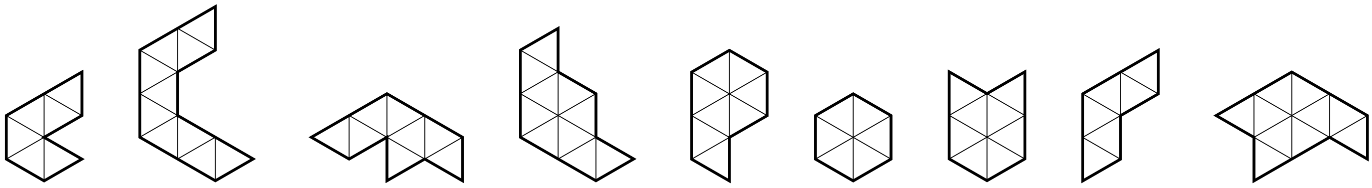
C2 Les pièces **F** et **H** ont le même périmètre. . . . .

A3 Les pièces **B** et **D** ont le même périmètre. . . . .

B3 Les pièces **A** et **E** ont le même périmètre. . . . .

C3 Les pièces **A** et **G** ont la même aire. . . . .

	A	B	C
1	↑	↑	↑
2	↑	↑	↑
3	↑	↑	↑



A **B** **C** **D** **E** **F** **G** **H** **I**

❸

A1 Les pièces **A** et **F** ont la même aire. . . . .

B1 Les pièces **E** et **H** ont le même périmètre. . . . .

C1 Les pièces **C** et **G** ont le même périmètre. . . . .

A2 Les pièces **B** et **I** ont la même aire. . . . .

B2 Les pièces **C** et **I** ont le même périmètre. . . . .

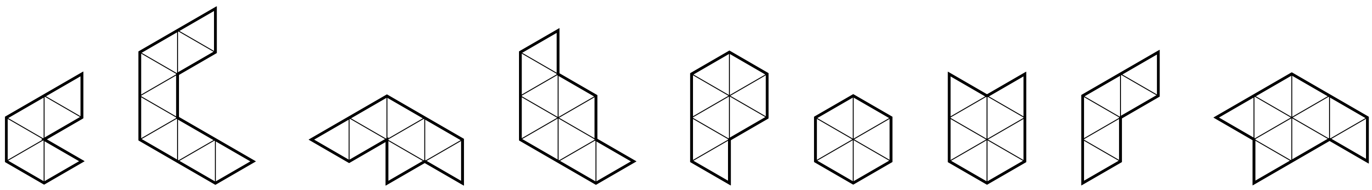
C2 Les pièces **F** et **H** ont la même aire. . . . .

A3 Les pièces **B** et **D** ont la même aire. . . . .

B3 Les pièces **A** et **E** ont le même périmètre. . . . .

C3 Les pièces **A** et **G** ont la même aire. . . . .

	A	B	C
1	↑	↑	↑
2	↑	↑	↑
3	↑	↑	↑



A **B** **C** **D** **E** **F** **G** **H** **I**

❹

A1 Les pièces **A** et **F** ont la même aire. . . . .

B1 Les pièces **E** et **H** ont le même périmètre. . . . .

C1 Les pièces **C** et **G** ont le même périmètre. . . . .

A2 Les pièces **B** et **I** ont la même aire. . . . .

B2 Les pièces **C** et **I** ont le même périmètre. . . . .

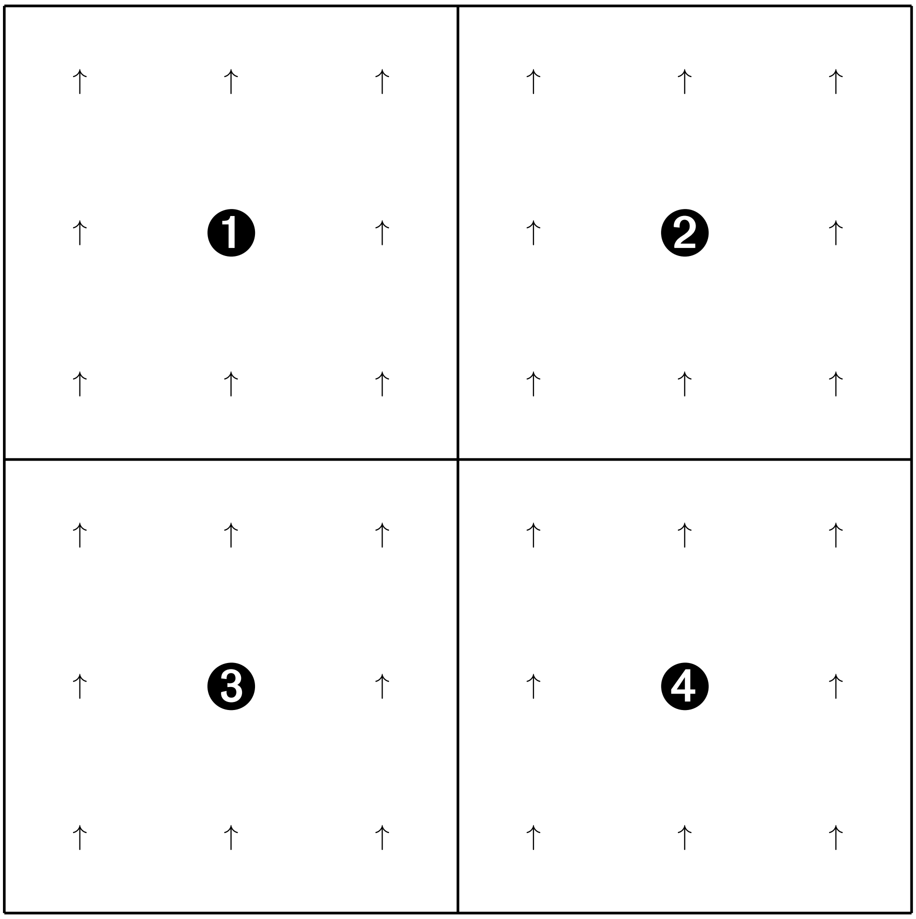
C2 Les pièces **F** et **H** ont la même aire. . . . .

A3 Les pièces **B** et **D** ont la même aire. . . . .

B3 Les pièces **A** et **E** ont le même périmètre. . . . .

C3 Les pièces **A** et **G** ont la même aire. . . . .

	A	B	C
1	↑	↑	↑
2	↑	↑	↑
3	↑	↑	↑


❶
❷
❸
❹

	A	B	C
1	↑	↑	↑
2	↑	↑	↑
3	↑	↑	↑

	A	B	C
1	↑	↑	↑
2	↑	↑	↑
3	↑	↑	↑

	A	B	C
1	↑	↑	↑
2	↑	↑	↑
3	↑	↑	↑

	A	B	C
1	↑	↑	↑
2	↑	↑	↑
3	↑	↑	↑

	A	B	C
1	↑	↑	↑
2	↑	↑	↑
3	↑	↑	↑

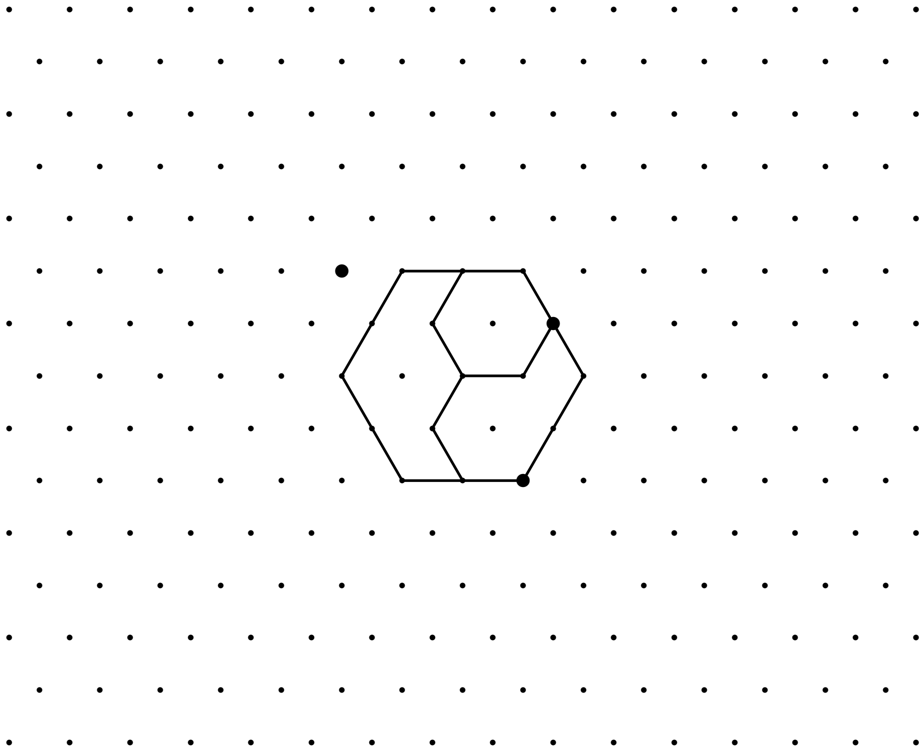
	A	B	C
1	↑	↑	↑
2	↑	↑	↑
3	↑	↑	↑

(À reproduire en deux exemplaires pour une utilisation avec trois groupes de quatre élèves.)

C10 : symétrie centrale

IREM de Lyon

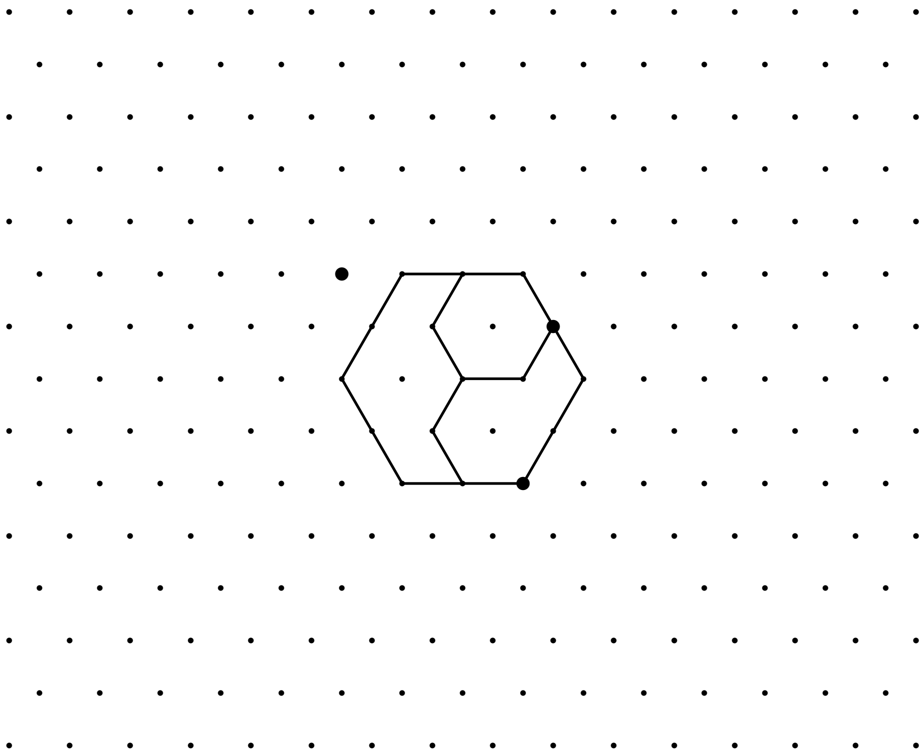
Dessine les trois figures symétriques par rapport aux trois centres.



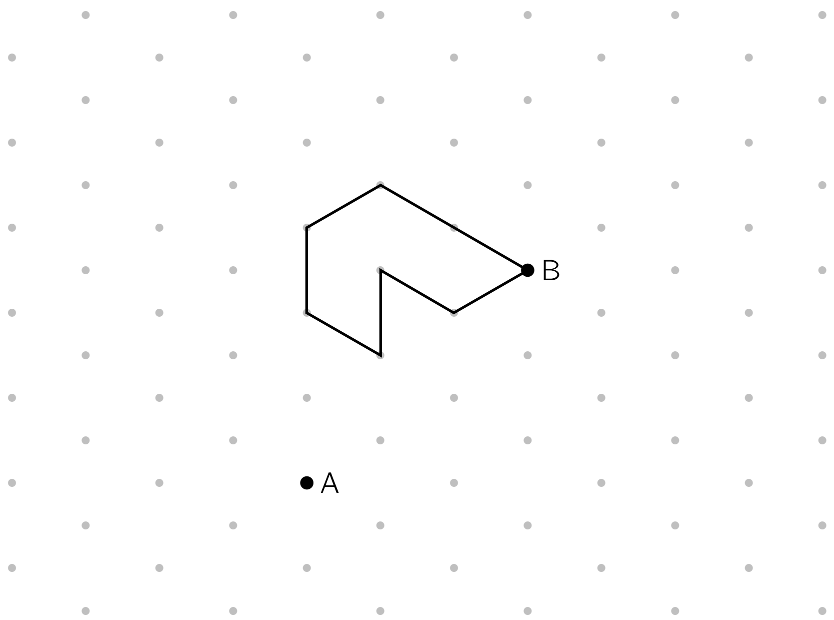
C10 : symétrie centrale

IREM de Lyon

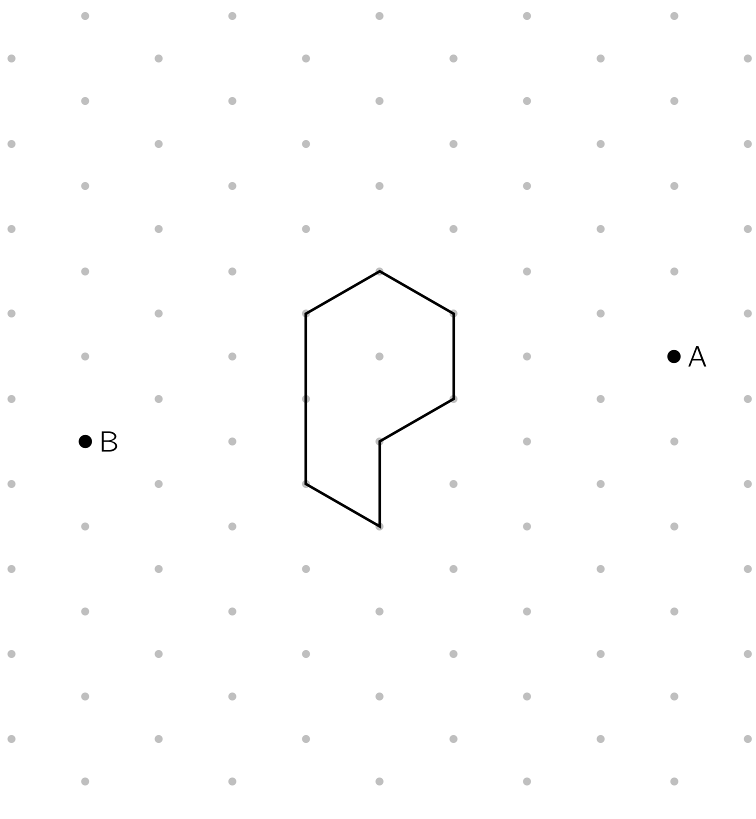
Dessine les trois figures symétriques par rapport aux trois centres.



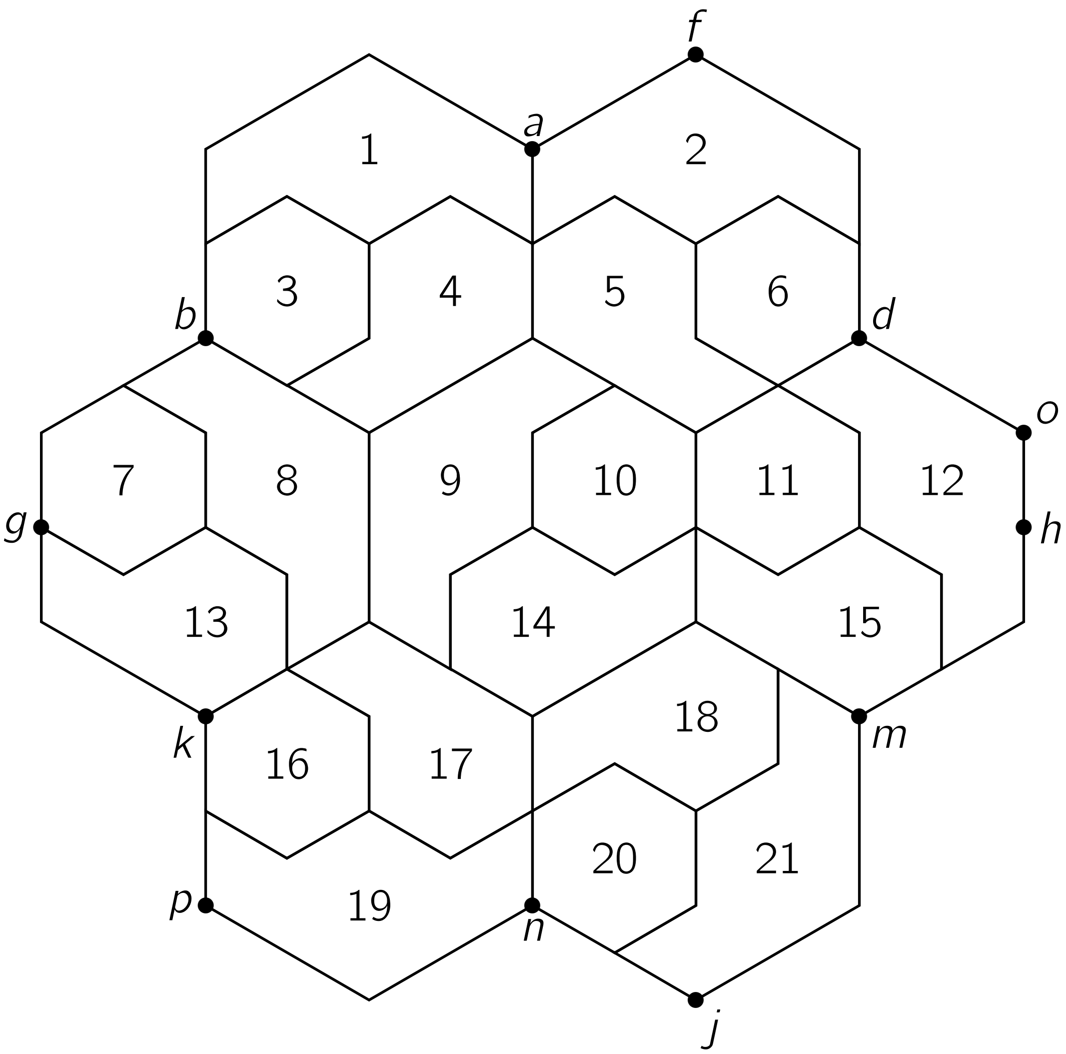
Le réseau ci-dessous est un réseau pointé équilatéral.
Dessine la figure ① image dans la rotation de centre A et d'angle 60° dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.
Dessine la figure ② image dans la rotation de centre B et d'angle 60° dans le sens des aiguilles d'une montre.



Le réseau ci-dessous est un réseau pointé équilatéral.
Dessine la figure ① image dans la rotation de centre A et d'angle 60° dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.
Dessine la figure ② image dans la rotation de centre B et d'angle 60° dans le sens des aiguilles d'une montre.

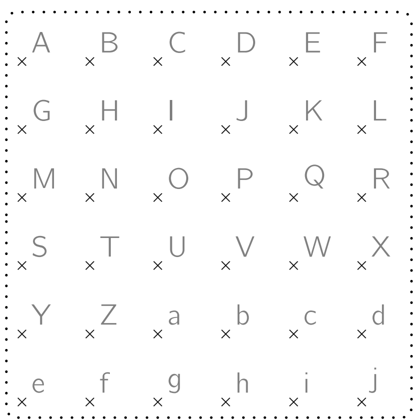


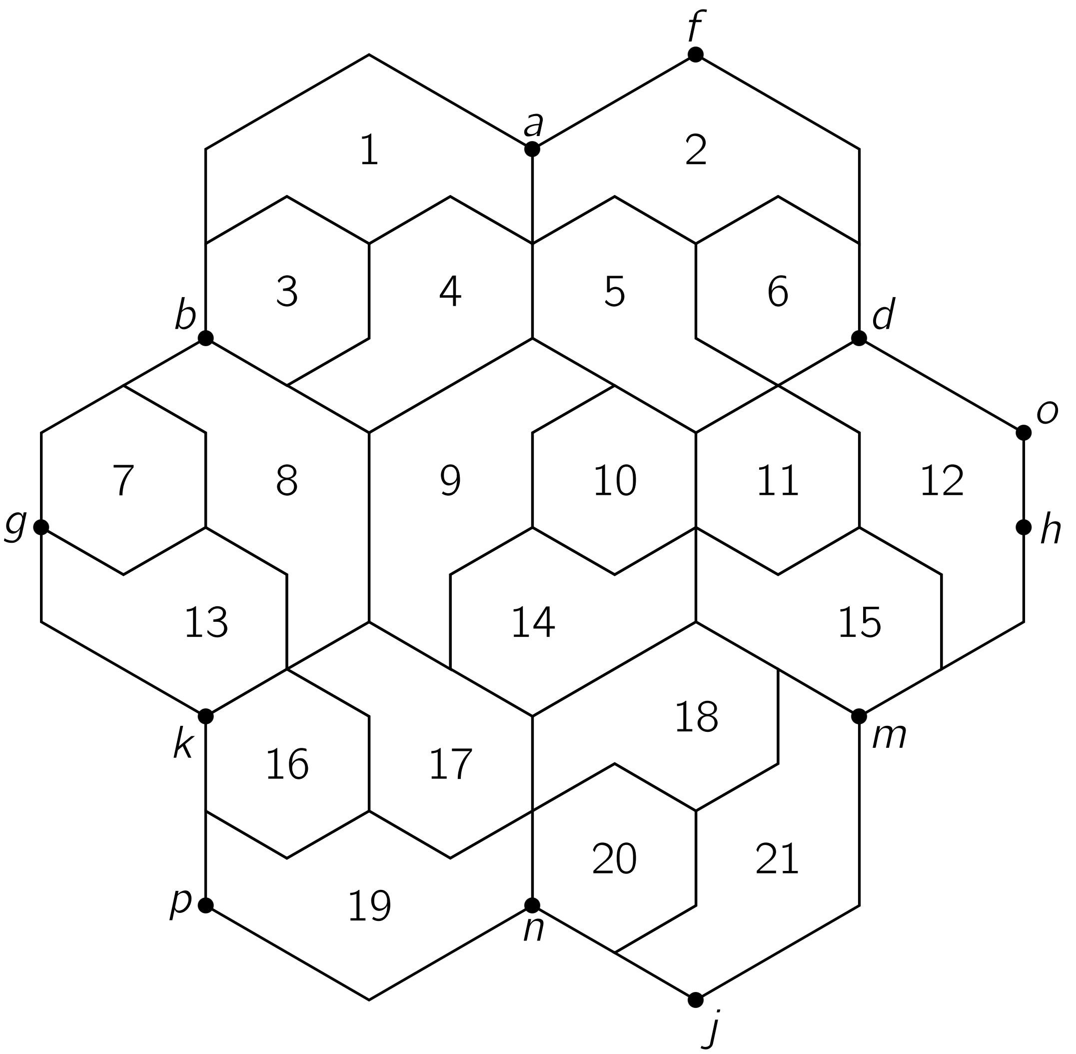
C10 : symétrie axiale et Vrai/Faux (1)



Si tu penses que la première phrase ci-dessous est vraie, trace dans le cadre de droite le segment [A M] ; si tu penses qu'elle est fausse, trace le segment [A N]. Et ainsi de suite.

	Vrai	Faux
2 a pour image **1** dans la symétrie axiale d'axe (an).	[A M]	[A N]
3 a pour image **6** dans la symétrie axiale d'axe (an).	[T f]	[E Q]
7 a pour image **16** dans la symétrie axiale d'axe (dk).	[J L]	[c j]
1 a pour image **21** dans la symétrie axiale d'axe (dk).	[D P]	[S e]
8 a pour image **12** dans la symétrie axiale d'axe (an).	[h j]	[V X]
14 a pour image **18** dans la symétrie axiale d'axe (op).	[G I]	[C O]
5 a pour image **13** dans la symétrie axiale d'axe (bm).	[U g]	[V h]
19 a pour image **2** dans la symétrie axiale d'axe (dk).	[c h]	[F R]
3 a pour image **16** dans la symétrie axiale d'axe (gh).	[b d]	[O P]
6 a pour image **11** dans la symétrie axiale d'axe (dk).	[Y a]	[A O]
9 a pour image **12** dans la symétrie axiale d'axe (fj).	[D F]	[S u]
5 a pour image **18** dans la symétrie axiale d'axe (gh).	[X j]	[X d]
2 a pour image **12** dans la symétrie axiale d'axe (dk).	[P u]	[P R]





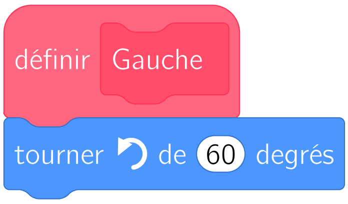
Si tu penses que la première phrase ci-dessous est vraie, trace dans le cadre de droite le segment [AM] ; si tu penses qu'elle est fausse, trace le segment [AN]. Et ainsi de suite.

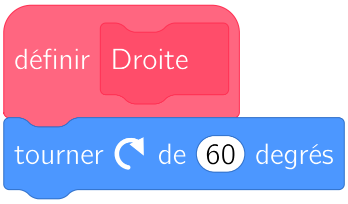
	Vrai	Faux
2 a pour image **1** dans la symétrie axiale d'axe (an).	[AM]	[AN]
3 a pour image **6** dans la symétrie axiale d'axe (an).	[DP]	[AO]
7 a pour image **16** dans la symétrie axiale d'axe (dk).	[FP]	[VX]
1 a pour image **21** dans la symétrie axiale d'axe (dk).	[Zg]	[Vh]
8 a pour image **12** dans la symétrie axiale d'axe (an).	[CO]	[DF]
14 a pour image **18** dans la symétrie axiale d'axe (op).	[eg]	[Ya]
5 a pour image **13** dans la symétrie axiale d'axe (bm).	[Xj]	[JL]
19 a pour image **2** dans la symétrie axiale d'axe (dk).	[Ue]	[Ua]
3 a pour image **16** dans la symétrie axiale d'axe (gh).	[Wi]	[hj]
6 a pour image **11** dans la symétrie axiale d'axe (dk).	[CP]	[CM]
9 a pour image **12** dans la symétrie axiale d'axe (fj).	[Se]	[MO]
5 a pour image **18** dans la symétrie axiale d'axe (gh).	[Pg]	[PR]
2 a pour image **12** dans la symétrie axiale d'axe (dk).	[bd]	[SU]

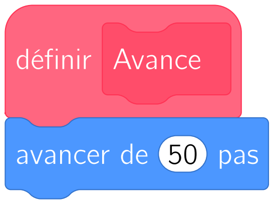
A	B	C	D	E	F
G	H	I	J	K	L
M	N	O	P	Q	R
S	T	U	V	W	X
Y	Z	a	b	c	d
e	f	g	h	i	j

Tu vas utiliser le logiciel Scratch pour dessiner l'une des solutions, celle où le modèle est recouvert par les pièces A, B et C.

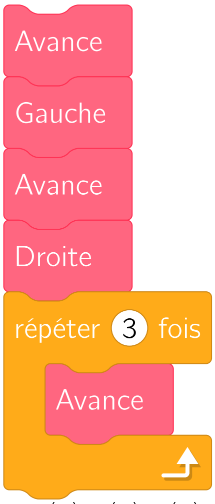
Pour cela, tu vas pouvoir t'aider des blocs de définition `Gauche`, `Droite` et `Avance` ci-dessous, le réseau sur lequel sont placés les points étant un réseau quadrillé triangulaire : les triangles de ce réseau sont des triangles équilatéraux (chaque angle au sommet d'un triangle mesure 60°) dont la mesure du côté vaut 50 pas.



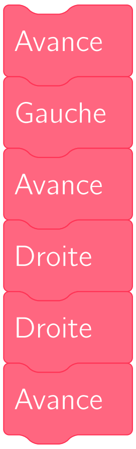




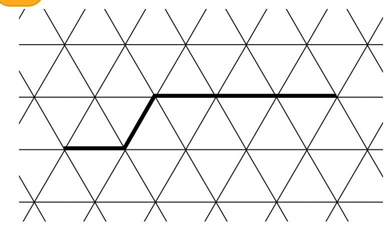
Ainsi, les scripts

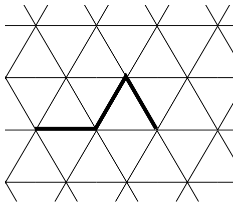


et



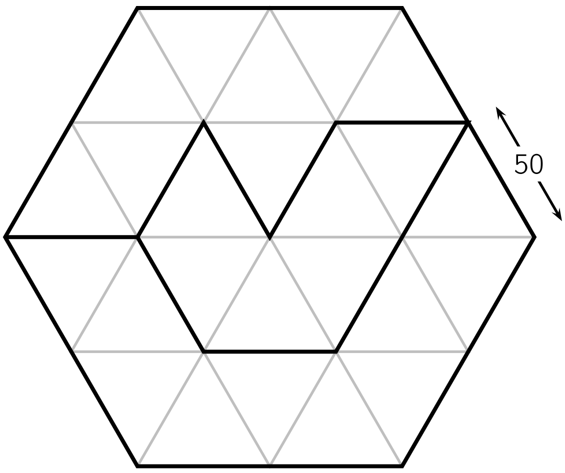
te permettent d'obtenir les tracés ci-dessous :





À toi de jouer ! Dessine la solution du carré géomagique ci-dessous.

- Le stylo est en position d'écriture.
- Tu partiras du sommet de l'hexagone « le plus à gauche », de coordonnées $(-100\,,0)$, vers l'un des deux sommets consécutifs de cet hexagone.
- Le dessin peut se faire sans lever le crayon.
- Le quadrillage (en gris) est là pour t'aider à choisir les blocs à prendre.

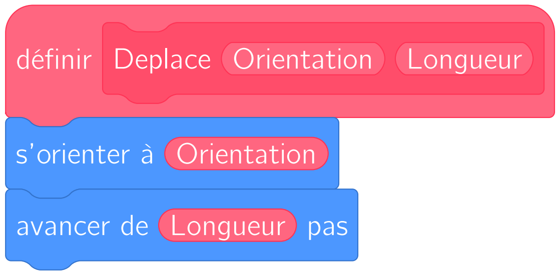


C10 : construction avec le logiciel Scratch (2)

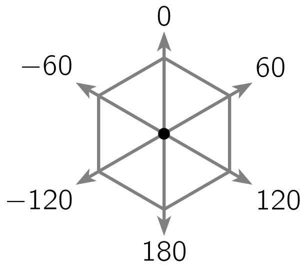
IREM de Lyon

Tu vas utiliser le logiciel Scratch pour dessiner l'une des solutions, celle où le modèle est recouvert par les pièces A, B et C.

Pour cela, tu vas pouvoir t'aider du bloc de définition `Deplace` ci-contre, qui contient deux paramètres : le premier est l'`Orientation` dans laquelle tu vas tracer un segment et la seconde est la `Longueur` du déplacement.

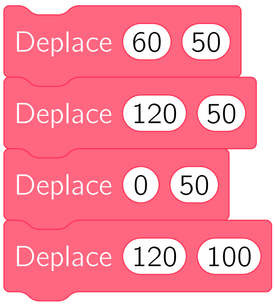


Tu vas utiliser un réseau quadrillé triangulaire : les triangles de ce réseau sont des triangles équilatéraux (chaque angle au sommet d'un triangle mesure 60°).
La variable Orientation va donc prendre pour valeur 0 (pour aller vers le haut), 60, 120, 180, −120 ou −60, selon la disposition ci-contre.

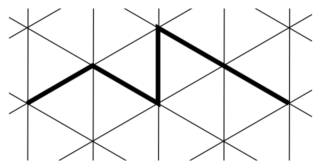


La longueur du côté d'un triangle mesure 50. La variable Longueur va donc prendre pour valeur 50 ou 100.

Ainsi, le script

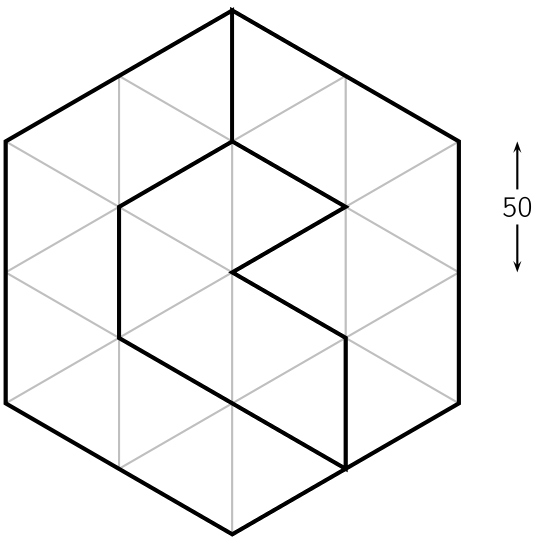


te permet d'obtenir le tracé ci-dessous :



À toi de jouer ! Dessine la solution du carré géomagique ci-dessous.

- Le stylo est en position d'écriture.
- Tu partiras du sommet de l'hexagone qui a la plus grande ordonnée, de coordonnées (0 ; 100), vers l'un des deux sommets consécutifs de cet hexagone.
- Le dessin peut se faire sans lever le crayon.
- Le quadrillage (en gris) est là pour t'aider pour trouver l'orientation à prendre.

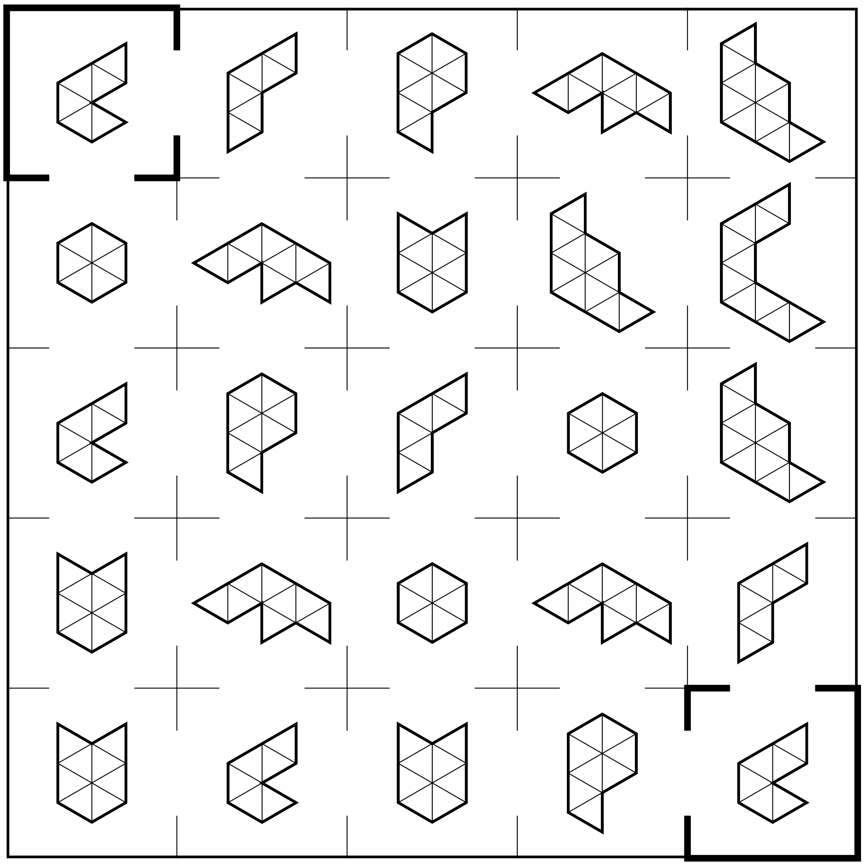


C10 : aire, périmètre et labyrinthe (1)

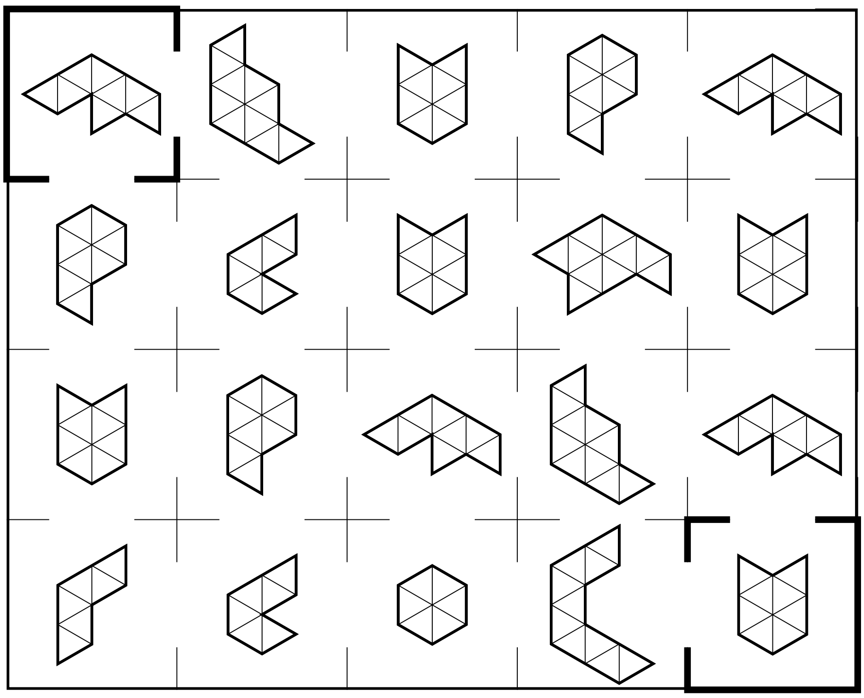
IREM de Lyon

Rejoins la case de départ « en haut à gauche » à la case d'arrivée « en bas à droite ».

Tu ne peux aller dans une case que si elle contient une pièce de même périmètre.



Tu ne peux aller dans une case que si elle contient une pièce de même aire.

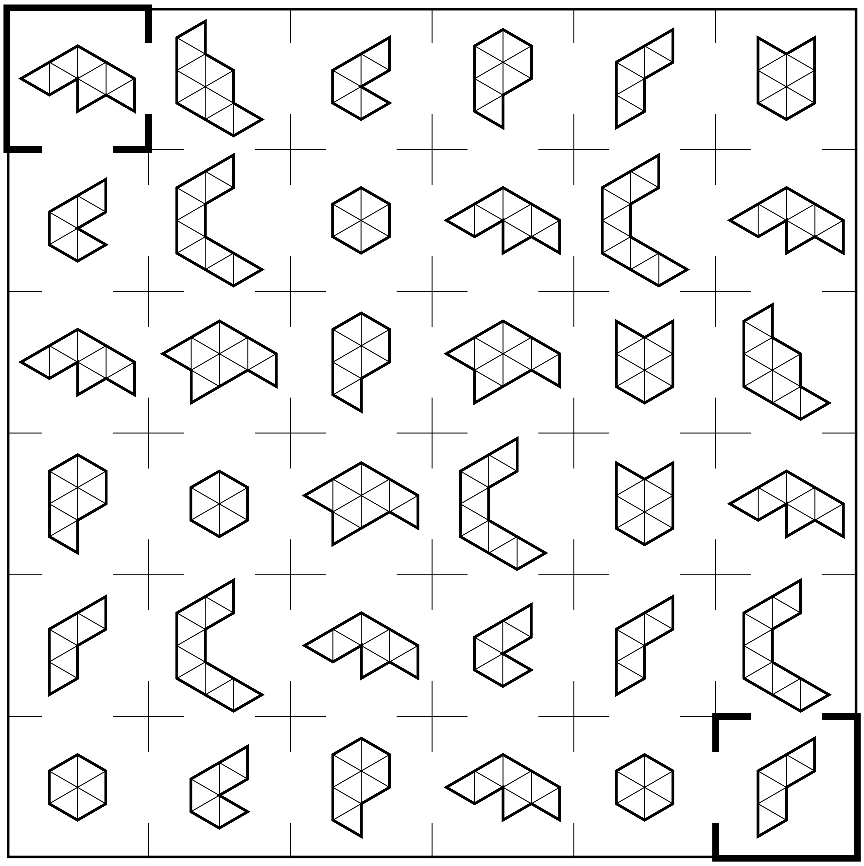


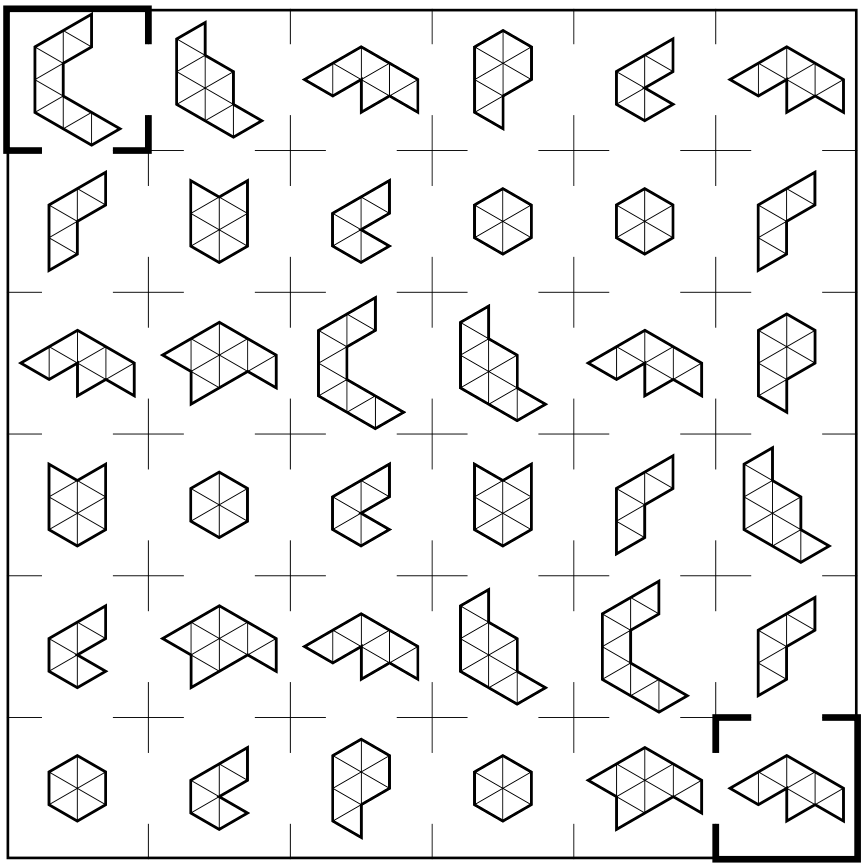
C10 : aire, périmètre et labyrinthe (2)

IREM de Lyon

Rejoins la case de départ « en haut à gauche » à la case d'arrivée « en bas à droite ».

Tu ne peux aller dans une case que si elle contient une pièce de même aire ou de même même périmètre.



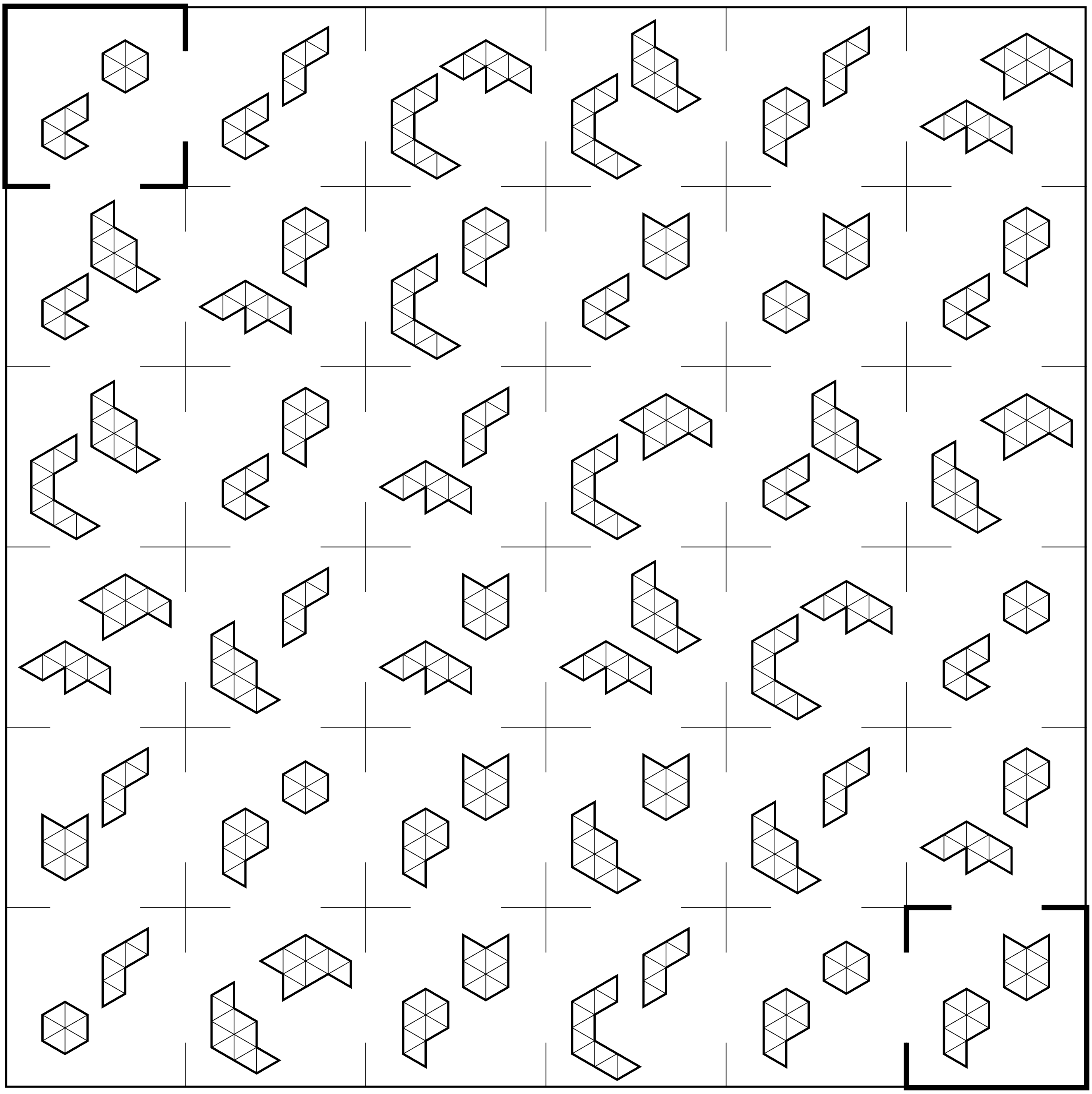


C10 : aire, périmètre et labyrinthe (3)

IREM de Lyon

Rejoins la case de départ « en haut à gauche » à la case d'arrivée « en bas à droite ».

Tu ne peux traverser les cases que si elles contiennent deux pièces qui ont la même aire ou le même périmètre.

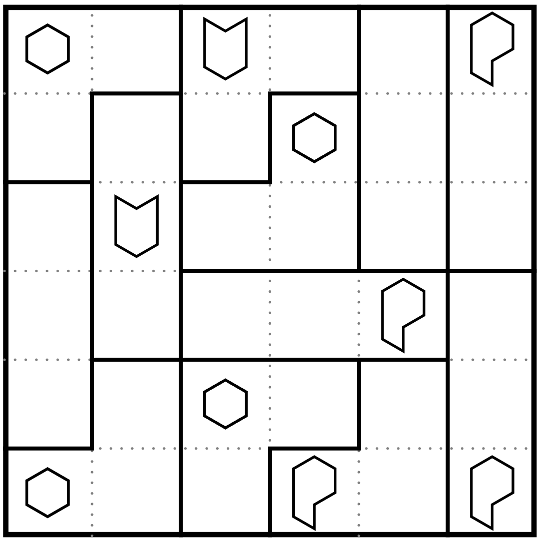


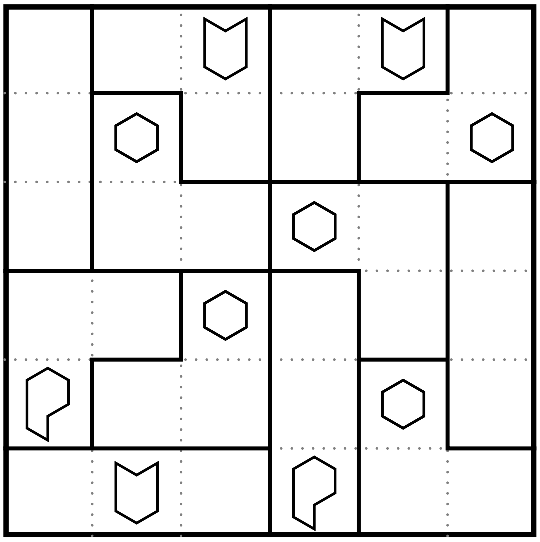
C10 : tous égaux ou tous différents

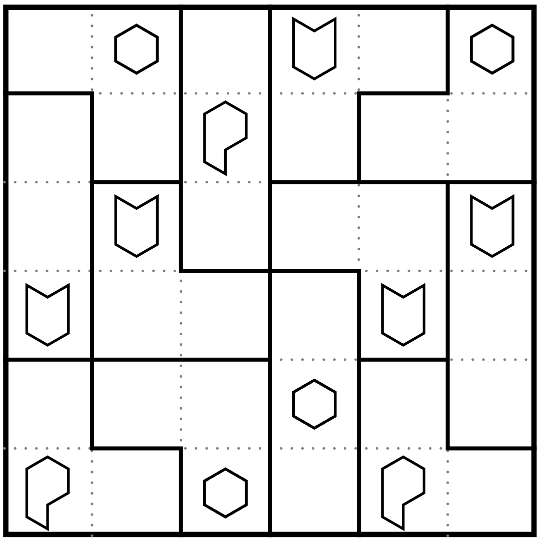
IREM de Lyon

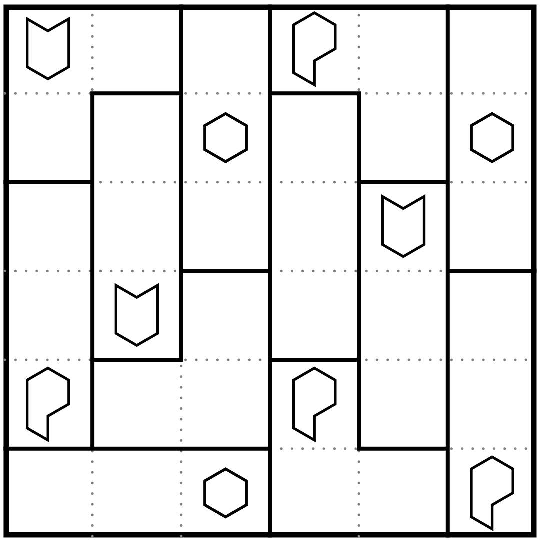
Remplis chaque case d'une grille par l'une des trois pièces , et selon les conditions suivantes :

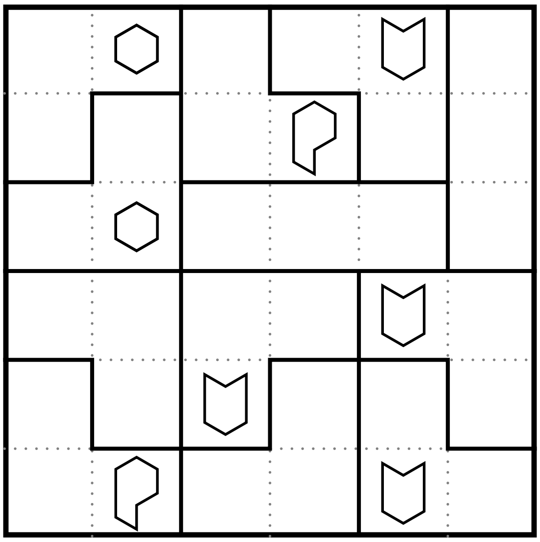
- dans chaque zone, les trois pièces sont soit identiques soit toutes différentes ;
- deux pièces situées de part et d'autre d'un côté séparant deux zones sont différentes.

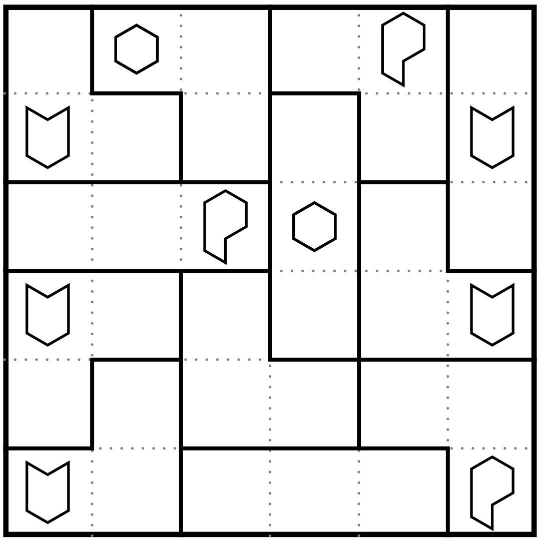

1.


2.


3.

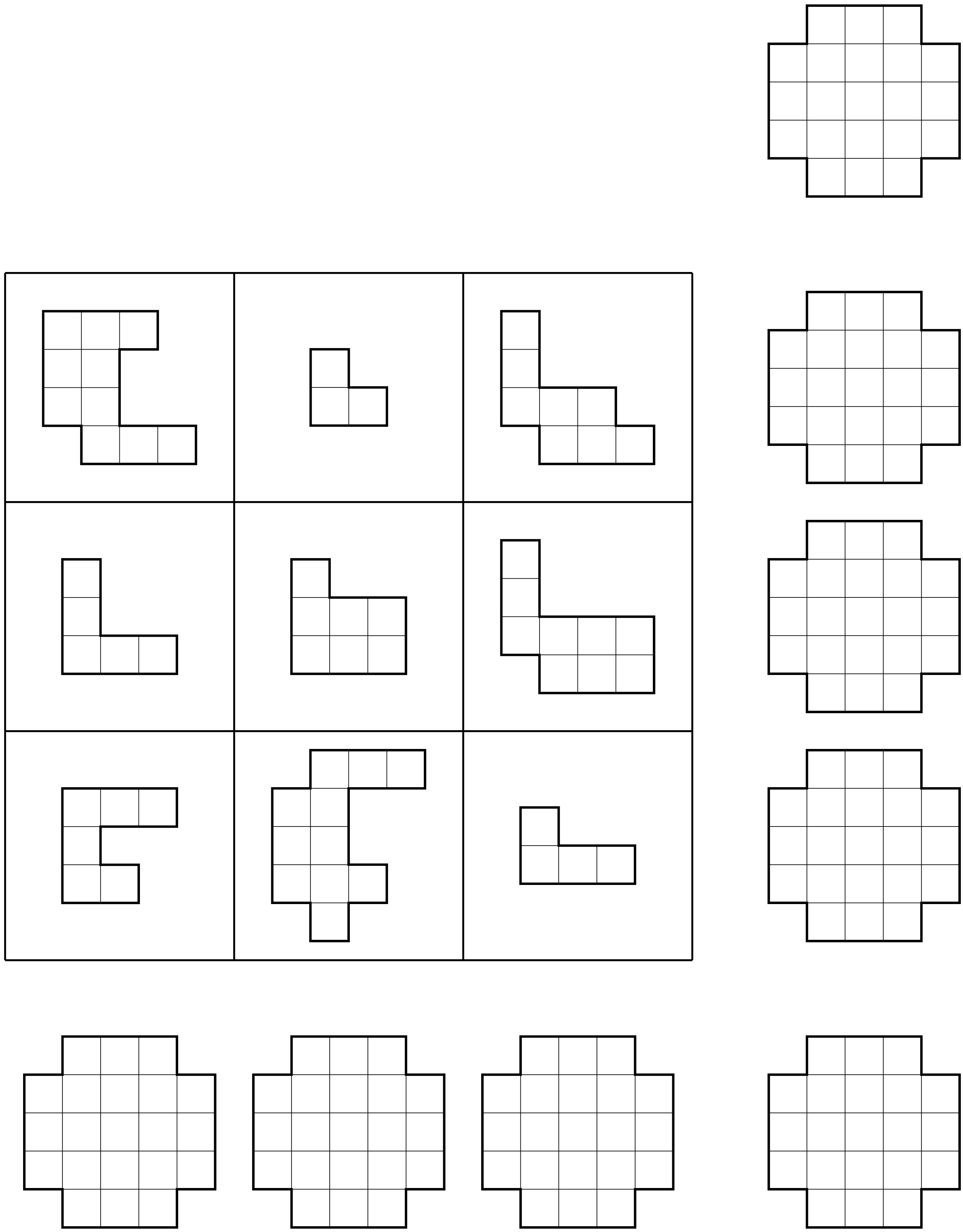

4.

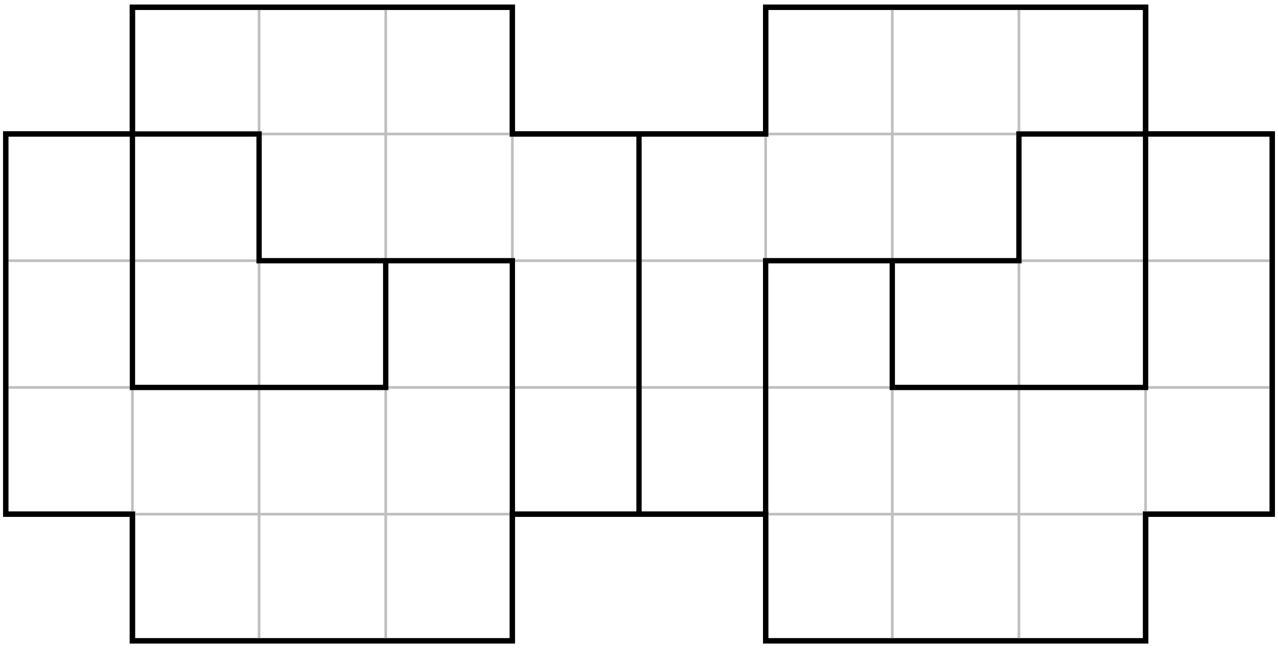

5.

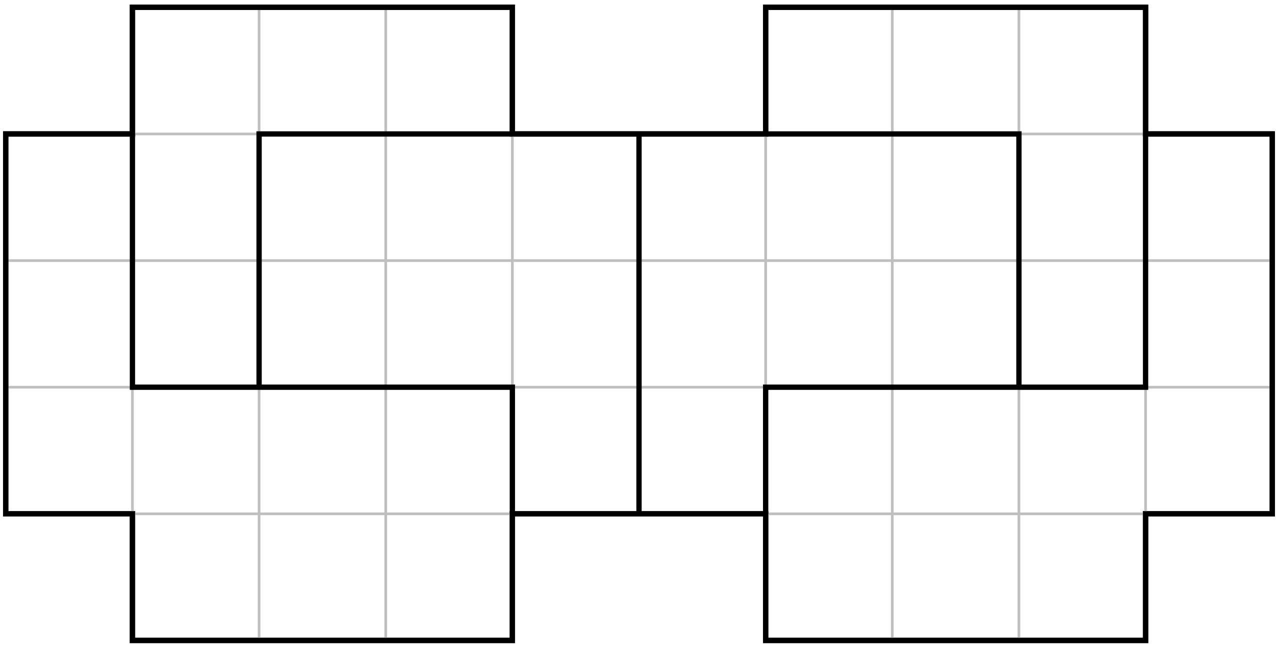

6.

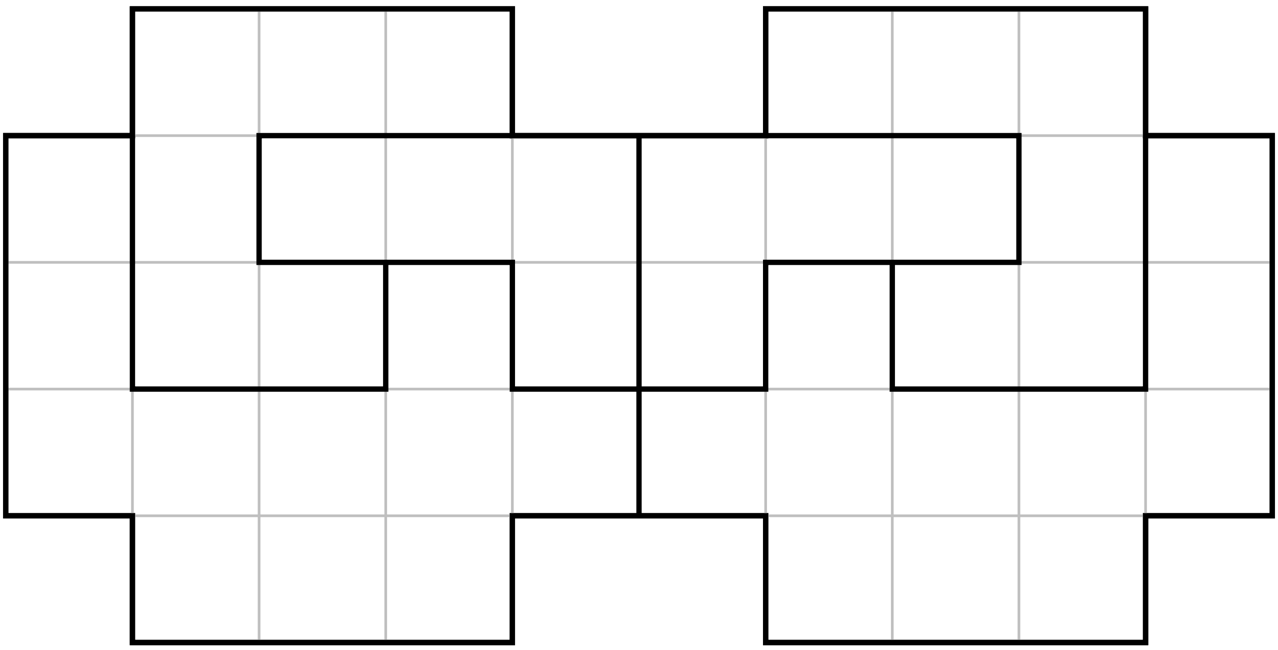
Idée originale : `https://www.janko.at/Raetsel/Tripletts/index.htm`

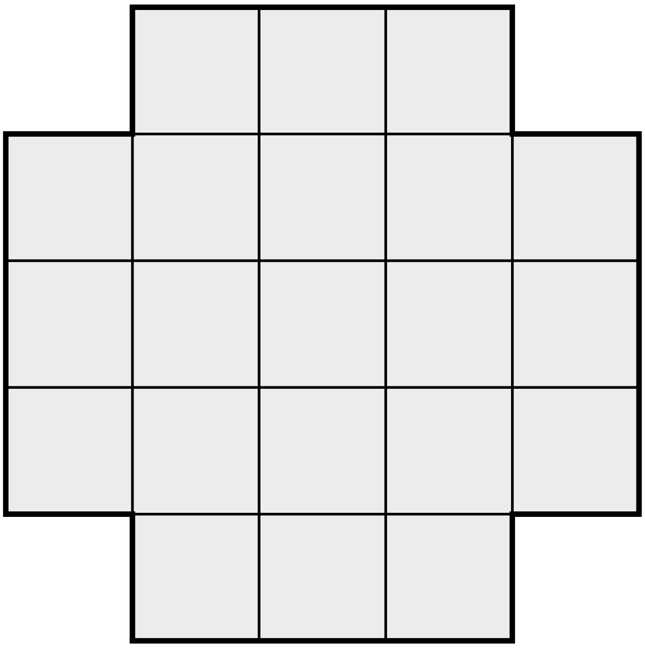
Carré géomagique C18

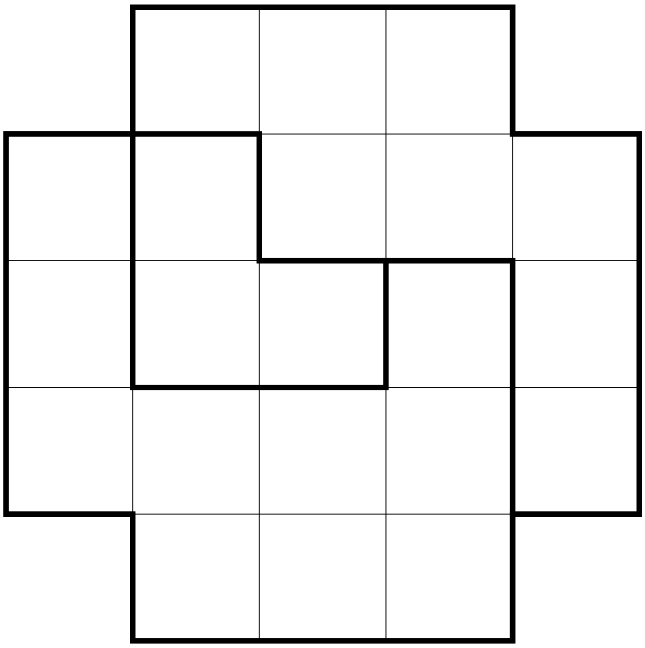


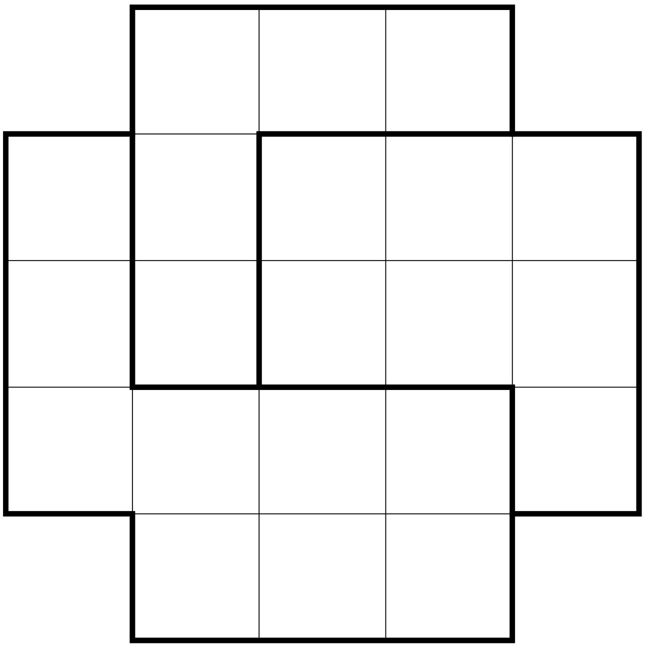


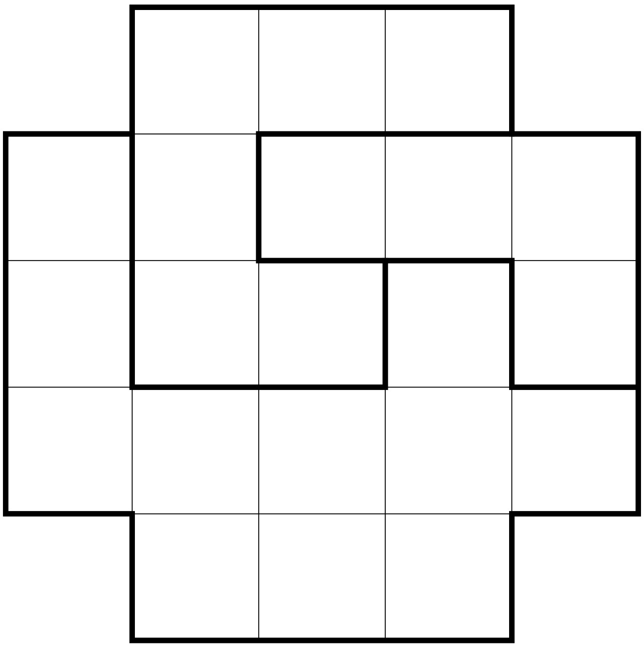


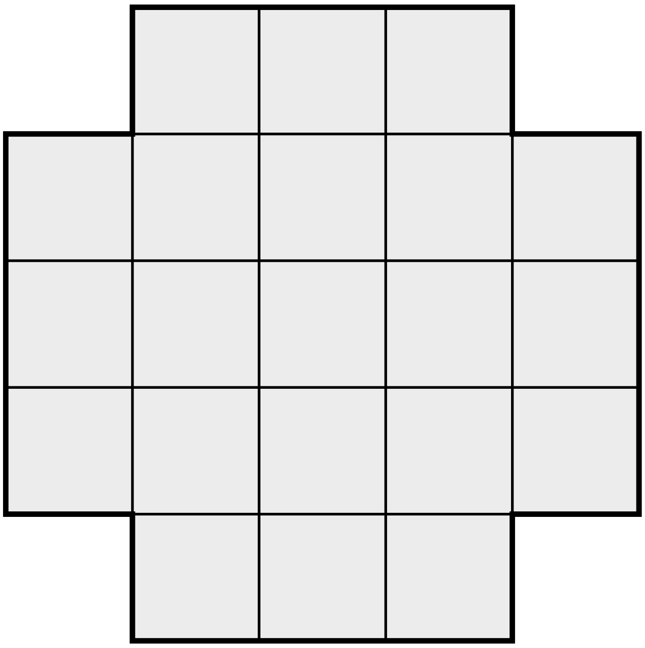


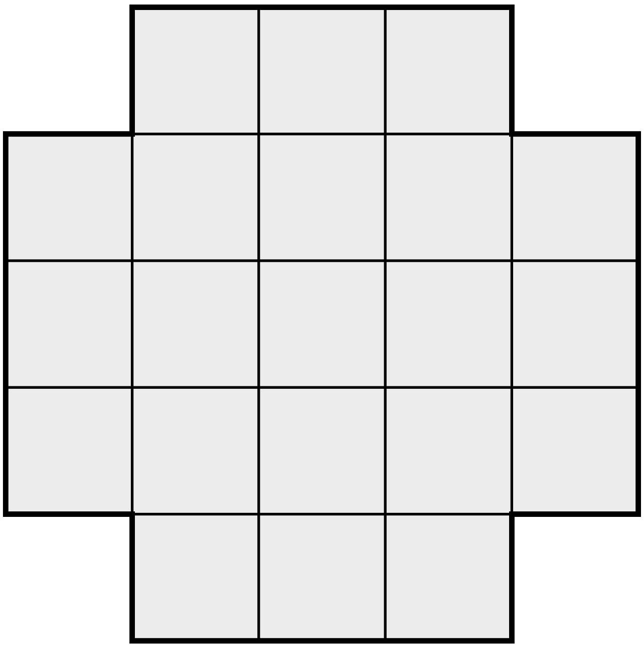


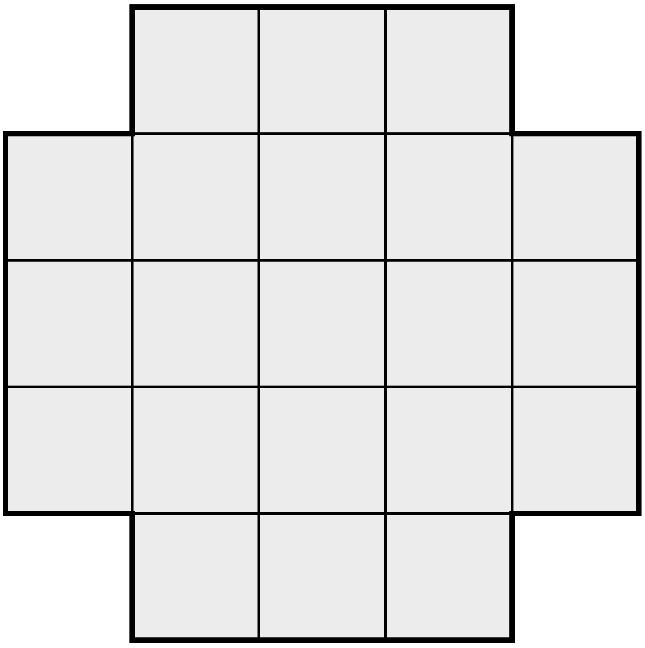


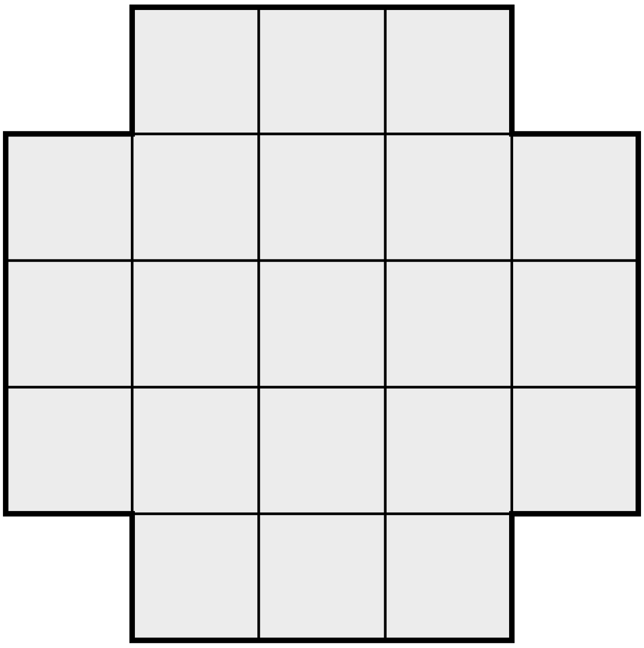


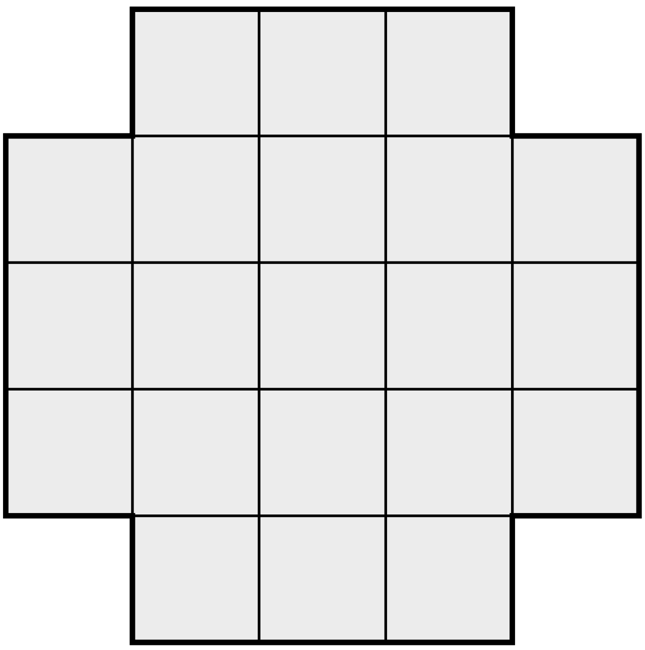


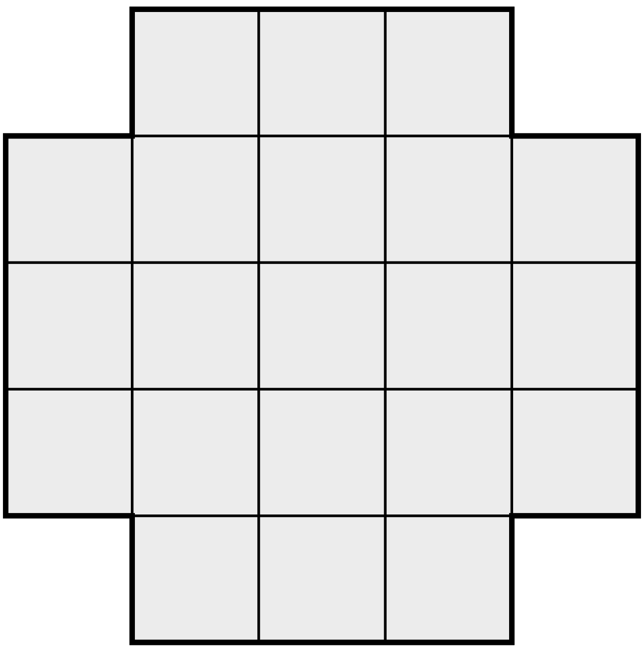


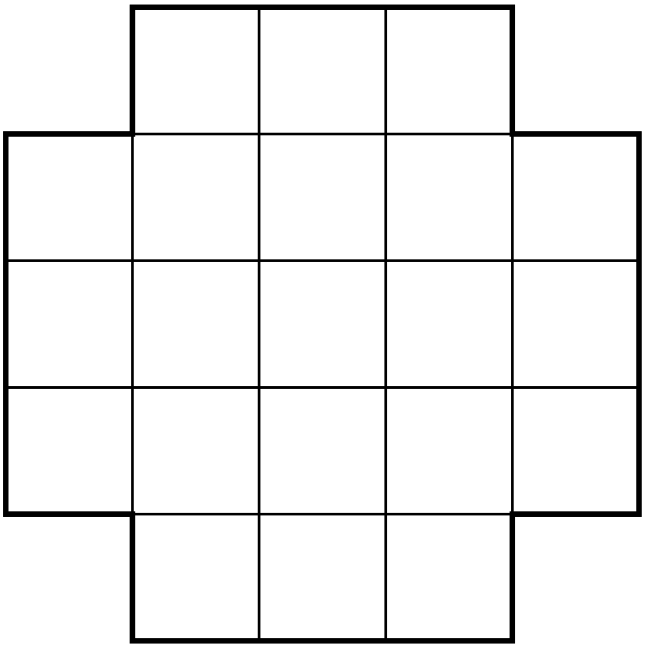
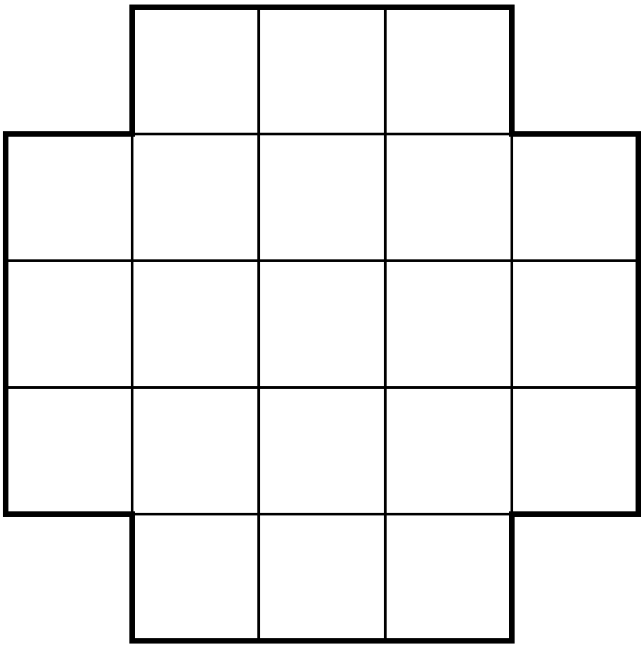
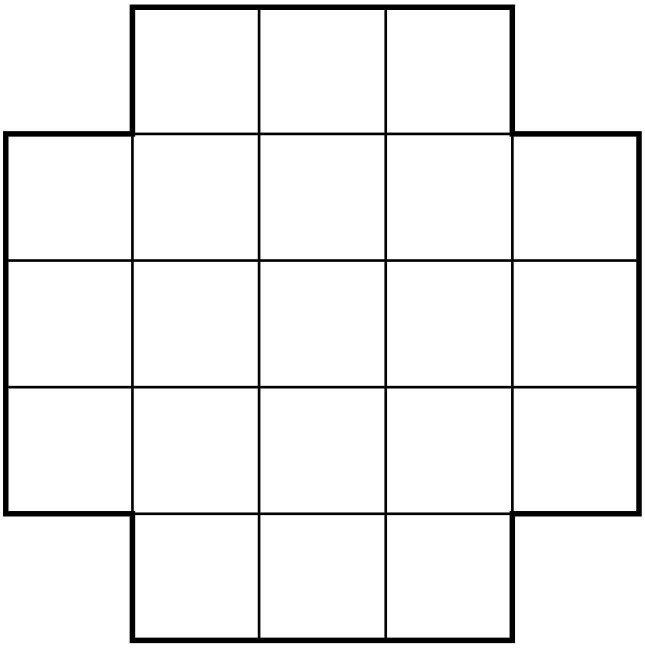
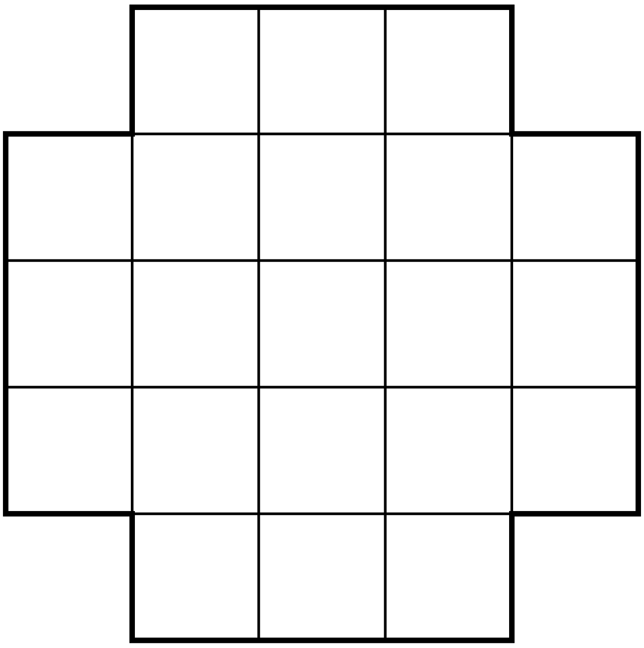
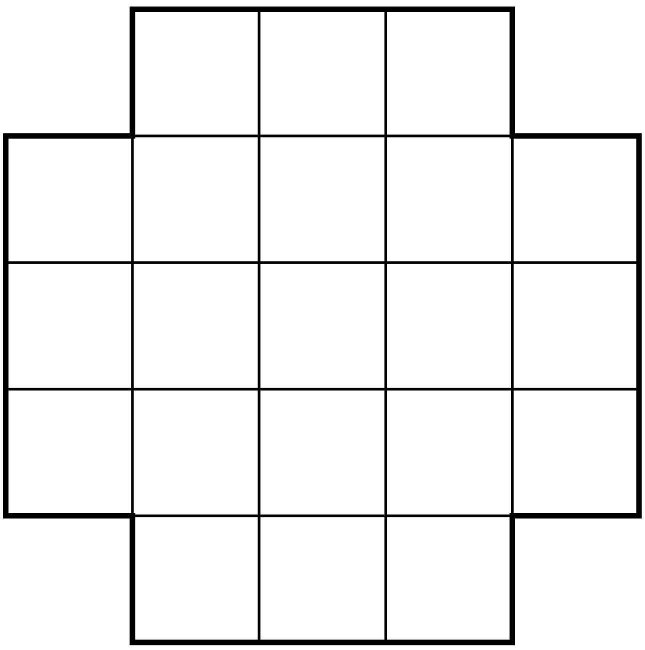
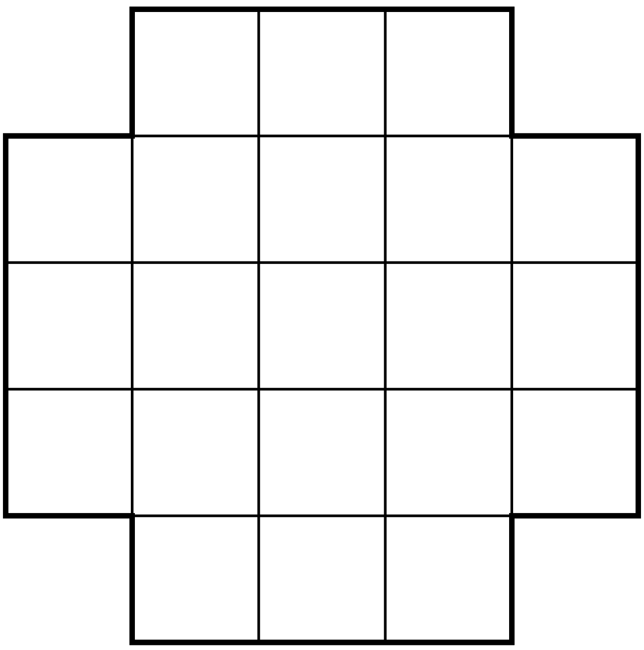








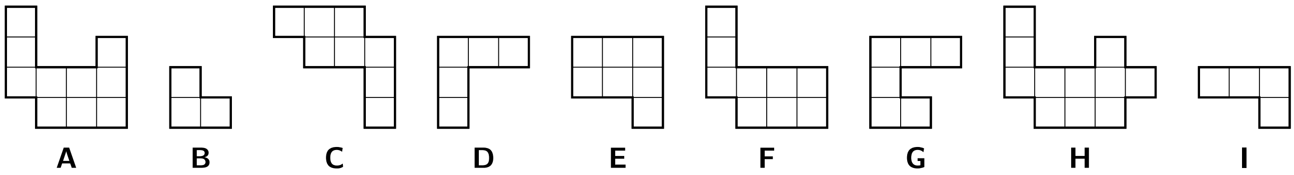


C18 : symétries axiale et centrale

IREM de Lyon

Tu disposes des neuf pièces réversibles suivantes :



Réalise au moins une figure ayant **un** axe de symétrie avec les pièces suivantes :

1. **A** et **B**
2. **A**, **B** et **D**
3. **A**, **B** et **I**
4. **A** et **E**
5. **B**, **C**, **G** et **I**
6. **B** et **D**
7. **B**, **D**, **E** et **I**
8. **B**, **D** et **F**
9. **B**, **D** et **G**
10. **B**, **D** et **I**
11. **B** et **E**
12. **B**, **E** et **C**
13. **B**, **E** et **G**
14. **B**, **E**, **G** et **I**
15. **B**, **E** et **I**
16. **B** et **F**
17. **B**, **F** et **G**
18. **B**, **F**, **G** et **I**
19. **B**, **H** et **I**
20. **C** et **E**
21. **C**, **H** et **I**
22. **D**, **F** et **I**
23. **D** et **G**
24. **D** et **I**
25. **E** et **F**
26. **E** et **I**

Réalise au moins une figure ayant **deux** axes de symétrie avec les pièces suivantes :

1. **B**, **D** et **E**
2. **B**, **D**, **E** et **G**
3. **B**, **D**, **E**, **G** et **I**
4. **B**, **D** et **G**
5. **B**, **D** et **I**
6. **B**, **E** et **I**
7. **B**, **G** et **I**
8. **D** et **E**
9. **D** **E**, **G** et **I**
10. **G** et **I**

Réalise au moins une figure ayant **quatre** axes de symétrie avec les pièces suivantes :

1. **B** et **D**
2. **B** et **G**

Réalise au moins une figure ayant un centre de symétrie avec les pièces suivantes :

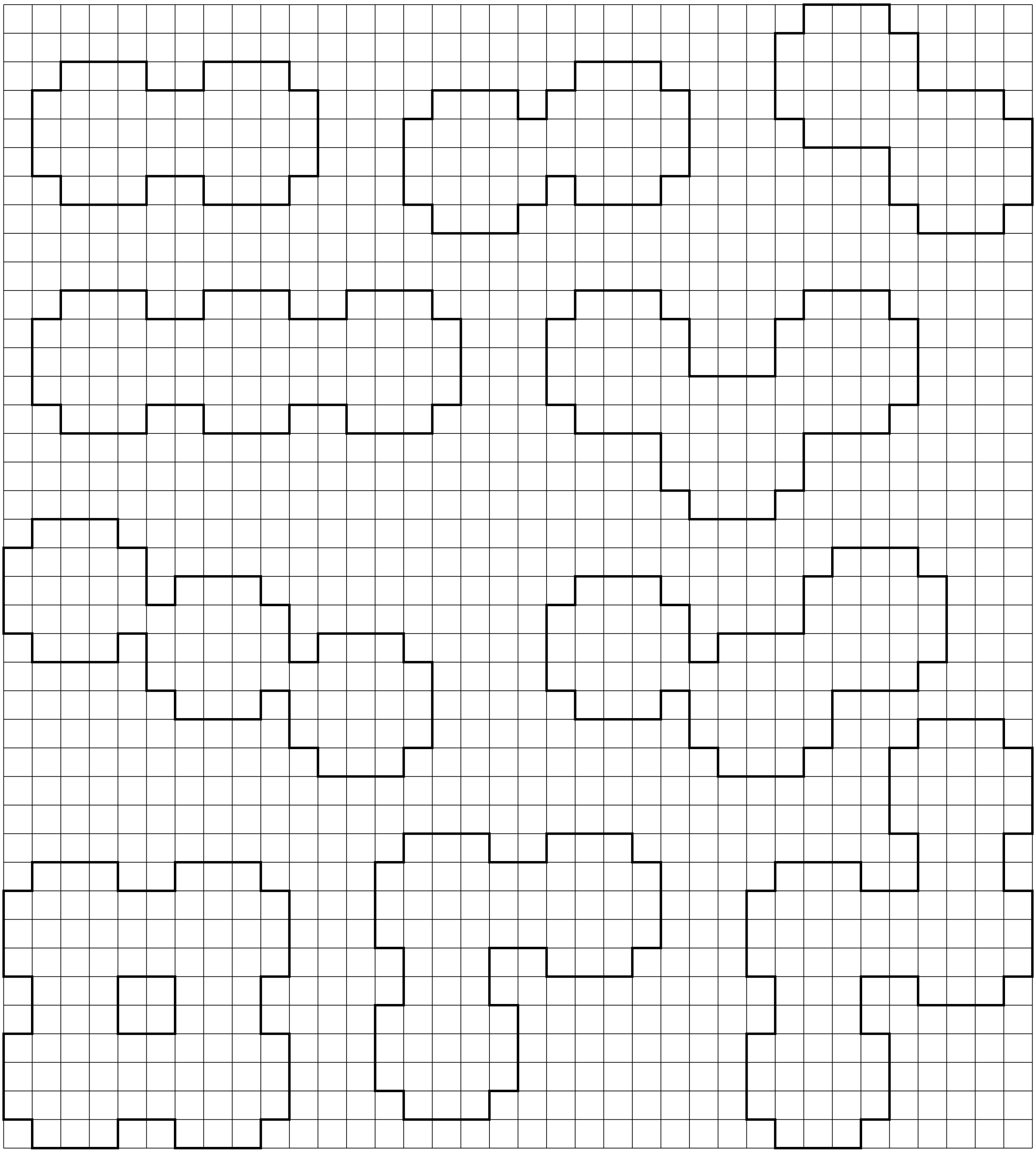
1. **B** et **D**
2. **B**, **D** et **E**
3. **B**, **D**, **E** et **G**
4. **B**, **D**, **E**, **G** et **I**
5. **B**, **D** et **G**
6. **B**, **D** et **I**
7. **B**, **E** et **I**
8. **B** et **G**
9. **B**, **G** et **I**
10. **B** et **I**
11. **D** et **E**
12. **B**, **D** et **G**
13. **D**, **F** et **I**
14. **D** et **I**
15. **E** et **I**

- Les défis ne sont pas rangés par ordre croissant de difficulté mais par ordre alphabétique.
- Les figures obtenues peuvent avoir des « trous ».
- Deux pièces qui se touchent ont un nombre entier de segments unité en commun (et ne se touchent pas par un sommet seulement).

C18 : symétrie axiale et modèles

IREM de Lyon

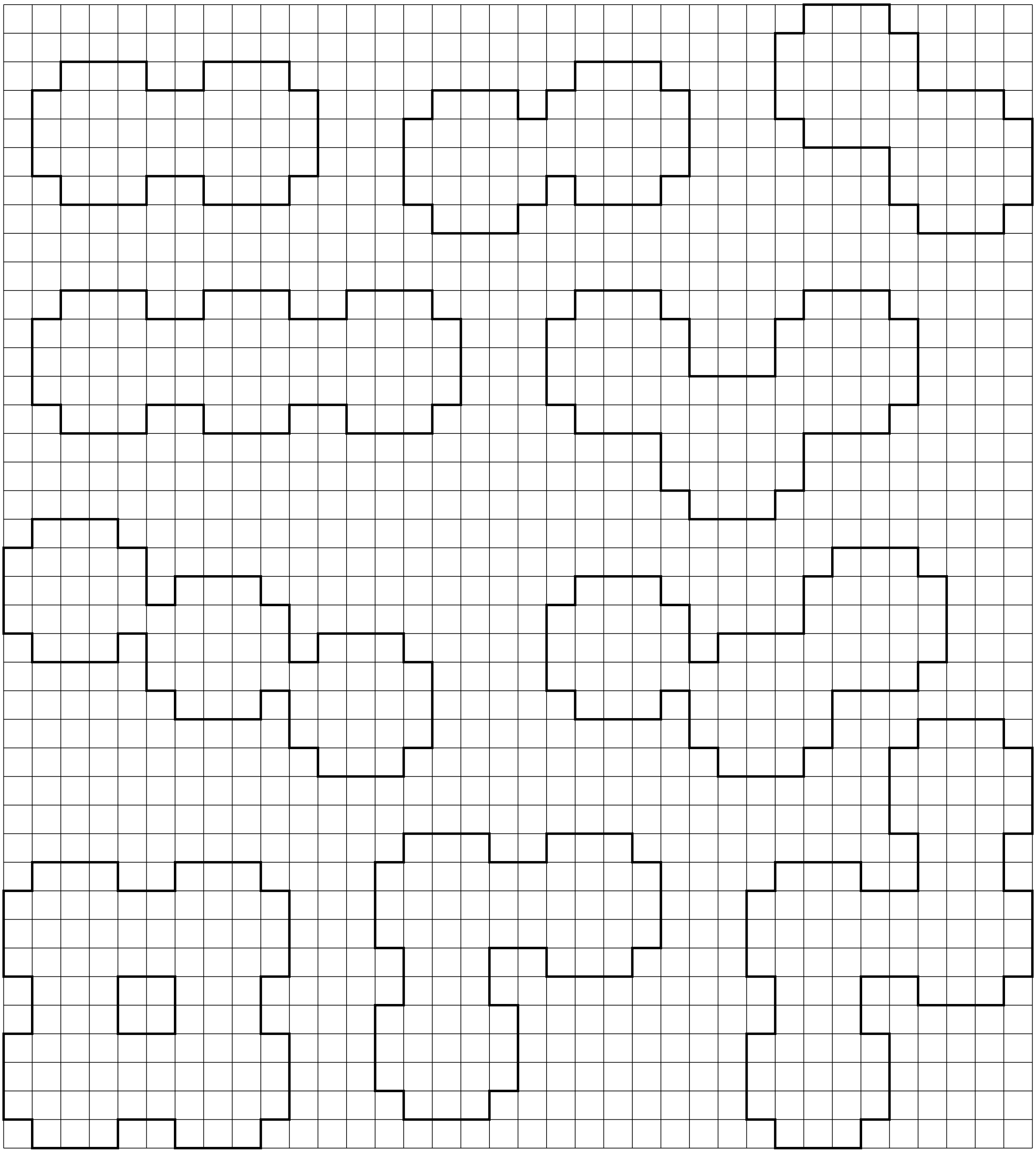
En assemblant plusieurs modèles, on a obtenu diverses figures. Dessine leurs axes de symétrie quand ils existent.



C18 : symétrie centrale et modèles

IREM de Lyon

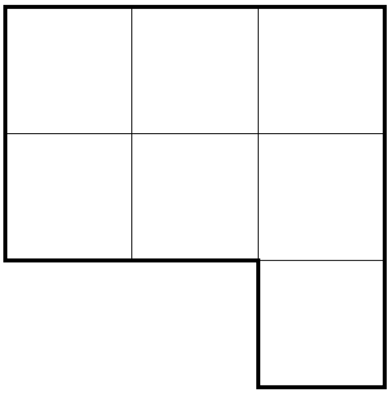
En assemblant plusieurs modèles, on a obtenu diverses figures. Dessine leur centre de symétrie quand il existe.

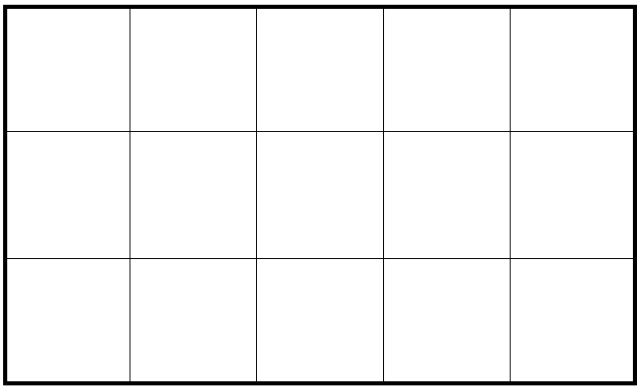


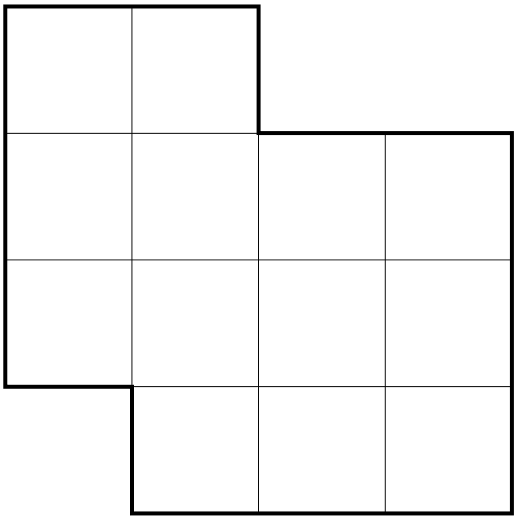
C18 : assemblages

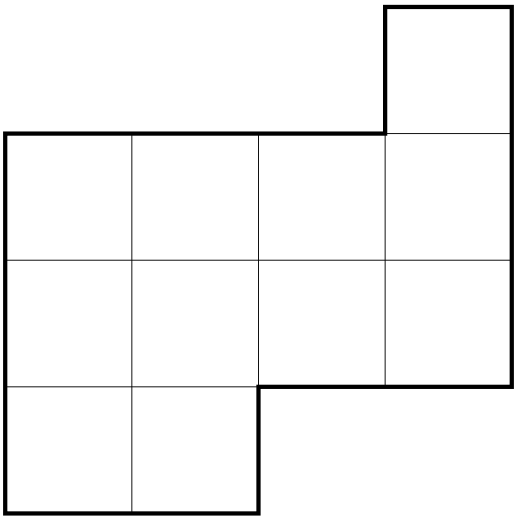
IREM de Lyon

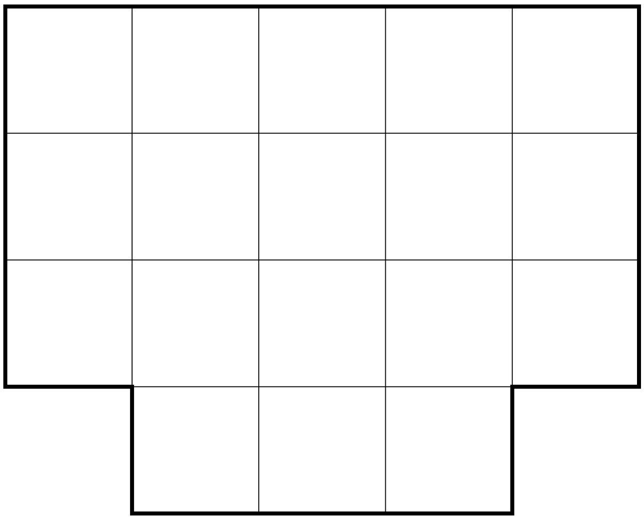
Construis les figures données en utilisant des combinaisons différentes de pièces.

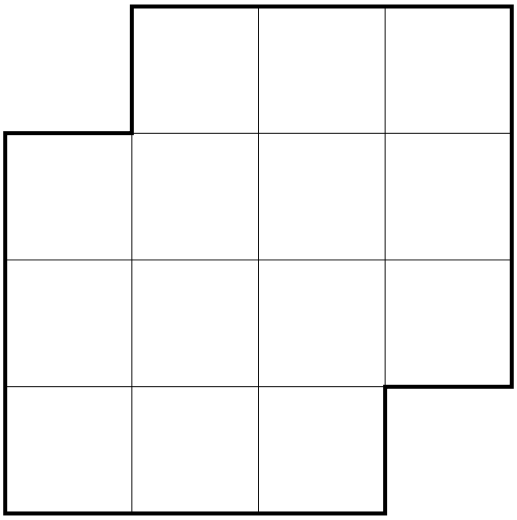


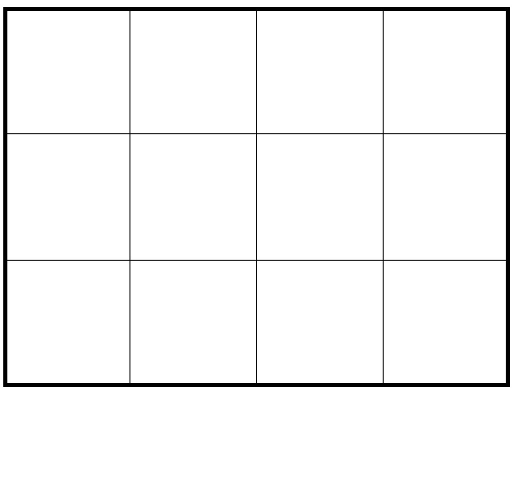


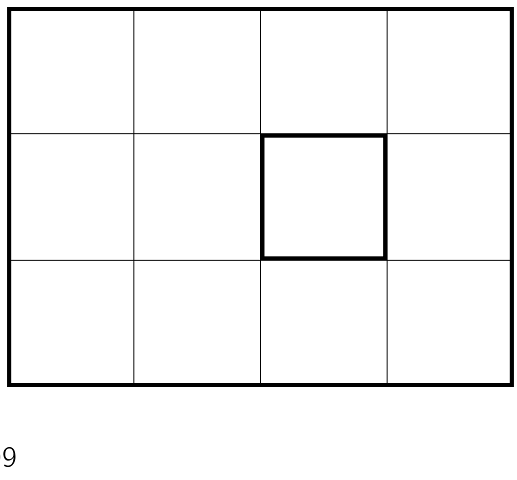








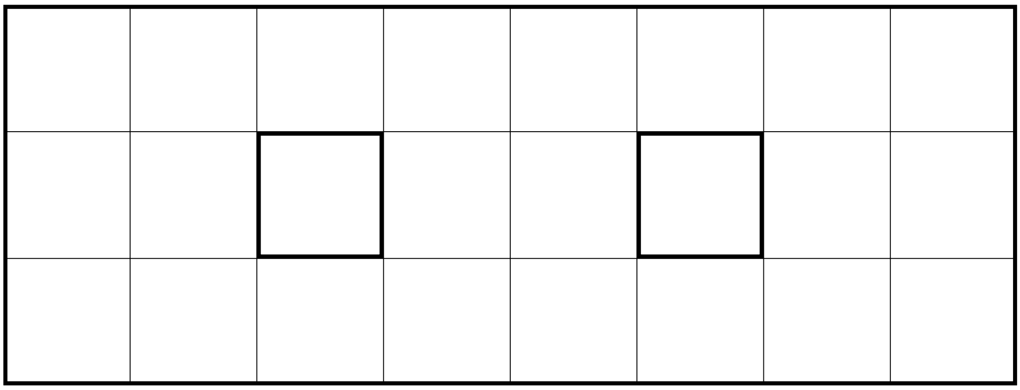


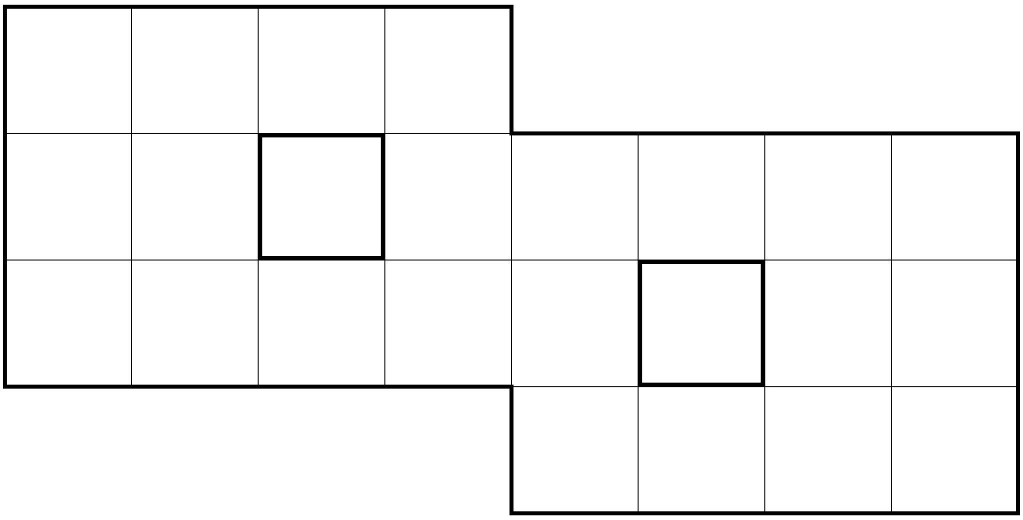


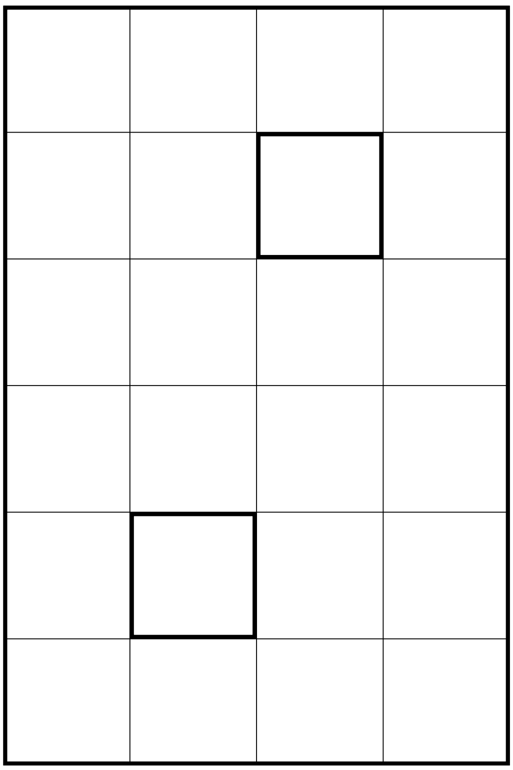
C18 : assemblage « GIDE »

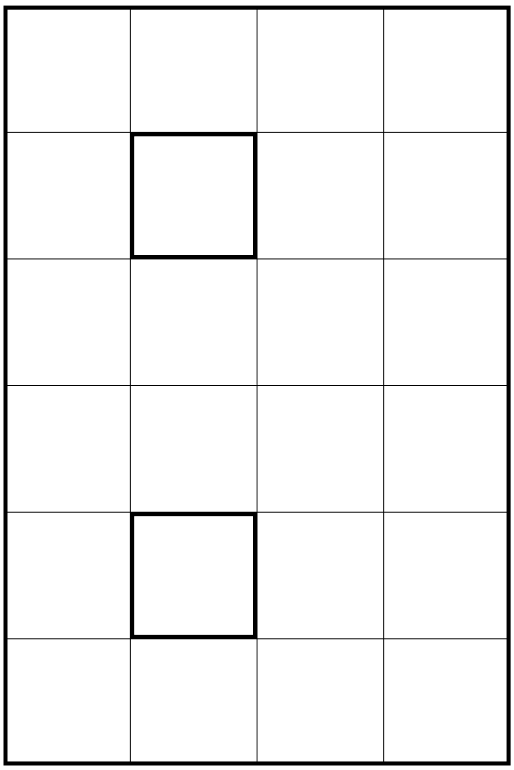
IREM de Lyon

En utilisant les quatre pièces **D**, **E**, **G** et **I**, construis les figures suivantes.





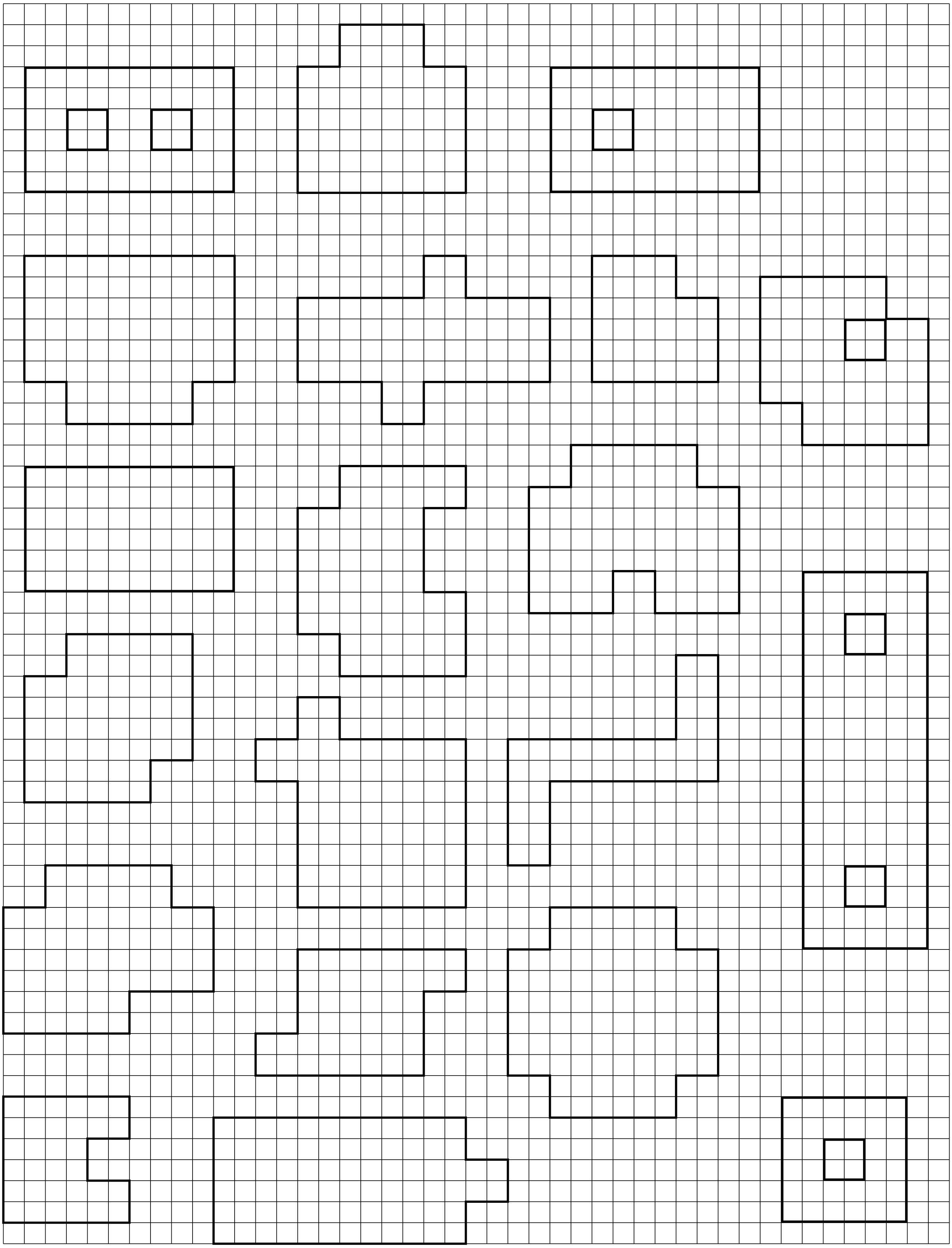




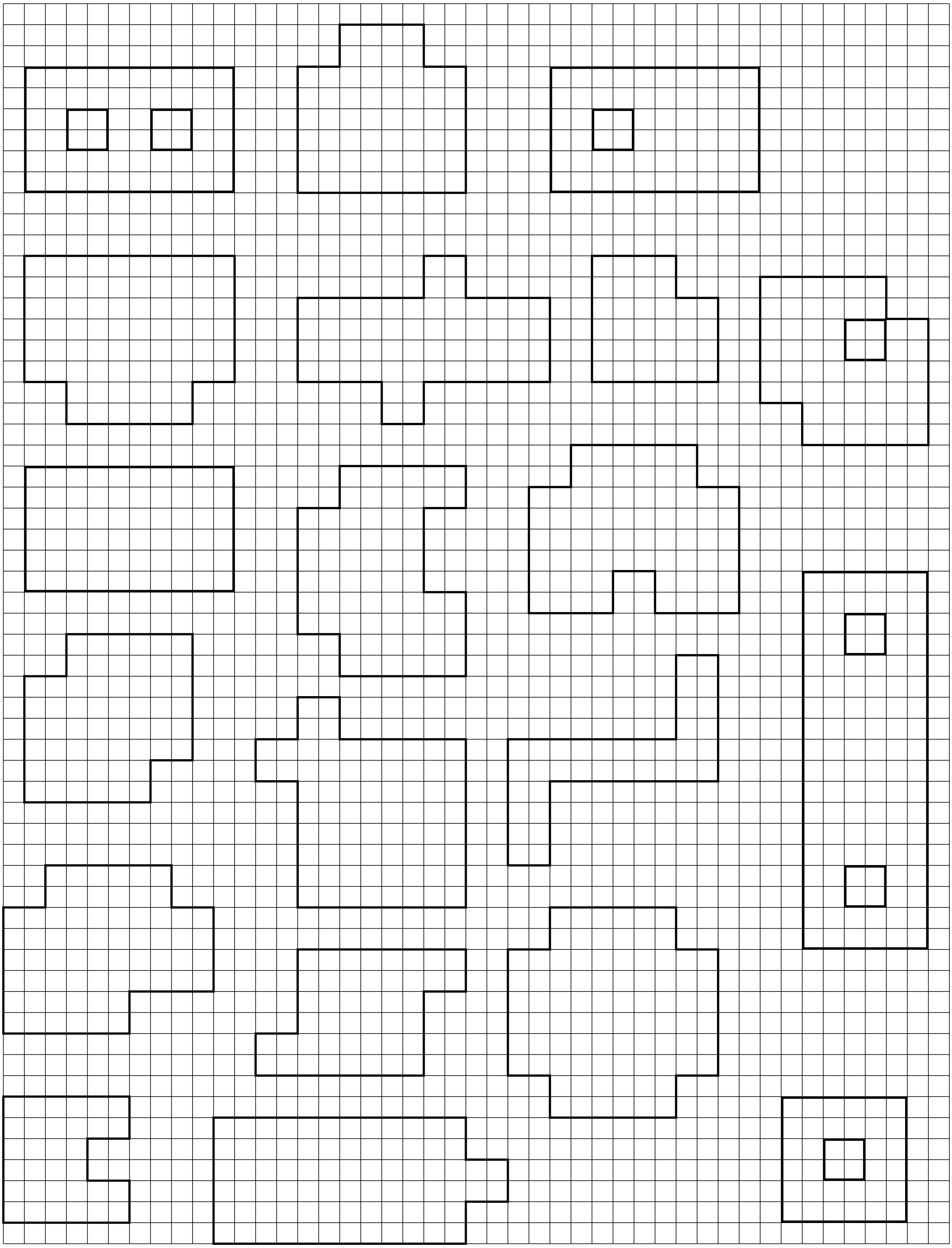
C18 : symétrie axiale

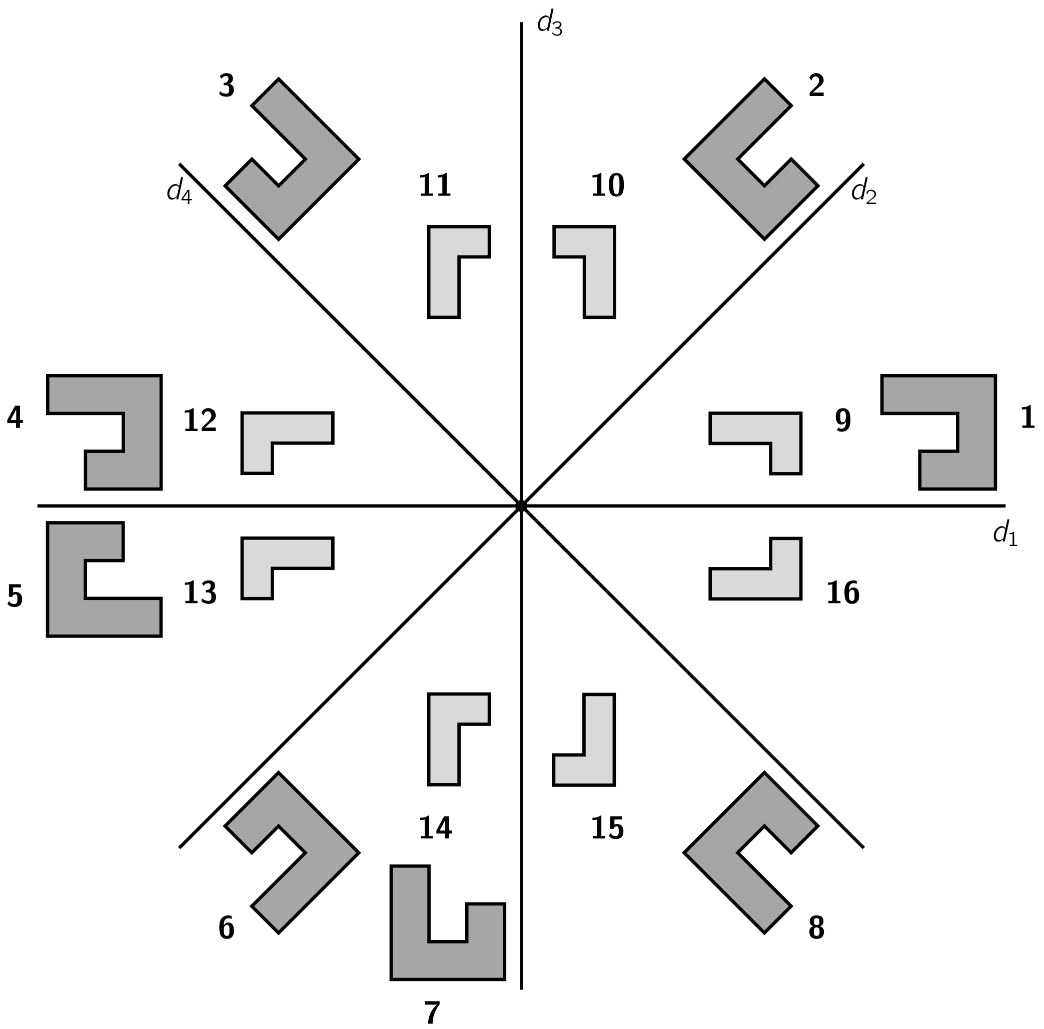
IREM de Lyon

En assemblant certaines pièces, on a obtenu diverses figures. Dessine leurs axes de symétrie quand ils existent.



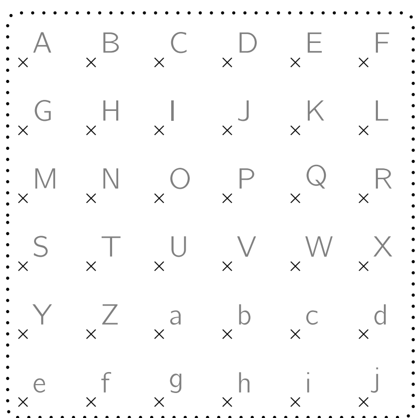
En assemblant certaines pièces, on a obtenu diverses figures. Dessine leur centre de symétrie quand il existe.



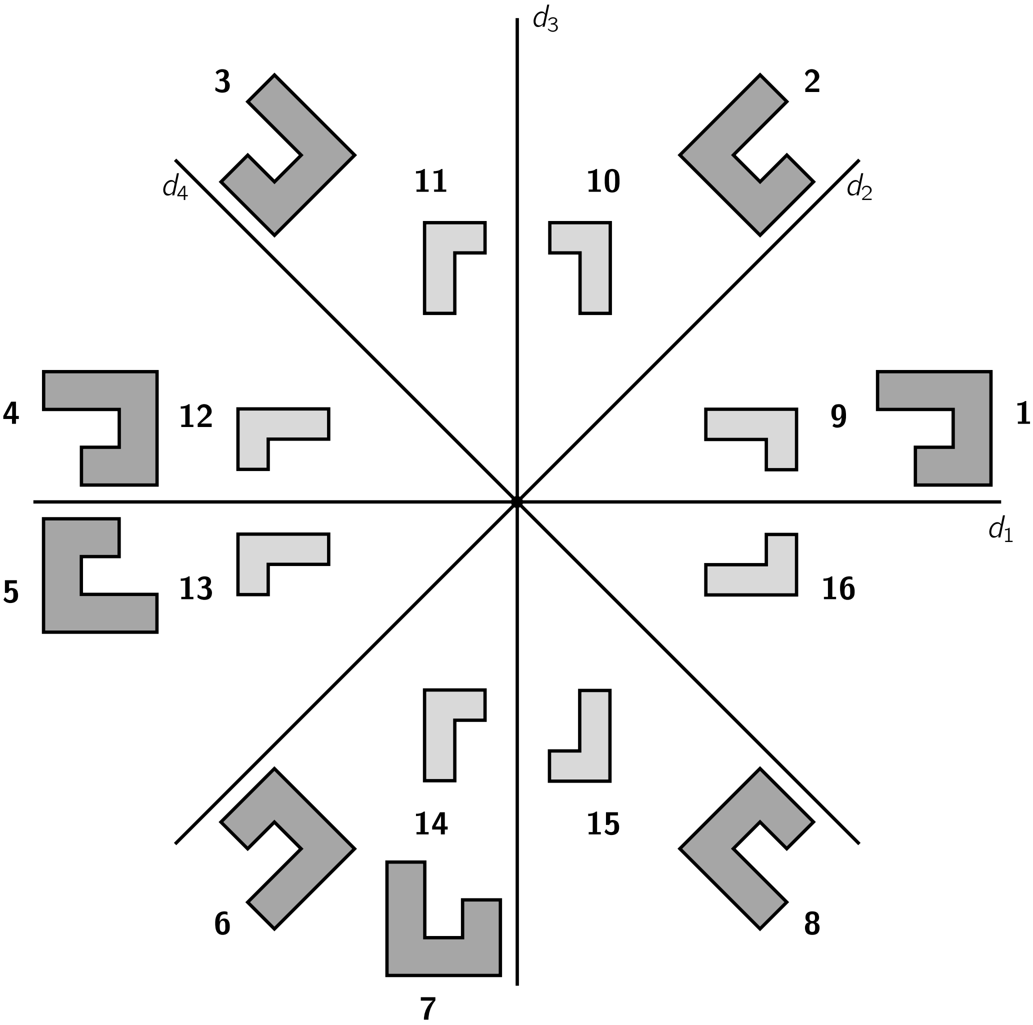


Si tu penses que la première phrase ci-dessous est vraie, trace dans le cadre de droite le segment [A M] ; si tu penses qu'elle est fausse, trace le segment [A N]. Et ainsi de suite.

	Vrai	Faux
9 est l'image de **16** dans la symétrie axiale d'axe d_1 .	[A M]	[A N]
11 est l'image de **10** dans la symétrie axiale d'axe d_3 .	[A H]	[D N]
3 est l'image de **8** dans la symétrie axiale d'axe d_4 .	[V c]	[X j]
6 est l'image de **8** dans la symétrie axiale d'axe d_3 .	[C O]	[Y Z]
12 est l'image de **15** dans la symétrie axiale d'axe d_2 .	[S U]	[G I]
14 est l'image de **15** dans la symétrie axiale d'axe d_3 .	[U a]	[T f]
12 est l'image de **11** dans la symétrie axiale d'axe d_4 .	[E R]	[F L]
13 est l'image de **12** dans la symétrie axiale d'axe d_1 .	[W g]	[V h]
6 est l'image de **3** dans la symétrie axiale d'axe d_1 .	[C H]	[D E]
4 est l'image de **5** dans la symétrie axiale d'axe d_1 .	[c g]	[b d]
10 est l'image de **12** dans la symétrie axiale d'axe d_4 .	[a g]	[J L]
1 est l'image de **7** dans la symétrie axiale d'axe d_4 .	[E P]	[P U]

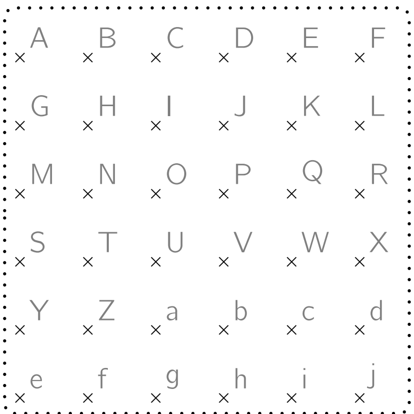


C18 : symétrie axiale et Vrai/Faux (2)



Si tu penses que la première phrase ci-dessous est vraie, trace dans le cadre de droite le segment [A M] ; si tu penses qu'elle est fausse, trace le segment [A N]. Et ainsi de suite.

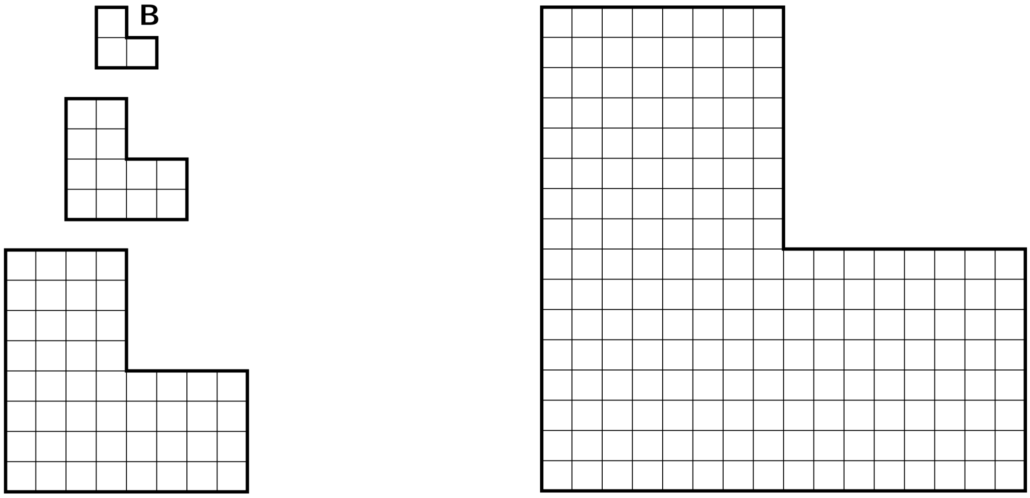
	Vrai	Faux
9 est l'image de **16** dans la symétrie axiale d'axe d_1 .	[A M]	[A N]
11 est l'image de **10** dans la symétrie axiale d'axe d_3 .	[E Q]	[Q i]
3 est l'image de **8** dans la symétrie axiale d'axe d_4 .	[a b]	[g h]
6 est l'image de **8** dans la symétrie axiale d'axe d_3 .	[R j]	[R i]
12 est l'image de **15** dans la symétrie axiale d'axe d_2 .	[C g]	[D h]
14 est l'image de **15** dans la symétrie axiale d'axe d_3 .	[N e]	[C D]
12 est l'image de **11** dans la symétrie axiale d'axe d_4 .	[E F]	[J L]
13 est l'image de **12** dans la symétrie axiale d'axe d_1 .	[O b]	[O P]
6 est l'image de **3** dans la symétrie axiale d'axe d_1 .	[B f]	[D O]
4 est l'image de **5** dans la symétrie axiale d'axe d_1 .	[e g]	[i j]
10 est l'image de **12** dans la symétrie axiale d'axe d_4 .	[Q g]	[M N]
1 est l'image de **7** dans la symétrie axiale d'axe d_4 .	[Q R]	[c h]



C18 : agrandissement et coloriage

IREM de Lyon

1. Utilise uniquement des pièces **B**, réversibles, pour recouvrir chacune des trois autres pièces, agrandissements de la pièce **B** à l'échelle 2, 4 et 8.



2. Colorie tes solutions avec les deux contraintes suivantes.
- Deux pièces **B** qui se touchent par une partie de côté (au maximum par des sommets) ne peuvent pas avoir la même couleur.
- Tu dois utiliser le moins de couleurs possible.

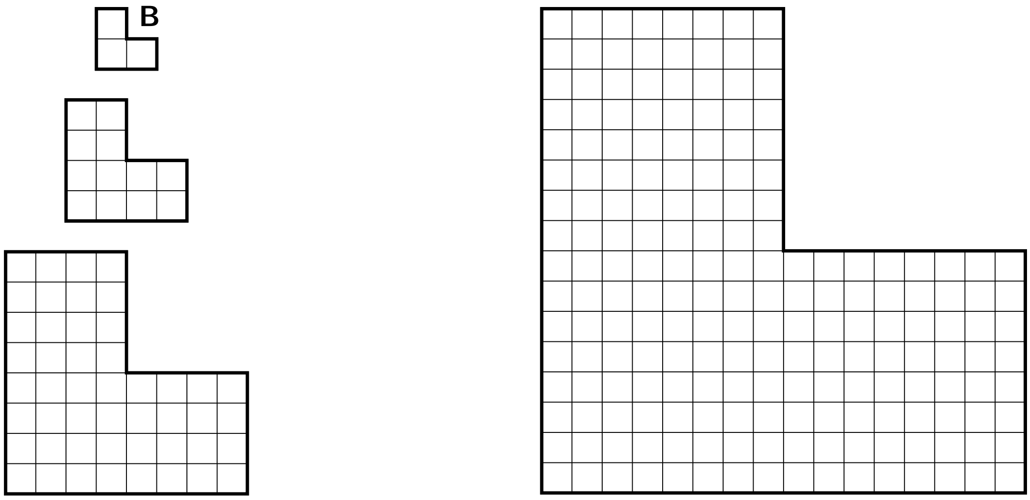
Ton coloriage ne sera pas forcément symétrique.

(D'après une idée de François Drouin)

C18 : agrandissement et coloriage

IREM de Lyon

1. Utilise uniquement des pièces **B**, réversibles, pour recouvrir chacune des trois autres pièces, agrandissements de la pièce **B** à l'échelle 2, 4 et 8.



2. Colorie tes solutions avec les deux contraintes suivantes.
- Deux pièces **B** qui se touchent par une partie de côté (au maximum par des sommets) ne peuvent pas avoir la même couleur.
- Tu dois utiliser le moins de couleurs possible.

Ton coloriage ne sera pas forcément symétrique.

(D'après une idée de François Drouin)

C18 : écriture des nombres et carré alphagéomagique

IREM de Lyon

Autour du tableau carré ci-dessous, on a indiqué la somme des trois nombres de chaque ligne, de chaque colonne et de chaque diagonale : $15 + 206 + 115$, $212 + 112 + 12$, etc.
Les huit sommes sont toutes égales : on dit que le tableau est un *carré magique*.

			336
15	206	115	336
212	112	12	336
109	18	209	336
336	336	336	336

15 ....

206 ....

115 ....

212 ....

112 ....

12 ....

109 ....

18 ....

209 ....

1. Écris les neuf nombres utilisés en toutes lettres sur les lignes en pointillés.
2. Compte le nombre de lettres de chaque écriture et indique-le à droite de l'écriture en lettres.
3. Écris chacun des neuf nombres trouvés dans le tableau vide, au même endroit que celui du nombre de départ du premier tableau.
4. Vérifie que le second tableau est aussi un carré magique.
   On dit alors que le premier carré est un *carré alphamagique*. Les carrés alphamagiques ont été inventés par Lee Sallows.
5. Choisis un ou plusieurs carrés parmi ceux que te proposent ci-dessous Gérard et Charles-É. puis vérifie que ce sont des carrés alphamagiques.

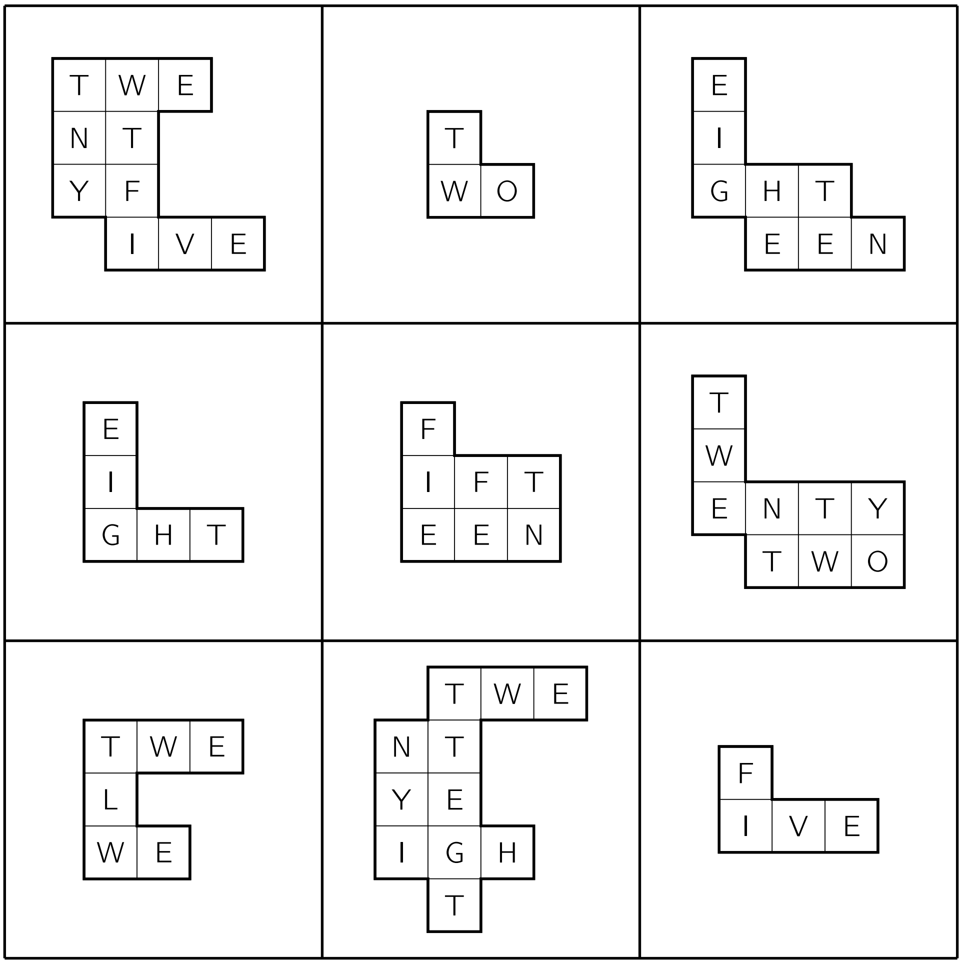
75	266	175
272	172	72
169	78	269

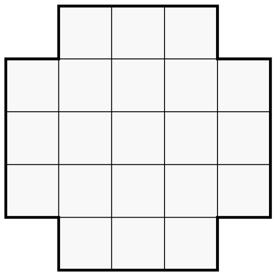
95	286	195
292	192	92
189	98	289

203	2	104
4	103	202
102	204	3

107	9	208
209	108	7
8	207	109

6. Un carré alphagéomagique





Dans le tableau carré ci-dessus à gauche, Lee Sallows a placé neuf pièces sur lesquelles sont écrites des nombres, en anglais, à raison d'une lettre par case.

Ces nombres sont, dans l'ordre de lecture usuel du tableau : **twenty-five**, **two**, **eighteen**, **eight**, **fifteen**, **twenty-two**, **twelve**, **twenty-eight** et **five**.

a. Écris dans le tableau de gauche ci-dessous la valeur de ces neuf nombres (en respectant les mêmes emplacements).

Écris dans le tableau de droite ci-dessous le nombre de lettres utilisées dans l'écriture (en anglais !) des neuf nombres (en respectant les mêmes emplacements).

b. Vérifie que le tableau carré est un carré alphamagique en vérifiant que les deux tableaux que tu as remplis sont des carrrés magiques.

En prenant les trois pièces (qui peuvent être retournées) de chaque ligne, de chaque colonne et de chaque diagonale, Lee Sallows arrive à les assembler pour recomposer le modèle donné à droite du tableau. Le modèle peut donc être reconstitué de huit façons différentes !

Lee Sallows a appelé *carré alphagéomagique* un tel tableau.

C46 : utilisation du tableur

IREM de Lyon

Voici, ci-dessous à gauche, un carré de côté 4 contenant tous les nombres entiers de 1 à 16.
Tu vas utiliser une feuille de calcul automatisé pour découvrir quelques propriétés : voici ci-dessous à droite, ce même carré écrit dans une feuille de calcul automatisé.

4	5	10	15
14	11	8	1
7	2	13	12
9	16	3	6

	A	B	C	D	E	F
1						
2		4	5	10	15	
3		14	11	8	1	
4		7	2	13	12	
5		9	16	3	6	
6						

1. Reproduis dans une feuille de calcul automatisé le tableau précédent.
2. Écris en cellule **B6** une formule, à recopier sur la droite, qui te permet de calculer la somme des quatre nombres de la colonne **B**.
   Combien vaut cette somme ?
3. Écris en cellule **F2** une formule, à recopier vers le bas, qui te permet de calculer la somme des quatre nombres de la ligne **2**.
4. Écris en cellule **F6** une formule qui te permet de calculer la somme des quatre nombres de la diagonale allant de la cellule **B2** à la cellule **E5** puis écris en cellule **F1** une formule qui te permet de calculer la somme des quatre nombres de la diagonale allant de la cellule **B5** à la cellule **E2**.
5. Que constates-tu ?

Un tel carré est appelé *carré magique d'ordre 4* et sa *constante magique* vaut 34.

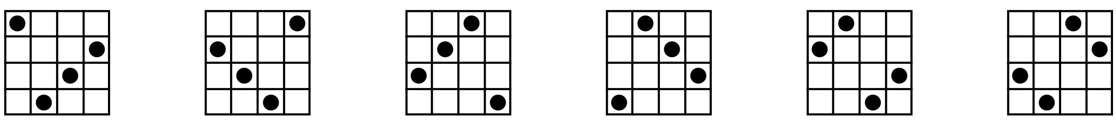
Tu vas découvrir maintenant d'autres propriétés de ce carré.

6. *Somme des quatre sommets des sous-carrés* 2×2
   Écris en cellule **B8** une formule qui te permet de calculer la somme des quatre nombres de la zone **B2:C3**.
   Recopie cette formule dans la plage **B8:D10**.
   Que constates-tu ?
7. *Somme des nombres dans des cases distantes de 2 le long d'une diagonale*
   Écris dans les cellules **F8** et **F9**, **10** et **F11** les formules permettant d'obtenir la somme des deux entiers situés dans des cases distants de 2 le long d'une diagonale.

   Que constates-tu ?
   Que représente la valeur 17 par rapport à la somme magique du carré ?

Ces deux caractéristiques supplémentaires sont celles d'un *carré magique plus-que-parfait*.

8. *Somme des nombres sur les diagonales brisées*
   Écris dans les cellules **F13** à **F20** les formules permettant d'obtenir la somme des quatre entiers situés dans les diagonales brisées, représentées ci-dessous.



Cette caractéristique supplémentaire à un carré magique est celle d'un *carré magique diabolique*.

9. Le carré C46 a pour côté 4 ; on dit que son ordre est 4. Dans le cas de l'ordre 4, les mathématiciens ont établi l'équivalence entre carré magique plus-que-parfait et carré magique diabolique.
   Recherche sur le net des carrés ayant l'une des deux caractéristiques (plus-que-parfait ou diabolique) et vérifie à l'aide du tableur qu'il a aussi l'autre caractéristique.

C46 : des égalités et calcul algébrique

IREM de Lyon

Voici trois « carrés magiques » :

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

7	14	4	9
15	6	12	1
2	3	13	16
10	11	5	8

11	16	2	5
6	9	7	12
3	8	10	13
14	1	15	4

Pour chacun d'eux, la somme des quatre nombres dans chacune des quatre lignes, dans chacune des quatre colonnes et dans chacune des deux diagonales est égale à 34.

Lee Sallows a utilisé ces trois carrés magiques pour construire des carrés géomagiques ; ils sont respectivement numérotés 32, 35 et 36 dans sa galerie `http://www.geomagicsquares.com/gallery.php`.

(Le premier carré est le carré magique « Mélancolie » d'Albrecht Dürer, utilisé en hommage.)

Tu vas découvrir d'autres propriétés, valables pour tout carré magique.

Chaque carré peut être identifié de la façon donnée ci-dessous :

a	b	c	d
e	f	g	h
i	j	k	l
m	n	p	q

1. Des premiers résultats

Pour chaque carré, calcule les sommes suivantes :

- $f+g+j+k$
- $a+d+m+q$
- $b+c+n+p$
- $a+d-n-p$
- $e+h-j-k$

Que constates-tu ?

2. Les preuves !

- Explique pourquoi tu as les quatre égalités suivantes :
  (1) $a+f+k+q=34$ (2) $e+f+g+h=34$ (3) $i+j+k+l=34$ (4) $m+j+g+d=34$
  En additionnant membre à membre ces quatre égalités, montre que $34+2\,(f+g+j+k)+34=4\times 34$.
  Montre alors l'égalité (5) $f+g+j+k=34$.

- Montre de même, à l'aide des trois égalités (1), (4) et (5), l'égalité (6) $a+d+m+q=34$.

- Explique pourquoi tu as les deux égalités suivantes :
  (7) $b+f+j+n=34$ (8) $c+g+k+p=34$
  En additionnant membre à membre ces deux égalités, montre l'égalité (9) $b+c+n+p=34$.

- Explique pourquoi tu as l'égalité suivante :
  (10) $a+b+c+d=34$
  En soustrayant membre à membre les égalités (9) et (10), montre l'égalité (11) $a+d=n+p$.

- En soustrayant membre à membre les égalités (7) et (9), montre l'égalité (12) $c+p=f+j$.

3. D'autres égalités

Écris, sur le même modèle, des égalités semblables aux égalités (9), (11) et (12).

C46 : calcul littéral

IREM de Lyon

Un premier tableau

$A+B+C-17$	$17-A$	$17+A-B-D$	$17-A-C+D$
$17-B$	$17-C$	$B+C+D-17$	$17-D$
$B+D-A$	$A+C-D$	$34-A-B-C$	A
$34-B-C-D$	D	B	C

Calcule les valeurs obtenues en remplaçant les lettres par les valeurs numériques données.

$A=3,\ B=2,\ C=13$ et $D=11$

$A=12,\ B=3,\ C=6$ et $D=16$

Un second tableau

a	b	c	d
$\dfrac{b+c+d-a}{2}+e$	$\dfrac{a-b+c+d}{2}-e$	$\dfrac{a+b-c+d}{2}+e$	$\dfrac{a+b+c-d}{2}-e$
$\dfrac{a+b-c+d}{2}$	$\dfrac{a+b+c-d}{2}$	$\dfrac{b+c+d-a}{2}$	$\dfrac{a-b+c+d}{2}$
$c-e$	$d+e$	$a-e$	$b+e$

Calcule les valeurs obtenues en remplaçant les lettres par les valeurs numériques données.

$a=1,\ b=14,\ c=7,\ d=12$ et $e=-1$

$a=4,\ b=5,\ c=10,\ d=15$ et $e=1$

Les deux carrés obtenus avec l'un ou l'autre des deux tableaux sont les mêmes.

Ce sont deux carrés magiques. Ils sont même « plus-que-parfaits » et « diaboliques ». (Regarde si nécessaire sur l'e-toile ce que signifie cette dernière expression.)

Lee Sallows a utilisé ces deux carrés magiques pour construire des carrés géomagiques ; ils sont respectivement numérotés 34 et 46 dans sa galerie `http://www.geomagicsquares.com/gallery.php`.

C46 : utilisation du logiciel Python

Voici, ci-dessous à gauche, un carré de côté 4 contenant les seize entiers de 1 à 16 et, ci-dessous à droite sa saisie dans un programme écrit en langage Python.
On dit que ce carré est *normal* car il contient les seize entiers de 1 à $4^2 = 16$.

4	5	10	15
14	11	8	1
7	2	13	12
9	16	3	6

```
K = [[4,5,10,15],
     [14,11,8,1],
     [7,2,13,12],
     [9,16,3,6]]
```

L'élément `K[i][j]`, pour $0 \leqslant$ `i` $\leqslant 3$ et $0 \leqslant$ `j` $\leqslant 3$, est le nombre situé à l'intersection de la ligne `i` et de la colonne `j` du carré. Ainsi, `K[0][1]` est égal à 5 et `K[1][2]` est égal à 8.

On dit qu'un carré est *magique* lorsque la somme des quatre entiers sur chaque ligne, la somme des quatre entiers sur chaque colonne et la somme des quatre entiers sur chaque diagonale est constante.

1. Des booléens

Un *booléen* (5) est un type de variable à deux états : l'état « Vrai » (« True », en anglais) ou l'état « Faux » (« False », en anglais). Ainsi, la condition booléene `K[1][1] == 1` (6) renvoie la variable booléenne `True` tandis que la condition booléenne `K[2][2] == 2` renvoie la variable booléenne `False`.

L'opérateur `and` entre deux conditions signifie que chacune des deux conditions doit prendre la valeur `True` pour que le résultat soit `True`. Sinon (7), le résultat est `False`.

a. Déterminer les valeurs des conditions booléennes suivantes.
- `K[3][1] == 1`
- `K[2][0] + K[0][2] == 17`
- `K[3][0] == 9 and K[0][3] == 15`
- `K[0][0] == 4 and K[1][1] == 11 and K[3][3] == 13`

b. Que retournent les fonctions suivantes ?
- ```
  def BoolA(K) :
      return K[0][0] + K[0][3] + K[3][3] + K[3][0] == 34
  ```
- ```
  def BoolB(K) :
      return K[1][0] + K[0][1] == 17
  ```

2. Le carré est-il magique ?

a. Calculer la somme des entiers de 1 à 16.
Calculer la constante d'un carré magique normal de côté (d'ordre) 4.

b. *Test sur les lignes*
- Écrire une fonction `L(K,i)` qui retourne le booléen `True` si la somme des quatre termes de la ligne `i` correspondante est égale à 34, et `False` sinon.
- Écrire une fonction `En_ligne(K)` qui retourne le booléen `True` si la somme des quatre termes sur chacune des quatre lignes est égale à 34, et `False` sinon. (On utilisera la fonction précédente.)

c. *Test sur les colonnes*
- Écrire une fonction `C(K,j)` qui retourne le booléen `True` si la somme des quatre termes de la colonne `j` est égale à 34, et `False` sinon.

(5). Le terme « booléen » fait référence à un système de logique élaboré par le mathématicien anglais George Boole (1815–1864), l'un des précurseurs de l'informatique.
(6). En langage Python, le test d'égalité se note == .
(7). C'est-à-dire qu'au moins l'une des conditions prend la valeur `False`.

- Écrire une fonction `En_colonne(K)` qui retourne le booléen `True` si la somme des quatre termes sur chacune des quatre colonnes est égale à 34, et `False` sinon. (On utilisera la fonction précédente.)

d. *Test sur les diagonales*
- Écrire une fonction `Dm(K)` (resp. `Dd(K)`) qui retourne le booléen `True` si la somme des quatre termes de la diagonale montante (resp. descendante) est égale à 34, et `False` sinon.
- Écrire une fonction `En_colonne(K)` qui retourne le booléen `True` si la somme des quatre termes sur chacune des diagonales est égale à 34, et `False` sinon.

e. *Bilan*

Écrire une fonction `magique(K)` qui retourne le booléen `True` si toutes les conditions précédentes sont vérifiées, et `False` sinon.

3. D'autres propriétés de ce carré magique

On va découvrir maintenant deux autres propriétés de ce carré.

a. *Somme des quatre sommets des sous-carrés* 2×2

Il y a neuf sous-carrés de côté 2 : ils contiennent les quadruplets $(4\,;5\,;14\,;11)$, $(5\,;10\,;11\,;8)$, ...
Écrire une fonction `carre22(K)` qui retourne le booléen `True` si la somme des quatre termes de chacun des neuf sous-carrés 2×2 est égale à 34, et `False` sinon.

b. *Somme des nombres dans des cases distantes de 2 le long d'une diagonale*

Les cases du carré contenant les valeurs 4 et 13, ou 8 et 9 sont des cases distantes de 2 le long d'une diagonale. Il y a quatre paires de cases satisfaisant cette condition.
On dit alors que le carré magique est *associatif*.

Vérifier que les quatre sommes pour les quatre paires sont toutes égales à 17.

Ces deux caractéristiques supplémentaires sont celles d'un carré magique que l'on appelle *plus-que-parfait*.

4. Les 86 quadruplets et leur disposition

On va déterminer tous les quadruplets de nombres du carré magique dont la somme vaut 34 et les illustrer.

a. Les 86 quadruplets

- En langage Python, dans la division euclidienne de `n` par 4, le quotient entier se note `n//4` et le reste se note `n%4`. Ainsi, `13//4` a pour valeur 3 et `13%4` a pour valeur 1 (car $13 = 4 \times 3 + 1$).

  En écrivant les 16 nombres de gauche à droite puis de haut en bas, on désigne par `R(n)` le nombre de rang `n` dans cette liste (le rang étant compris entre 0 et 15). Ainsi, `R(0)` a pour valeur 4, `R(5)` a pour valeur 11 et `R(13)` a pour valeur 16.

  - Montrer que le nombre `R(n)` est le nombre `K[n//4][n%4]`.
  - Écrire une fonction `R(n)`, de paramètre `n` variant de 0 à 15, permettant d'obtenir `R(n)`.

- Traduire en langage Python le pseudo-code suivant, qui répond à la question.

  L'exécution de ce programme donne 86 quadruplets.

  Remarque. La démarche utilisée permet de travailler avec des entiers `a`, `b`, `c` et `d` dans l'ordre croissant (puisque, par exemple, la première valeur de `b` est `a + 1`). Cela donne des solutions non répétées, ce qui n'aurait pas été le cas si on avait fait varier `a`, `b`, `c` et `d` de 1 à 16.

```
DEBUT
    n = 0
    POUR a ALLANT DE 1 A 13 :
        POUR b ALLANT DE a + 1 A 14 :
            POUR c ALLANT DE b + 1 A 15 :
                POUR d ALLANT DE c + 1 A 16 :
                    SI R(a) + R(b) + R(c) + R(d) == 34 :
                        n = n + 1
                        AFFICHER n, R(a), R(b), R(c), R(d)
                    FIN SI
                FIN POUR
            FIN POUR
        FIN POUR
    FIN POUR
FIN
```

b. Leur disposition

Écrire un programme qui permette d'afficher l'endroit des quatre nombres de somme 34. L'affichage correspond à un tableau carré de dimension 4 où l'emplacement d'un des entiers du quadruplet est codé 1 (et 0 sinon) : l'affichage de ce tableau sera en fait l'affichage successif des quatre lignes.

L'exécution donnera l'affichage qui commence ainsi :

```
1
(1, 1, 1, 1)
(0, 0, 0, 0)
(0, 0, 0, 0)
(0, 0, 0, 0)

2
(1, 1, 0, 0)
(1, 1, 0, 0)
(0, 0, 0, 0)
(0, 0, 0, 0)
```

5. Avec d'autres carrés

Lee Sallows a utilisé d'autre carrés normaux :

C32

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

C34

1	14	7	12
15	4	9	6
10	5	16	3
8	11	2	13

C35

7	14	4	9
15	6	12	1
2	3	13	16
10	11	5	8

C36

11	16	2	5
6	9	7	12
3	8	10	13
14	1	15	4

C37

14	12	1	7
5	3	10	16
11	13	8	2
4	6	15	9

C38

16	3	5	10
9	6	4	15
2	13	11	8
7	12	14	1

Reprendre les questions précédentes avec ces carrés et vérifier qu'ils sont tous magiques.
Lequel est un carré magique plus-que-parfait ?

Remarque. Le carré C32 est le carré magique apparaissant dans la gravure *Melencolia I* réalisée par Albrecht Dürer en 1514.

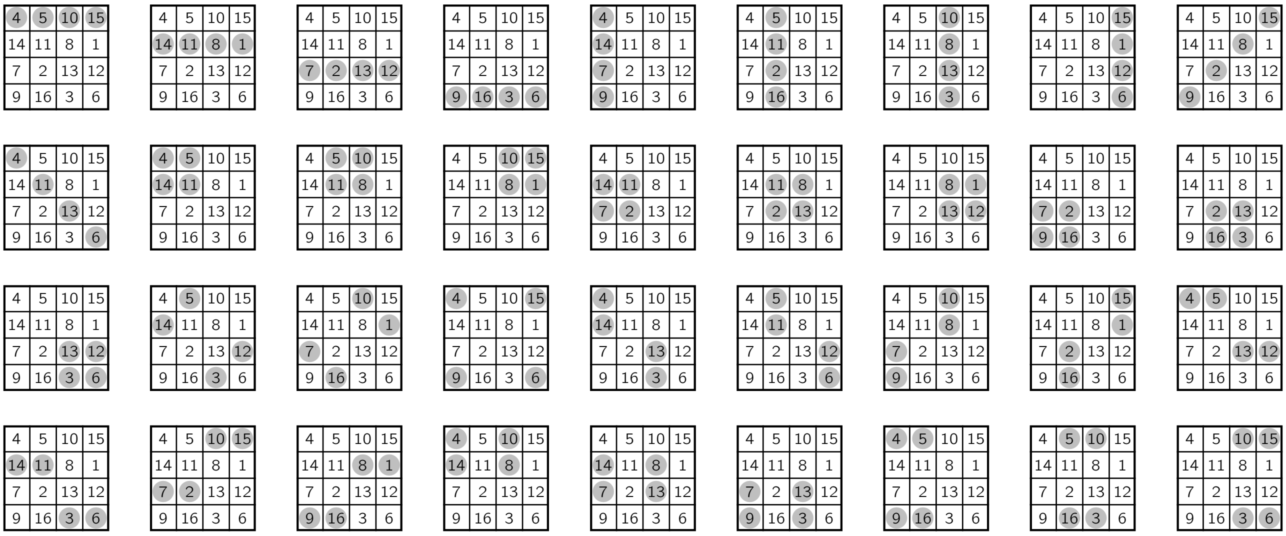
C46 : quatre-vingt-six possibilités de somme 34

IREM de Lyon

4	5	10	15
14	11	8	1
7	2	13	12
9	16	3	6

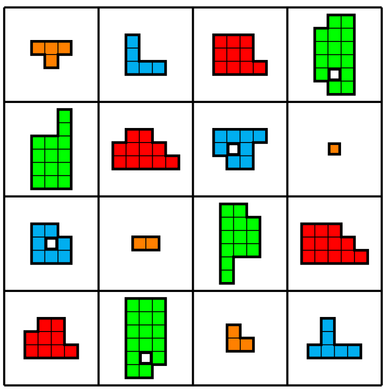
Voici ci-contre un carré magique d'ordre 4.

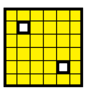
Voici trente-six façons d'obtenir une somme égale à 34 :

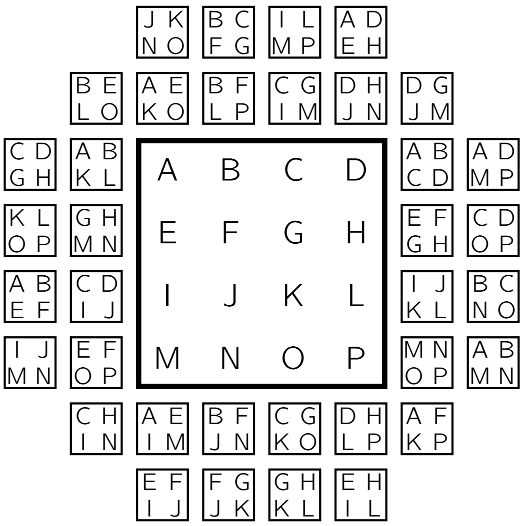


Ce carré magique est à l'origine du carré géomagique ci-dessous à gauche ; il permet d'obtenir trente-six représentations du modèle ci-dessous au milieu.
On peut les trouver sur `https://www.geomagicsquares.com/gallery.php?page=46`.
Par exemple, la somme $4 + 5 + 10 + 15$ est liée à l'utilisation des quatre pièces de la première ligne du carré géomagique pour obtenir le modèle.

Lee Sallows a utilisé les trente-six des quatre-vingt-six combinaisons, ci-dessous à droite.







Recherche des combinaisons permettant d'obtenir 34. (Il y en a quatre-vingt-six en tout.)
Utilise des fiches-réponses pour les indiquer.

4	5	10	15
14	11	8	1
7	2	13	12
9	16	3	6

4	5	10	15
14	11	8	1
7	2	13	12
9	16	3	6

4	5	10	15
14	11	8	1
7	2	13	12
9	16	3	6

4	5	10	15
14	11	8	1
7	2	13	12
9	16	3	6

4	5	10	15
14	11	8	1
7	2	13	12
9	16	3	6

4	5	10	15
14	11	8	1
7	2	13	12
9	16	3	6

4	5	10	15
14	11	8	1
7	2	13	12
9	16	3	6

4	5	10	15
14	11	8	1
7	2	13	12
9	16	3	6

4	5	10	15
14	11	8	1
7	2	13	12
9	16	3	6

4	5	10	15
14	11	8	1
7	2	13	12
9	16	3	6

4	5	10	15
14	11	8	1
7	2	13	12
9	16	3	6

4	5	10	15
14	11	8	1
7	2	13	12
9	16	3	6

4	5	10	15
14	11	8	1
7	2	13	12
9	16	3	6

4	5	10	15
14	11	8	1
7	2	13	12
9	16	3	6

4	5	10	15
14	11	8	1
7	2	13	12
9	16	3	6

4	5	10	15
14	11	8	1
7	2	13	12
9	16	3	6

4	5	10	15
14	11	8	1
7	2	13	12
9	16	3	6

4	5	10	15
14	11	8	1
7	2	13	12
9	16	3	6

4	5	10	15
14	11	8	1
7	2	13	12
9	16	3	6

4	5	10	15
14	11	8	1
7	2	13	12
9	16	3	6

4	5	10	15
14	11	8	1
7	2	13	12
9	16	3	6

4	5	10	15
14	11	8	1
7	2	13	12
9	16	3	6

4	5	10	15
14	11	8	1
7	2	13	12
9	16	3	6

4	5	10	15
14	11	8	1
7	2	13	12
9	16	3	6

4	5	10	15
14	11	8	1
7	2	13	12
9	16	3	6

4	5	10	15
14	11	8	1
7	2	13	12
9	16	3	6

4	5	10	15
14	11	8	1
7	2	13	12
9	16	3	6

4	5	10	15
14	11	8	1
7	2	13	12
9	16	3	6

4	5	10	15
14	11	8	1
7	2	13	12
9	16	3	6

4	5	10	15
14	11	8	1
7	2	13	12
9	16	3	6

4	5	10	15
14	11	8	1
7	2	13	12
9	16	3	6

4	5	10	15
14	11	8	1
7	2	13	12
9	16	3	6

4	5	10	15
14	11	8	1
7	2	13	12
9	16	3	6

4	5	10	15
14	11	8	1
7	2	13	12
9	16	3	6

4	5	10	15
14	11	8	1
7	2	13	12
9	16	3	6

4	5	10	15
14	11	8	1
7	2	13	12
9	16	3	6

4	5	10	15
14	11	8	1
7	2	13	12
9	16	3	6

4	5	10	15
14	11	8	1
7	2	13	12
9	16	3	6

4	5	10	15
14	11	8	1
7	2	13	12
9	16	3	6

4	5	10	15
14	11	8	1
7	2	13	12
9	16	3	6

4	5	10	15
14	11	8	1
7	2	13	12
9	16	3	6

4	5	10	15
14	11	8	1
7	2	13	12
9	16	3	6

4	5	10	15
14	11	8	1
7	2	13	12
9	16	3	6

4	5	10	15
14	11	8	1
7	2	13	12
9	16	3	6

4	5	10	15
14	11	8	1
7	2	13	12
9	16	3	6

4	5	10	15
14	11	8	1
7	2	13	12
9	16	3	6

4	5	10	15
14	11	8	1
7	2	13	12
9	16	3	6

4	5	10	15
14	11	8	1
7	2	13	12
9	16	3	6

4	5	10	15
14	11	8	1
7	2	13	12
9	16	3	6

4	5	10	15
14	11	8	1
7	2	13	12
9	16	3	6

4	5	10	15
14	11	8	1
7	2	13	12
9	16	3	6

4	5	10	15
14	11	8	1
7	2	13	12
9	16	3	6

4	5	10	15
14	11	8	1
7	2	13	12
9	16	3	6

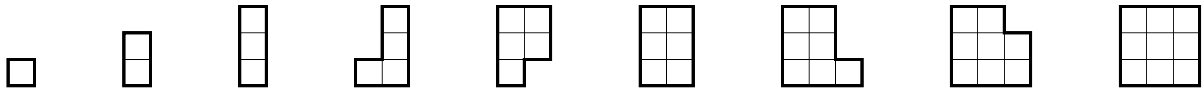
4	5	10	15
14	11	8	1
7	2	13	12
9	16	3	6

C57 : construction

IREM de Lyon

Dans cette activité, tu vas construire le carré magique qui te permettra d'obtenir le carré géomagique C57 !

Tu disposes des neuf pièces suivantes :



1. Détermine l'aire de chacune des neuf pièces.

2. Calcule la somme des neuf nombres trouvés dans la question précédente.

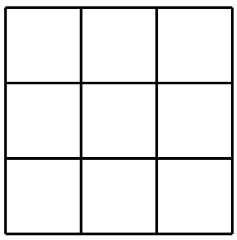
3. Dans un carré magique d'ordre 3 (ou de côté 3), la somme des nombres de chaque ligne, de chaque ligne et de chaque diagonale est la même.
Montre que la somme des trois nombres vaut alors 15.

4. Décompose le nombre 15 en sommes de trois nombres entiers distincts (il y a huit possibilités).

5. Complète le tableau suivant, dans lequel tu vas écrire le nombre de fois où a été utilisé en tout chaque nombre entier dans la décomposition précédente.

Nombre	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Effectif									

6. Voici le support du carré magique que tu vas construire.



a. Combien de fois la pièce centrale va-t-elle être utilisée ?
Quel nombre vas-tu donc placer au centre du carré ?

b. Combien de fois une pièce située dans un coin va-t-elle être utilisée ?
Quels sont les nombres que tu vas pouvoir y placer ?

c. Combien de fois une pièce située dans un milieu (hors centre du carré) va-t-elle être utilisée ?
Quels sont les nombres que tu vas pouvoir y placer ?

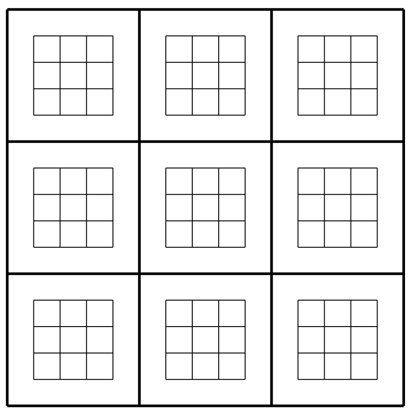
7. **a.** Écris dans la case centrale le nombre choisi en question **6. a** .

b. Dans la case en haut à gauche, écris l'un des quatre nombres trouvés dans la question **6. b** .
Dans la case en bas à droite, écris le nombre qui te permet d'avoir une somme égale à 15 sur la diagonale. (Ce nombre est dans la liste trouvée en **6. b** !)

c. Dans les cases en haut à droite et en bas à gauche, place les deux nombres non utilisés de la liste trouvée en **6. b** .

d. La somme des trois nombres dans chaque ligne et dans chaque colonne est égale à 15 : complète le carré magique.

8. Construis ci-contre le carré magique en remplaçant chacun des neuf nombres du carré précédent par la pièce qui a l'aire correspondante.



C57 : défi des quatre-vingt-seize plateaux

IREM de Lyon

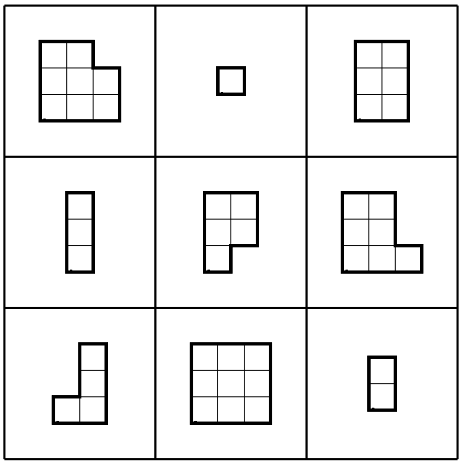
Voici un carré géomagique.

Avec ces pièces, tu peux recouvrir de huit façons différentes douze modèles différents !

Dessine sur ta fiche de recherche tes solutions.

Tu peux éventuellement utiliser le dé à 8 faces de la page 130 pour t'imposer les trois pièces à utiliser (les pointillés indiquent le bas du tableau et l'orientent) et le dé à 12 faces de la page 131 pour t'imposer le modèle à trouver.

Tu peux aussi utiliser ces deux dés pour jouer contre un ou plusieurs adversaires : les deux dés lancés, qui sera le premier à obtenir une solution ?



C57 : défi des quatre-vingt-seize plateaux

IREM de Lyon

Voici un carré géomagique.

Avec ces pièces, tu peux recouvrir de huit façons différentes douze modèles différents !

Dessine sur ta fiche de recherche tes solutions.

Tu peux éventuellement utiliser le dé à 8 faces de la page 130 pour t'imposer les trois pièces à utiliser (les pointillés indiquent le bas du tableau et l'orientent) et le dé à 12 faces de la page 131 pour t'imposer le modèle à trouver.

Tu peux aussi utiliser ces deux dés pour jouer contre un ou plusieurs adversaires : les deux dés lancés, qui sera le premier à obtenir une solution ?

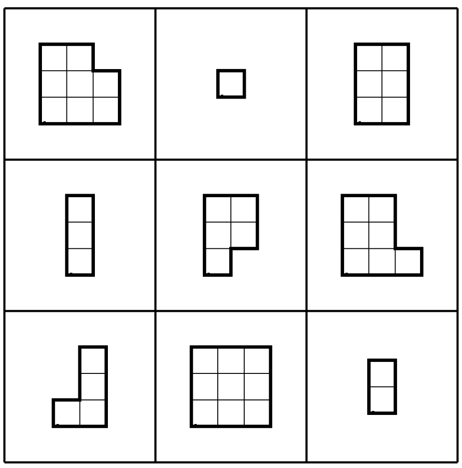
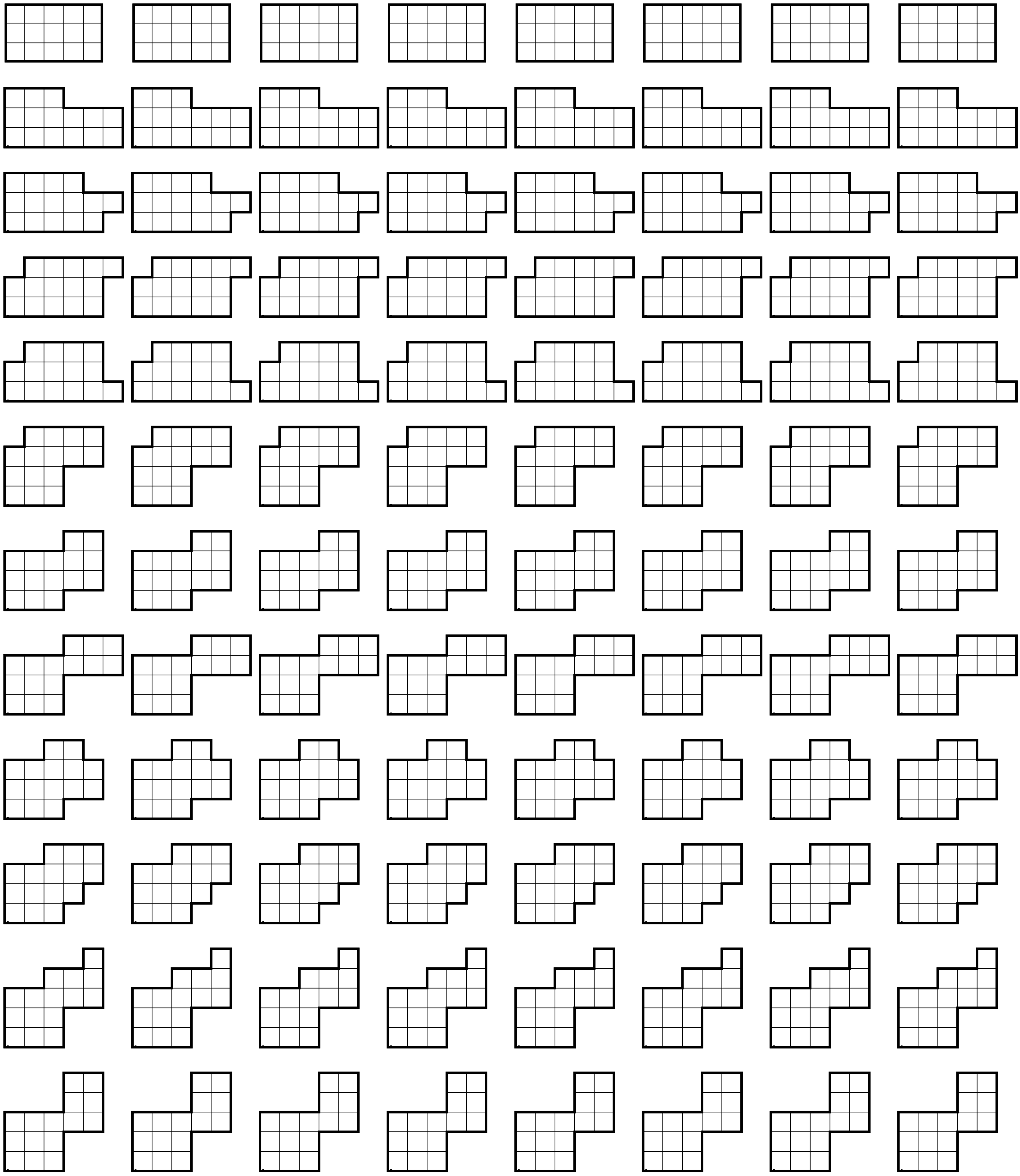
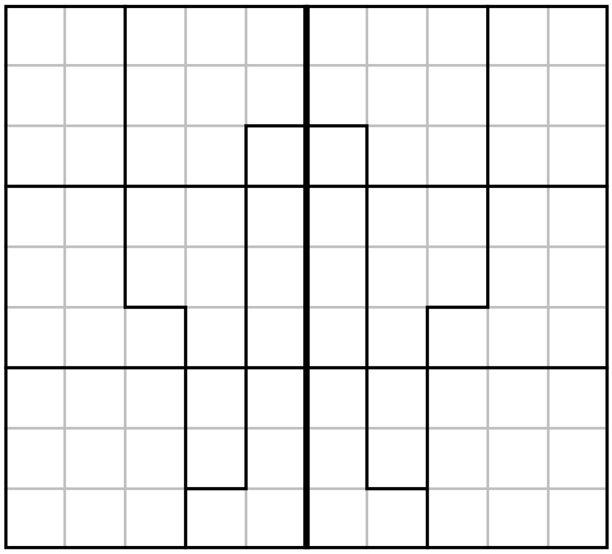


Planche de recherche

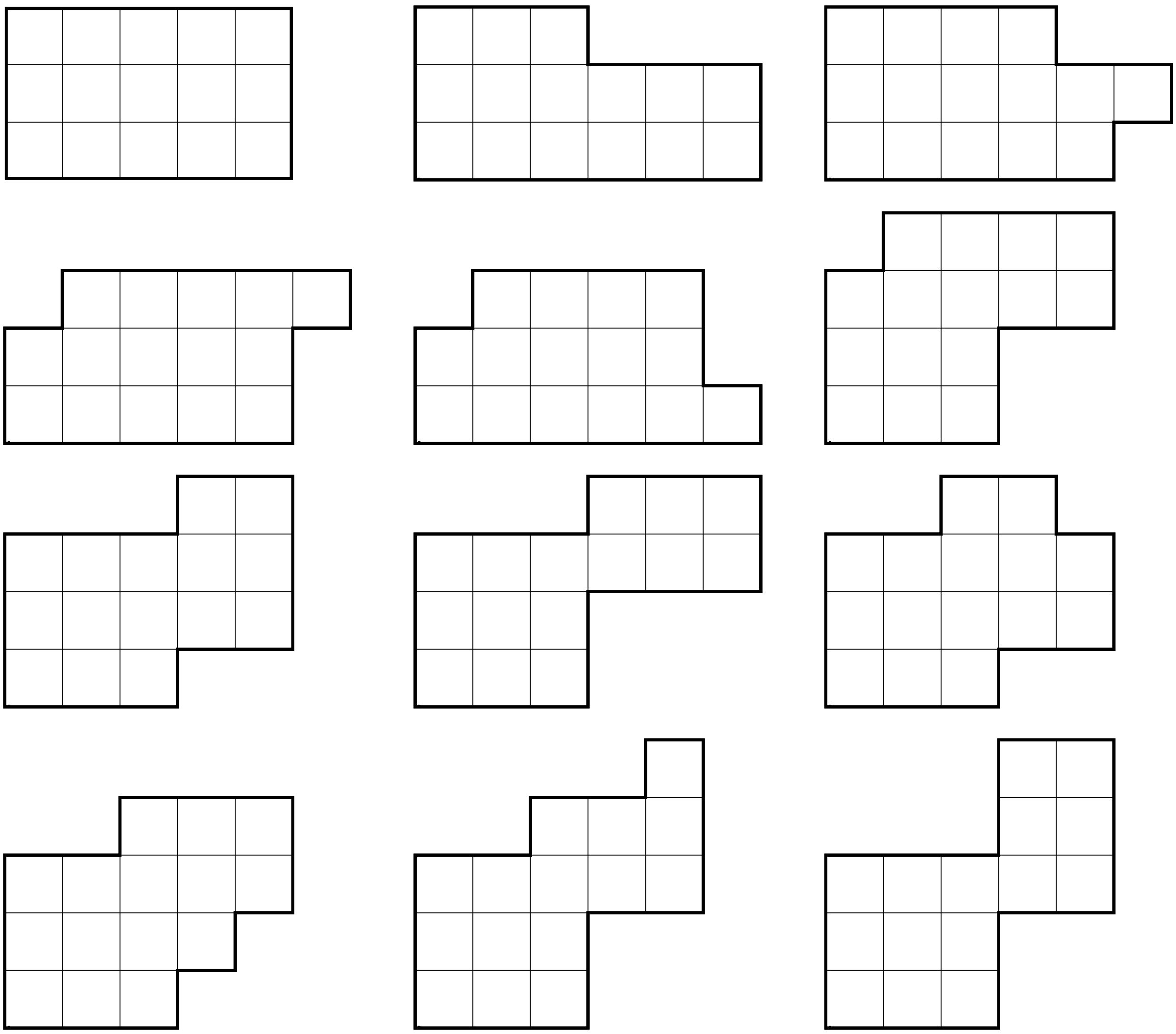


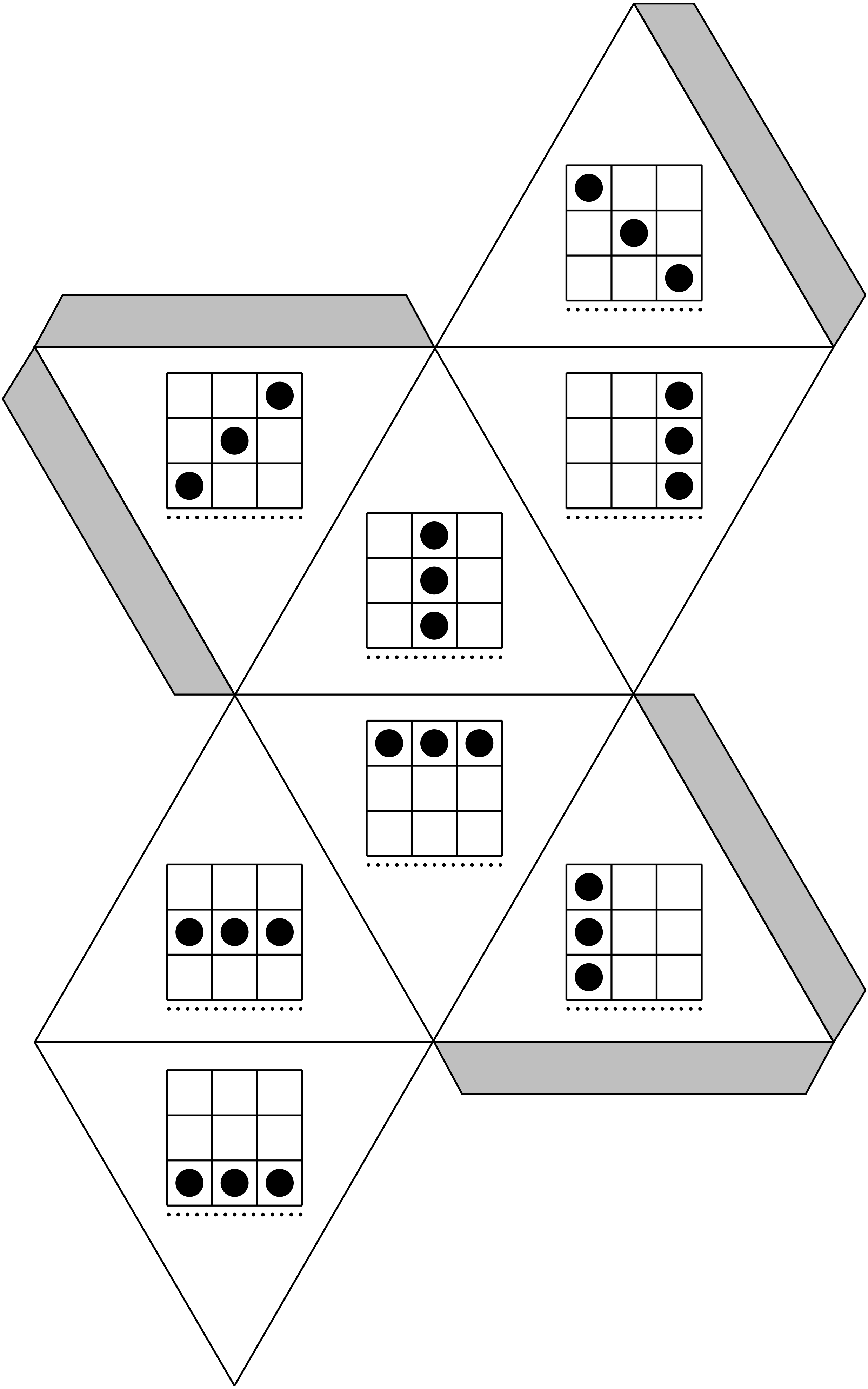
Matériel pour le défi, à découper

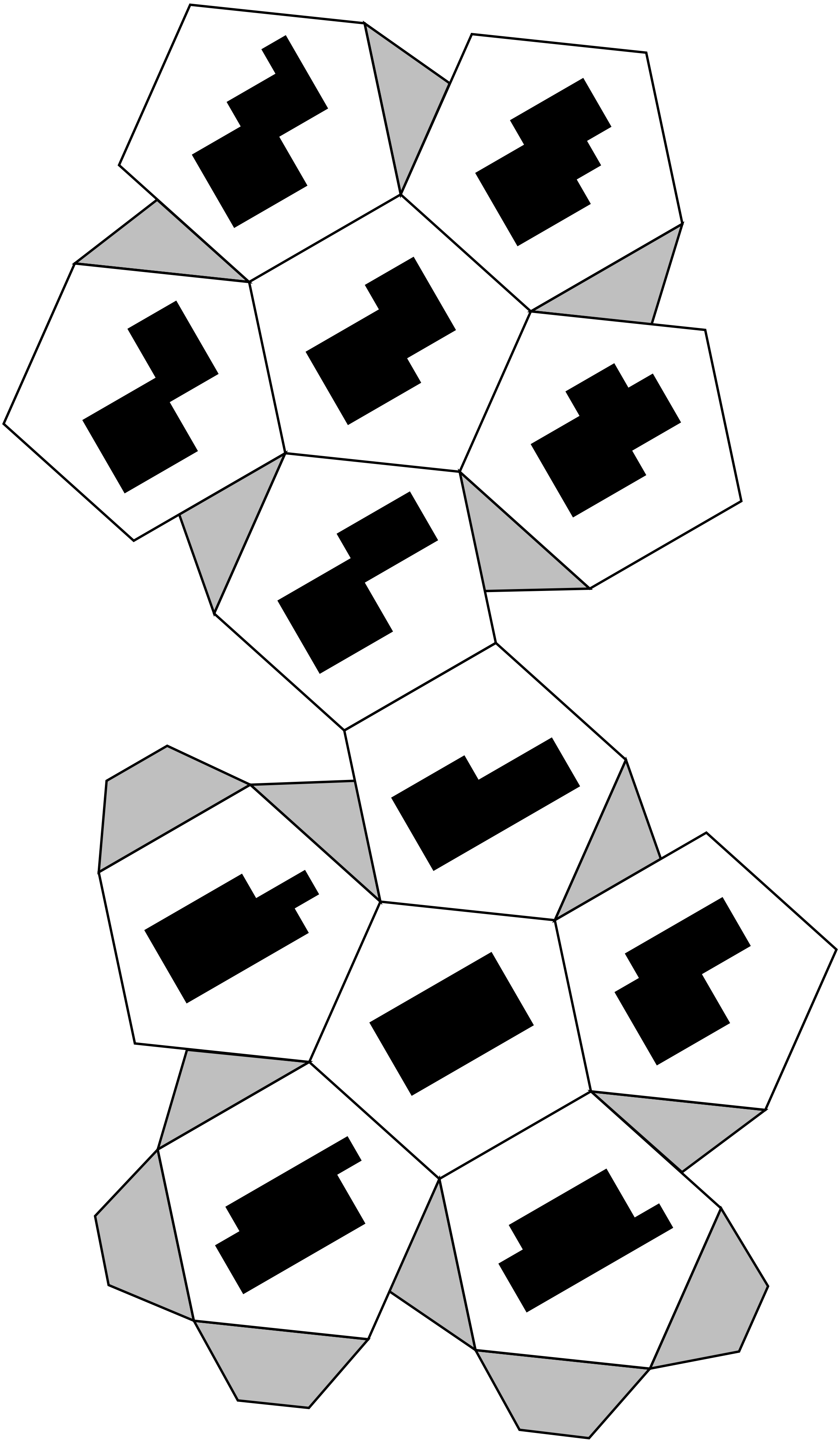
Les neuf pièces (en recto-verso, regroupées en un seul bloc)



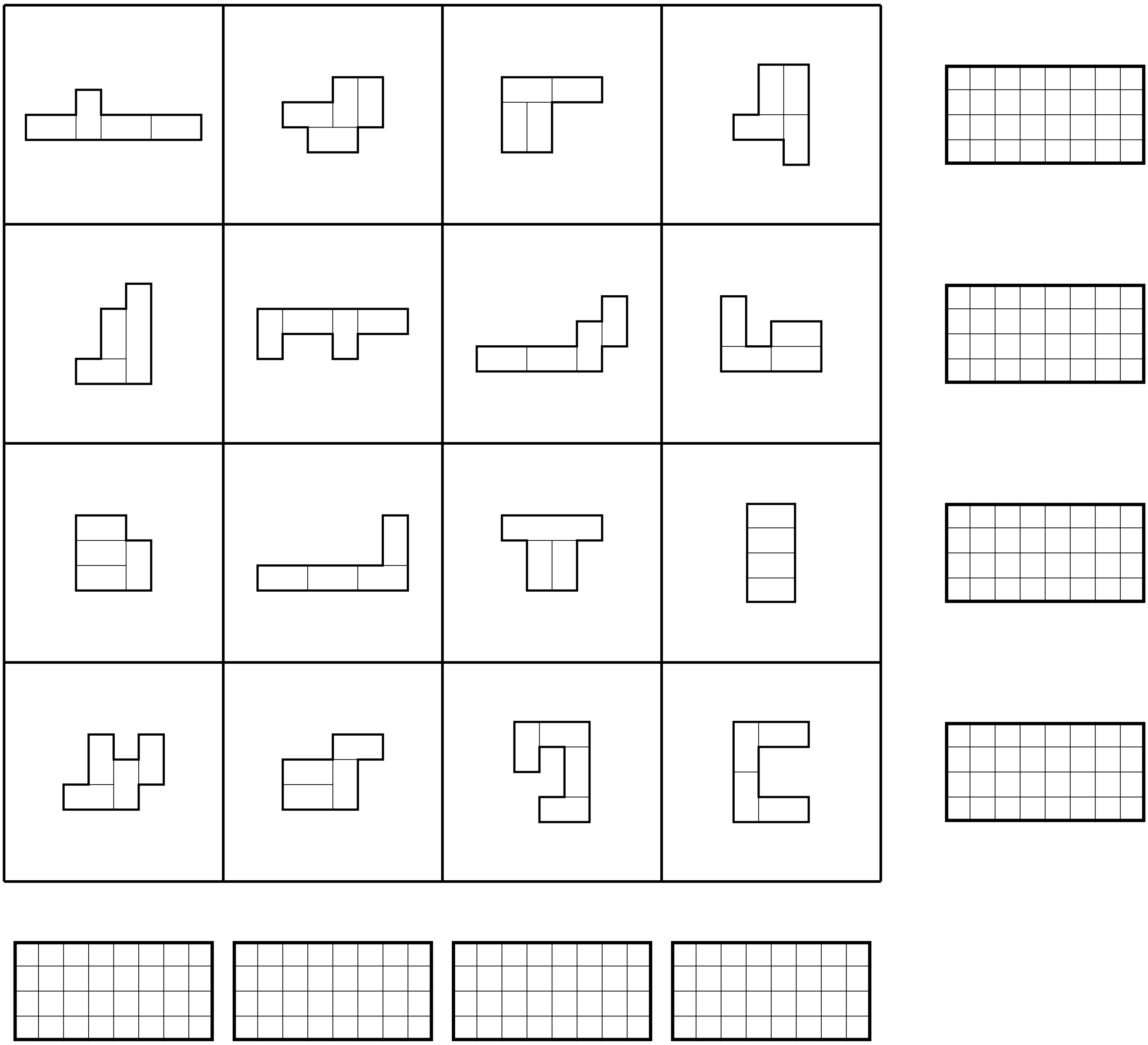
Les douze plateaux

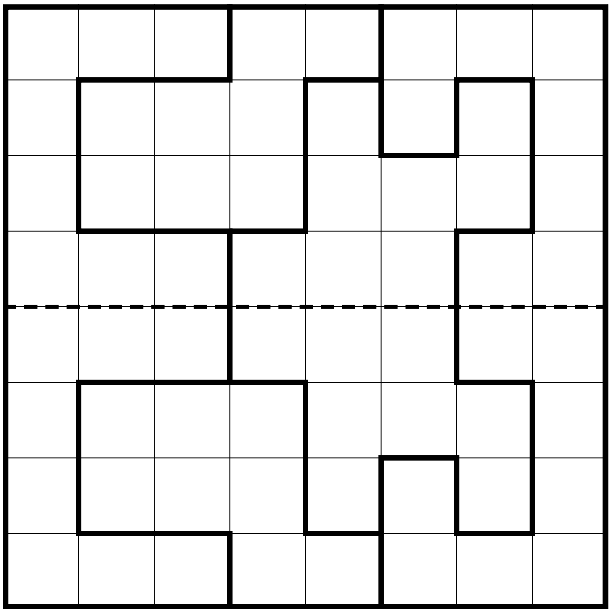
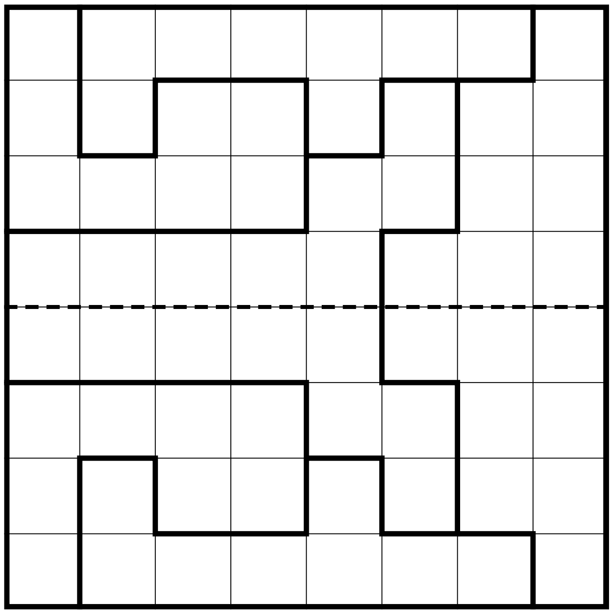
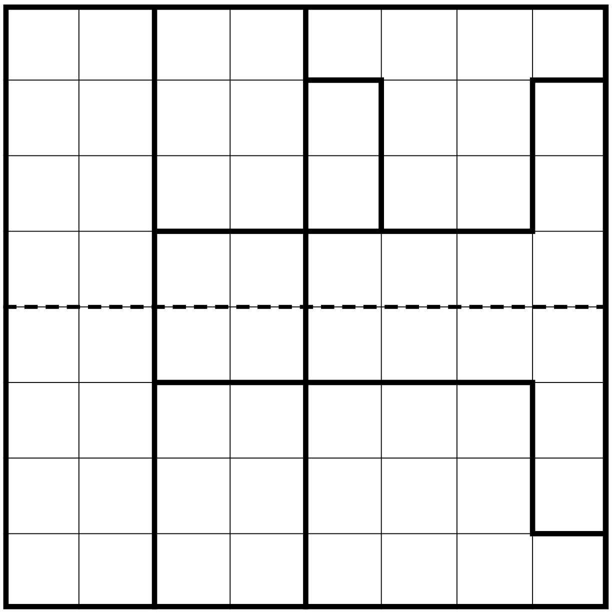
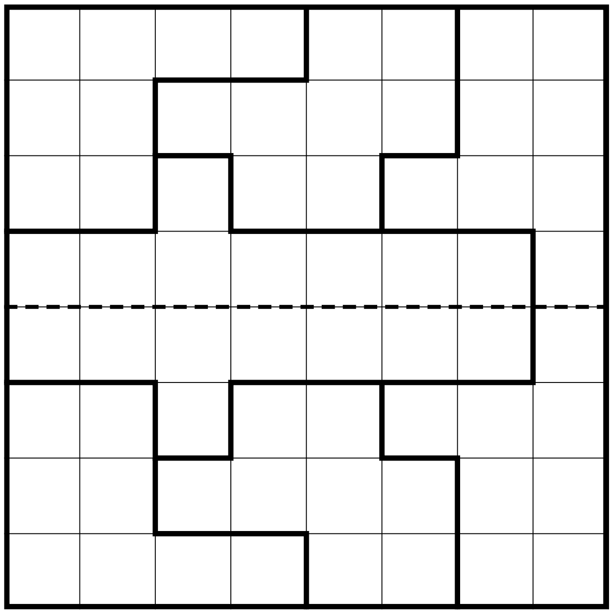
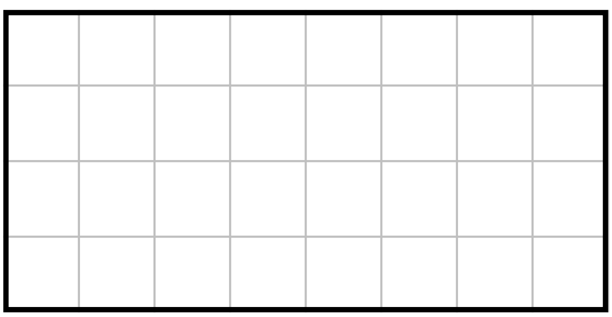
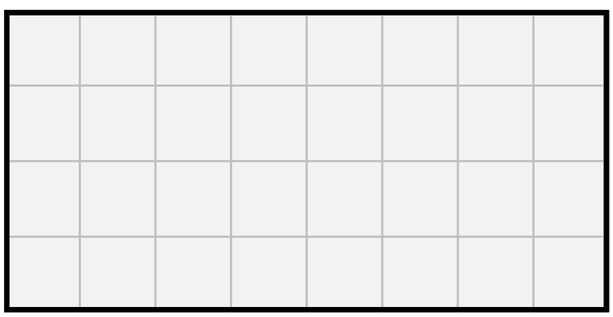


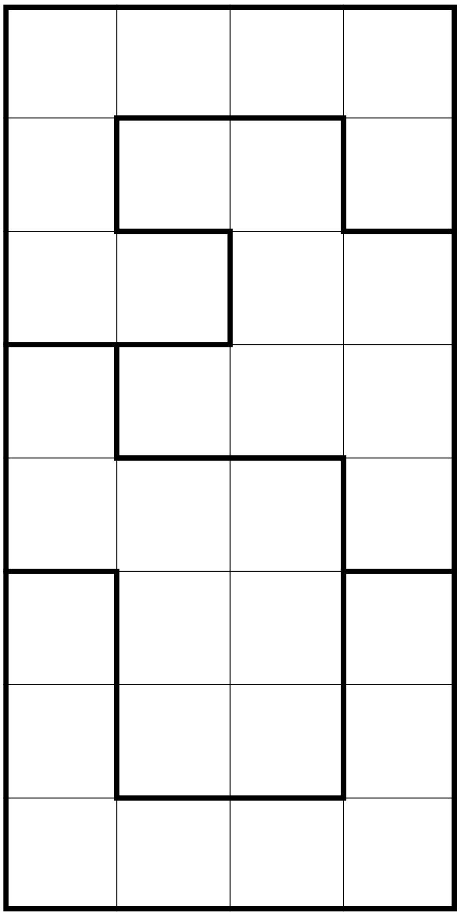


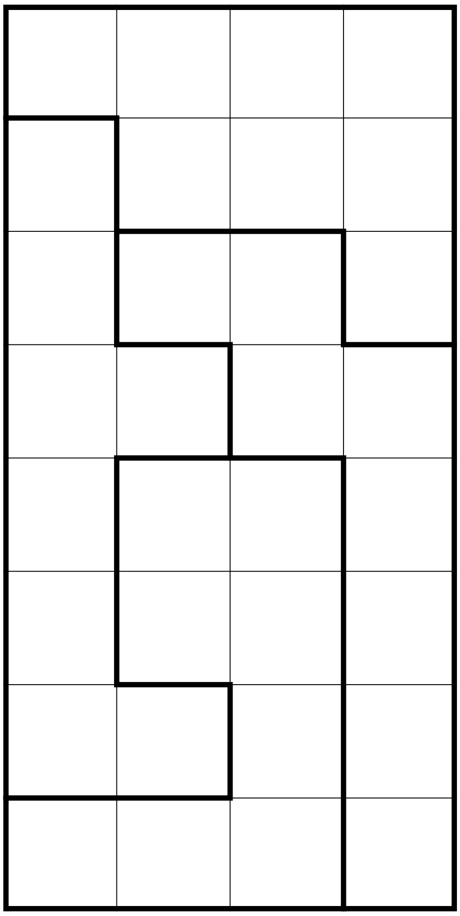


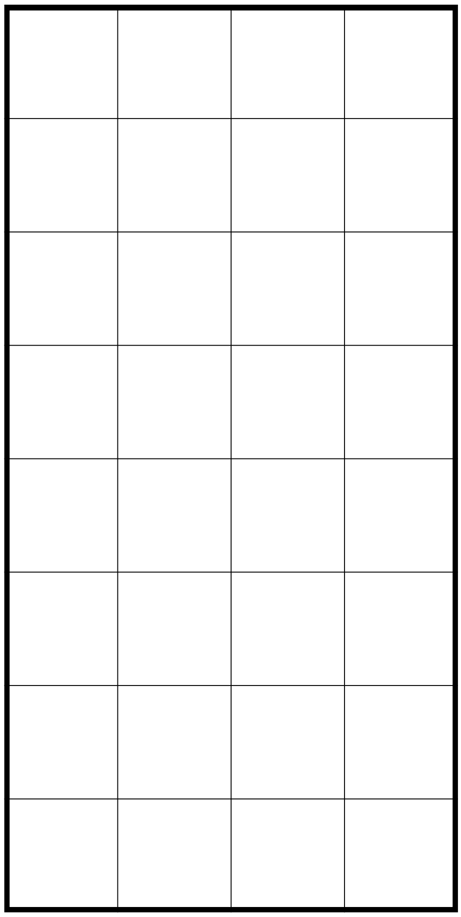
Carré géomagique C62

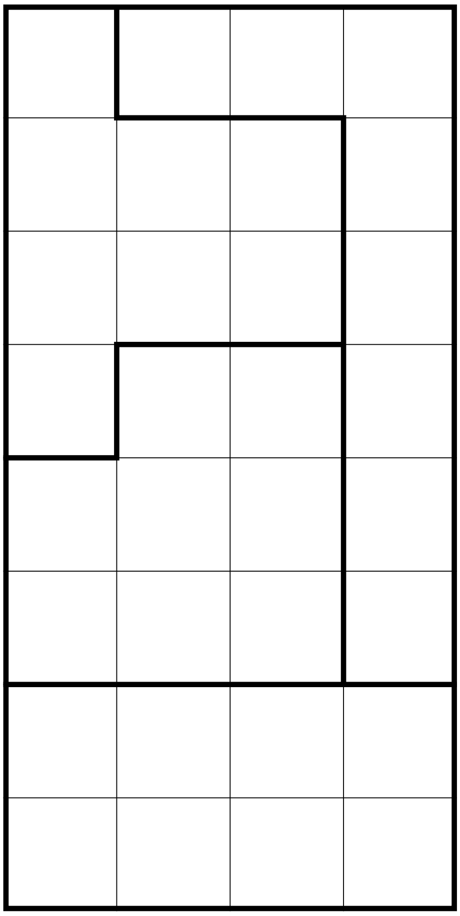


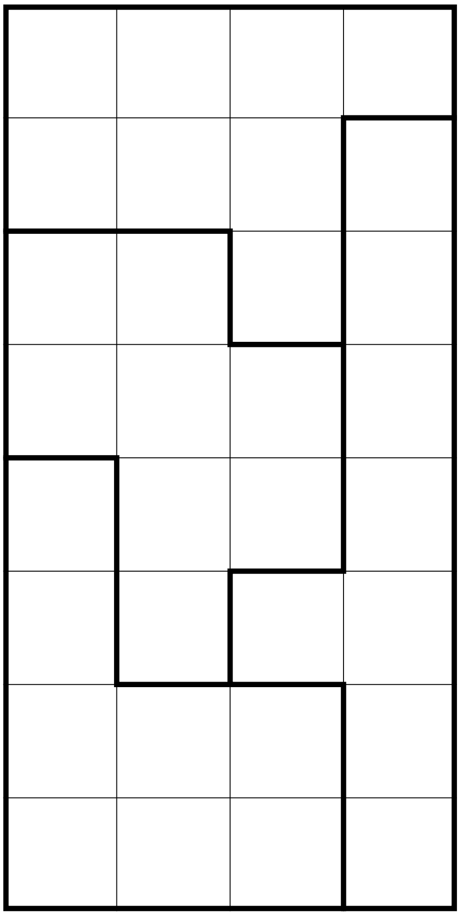







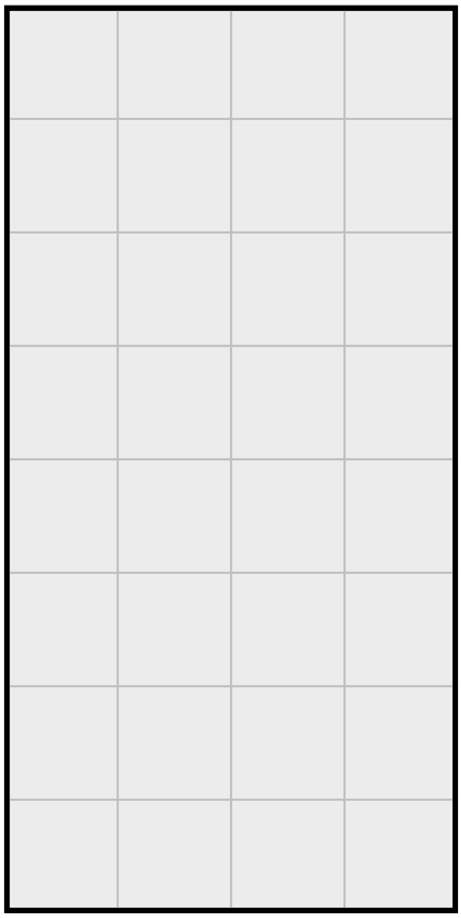












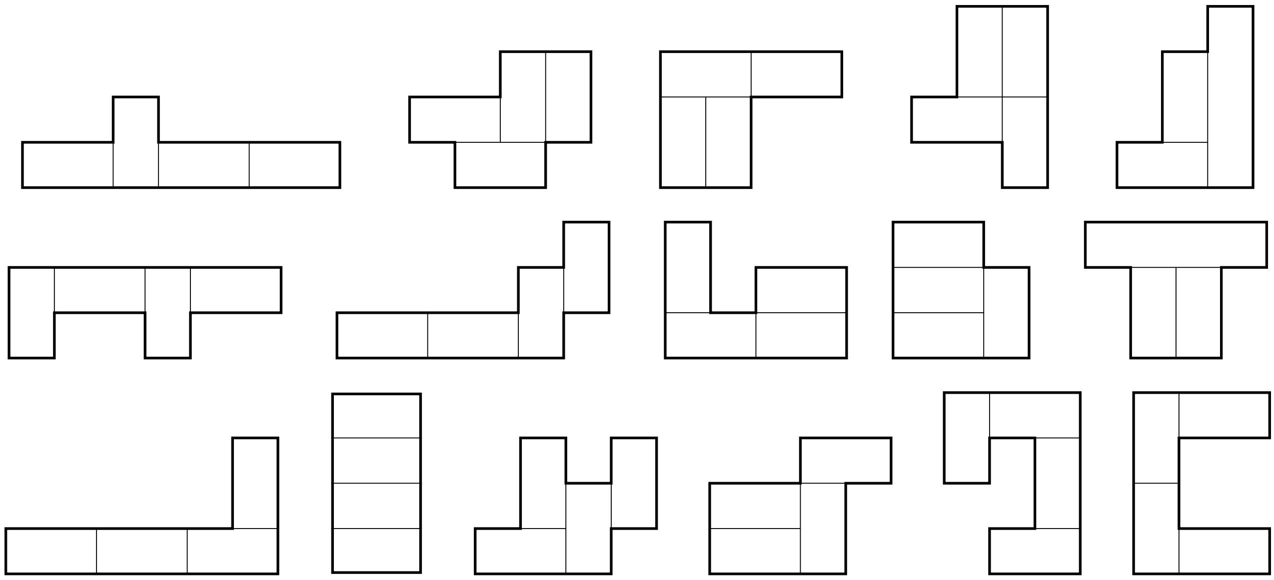
C62 : agrandissement et ensemble de tuiles auto-tuilées

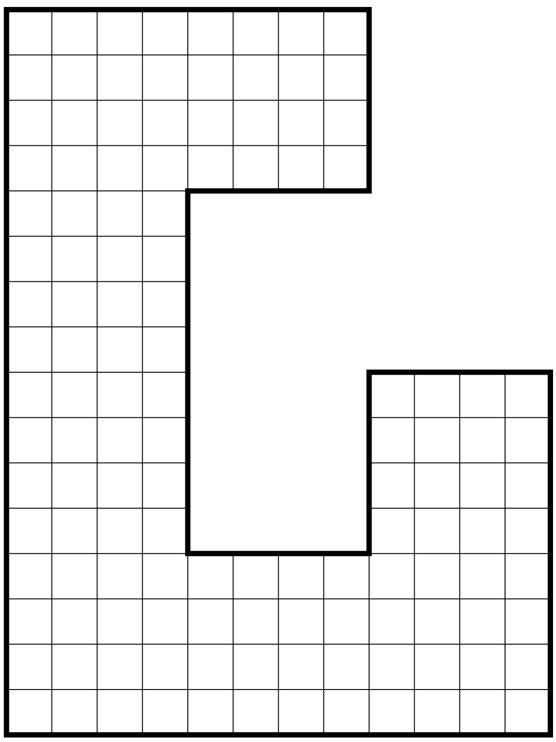
IREM de Lyon

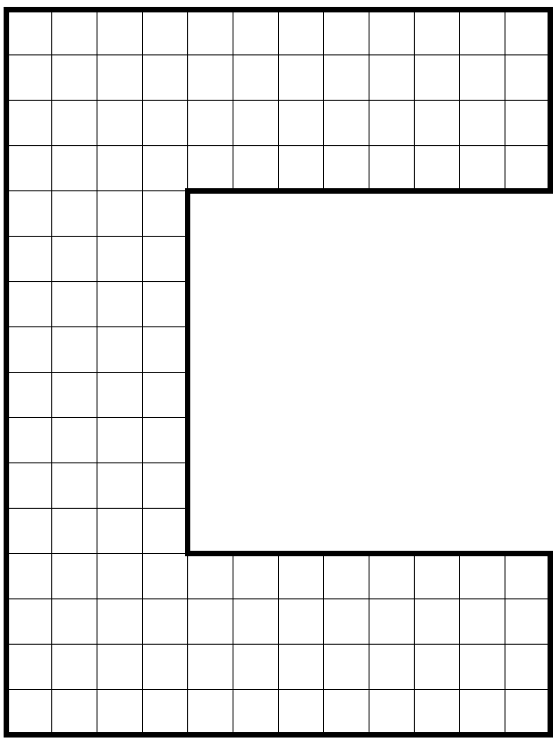
Les seize pièces du carré géomagique forment un *ensemble de tuiles auto-tuilées* : chacune d'elles peut être reproduite à l'échelle 4 avec les seize pièces !

Ci-dessous sont proposées deux pièces du carré à l'échelle 4 : recouvre chacune d'elles avec les seize pièces.

Une piste est d'utiliser le recouvrement des modèles de l'activité précédente.







Solutions

Carré géomagique : première approche (Solution)

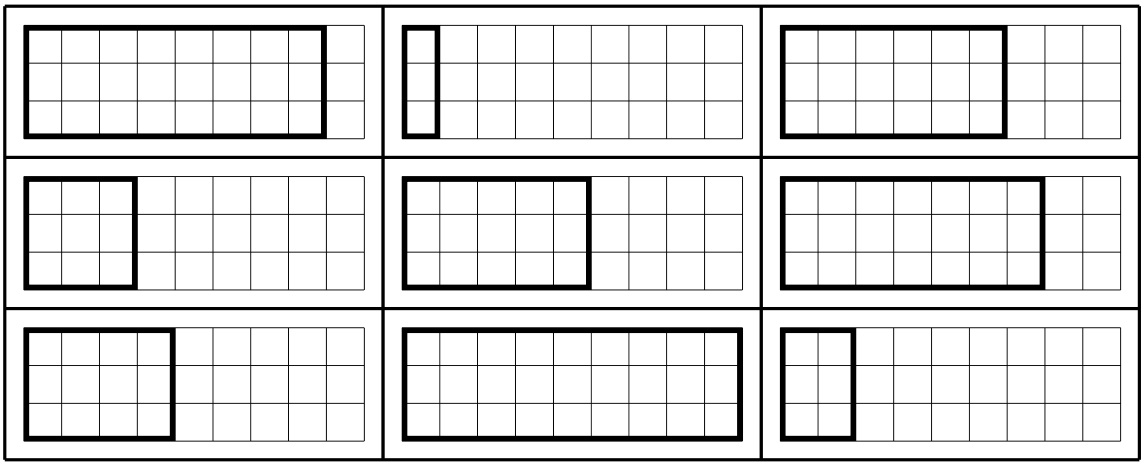
IREM de Lyon

Carré magique associé :

8	1	6
3	5	7
4	9	2

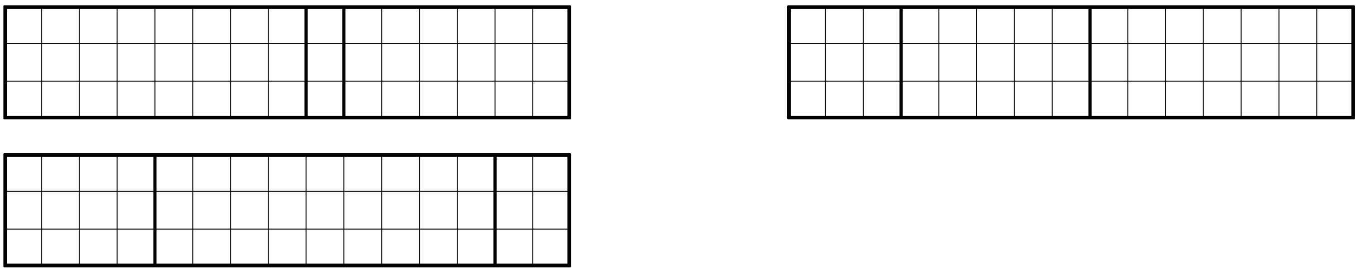
Somme constante (« somme magique ») : 15

Pièces :

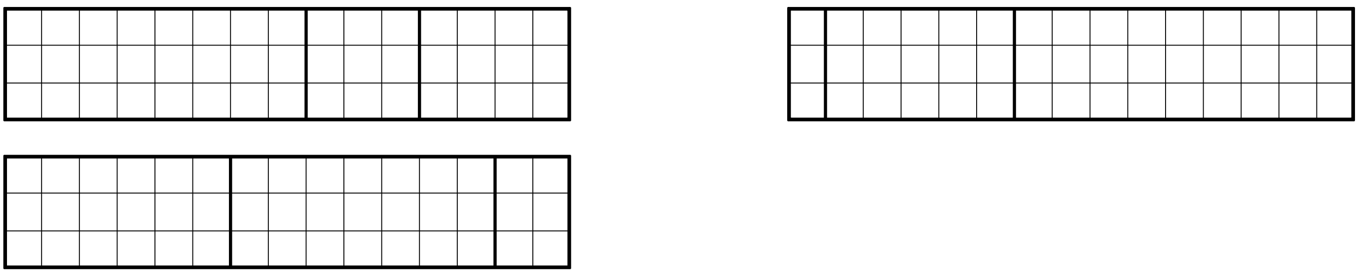


Modèle rectangulaire :

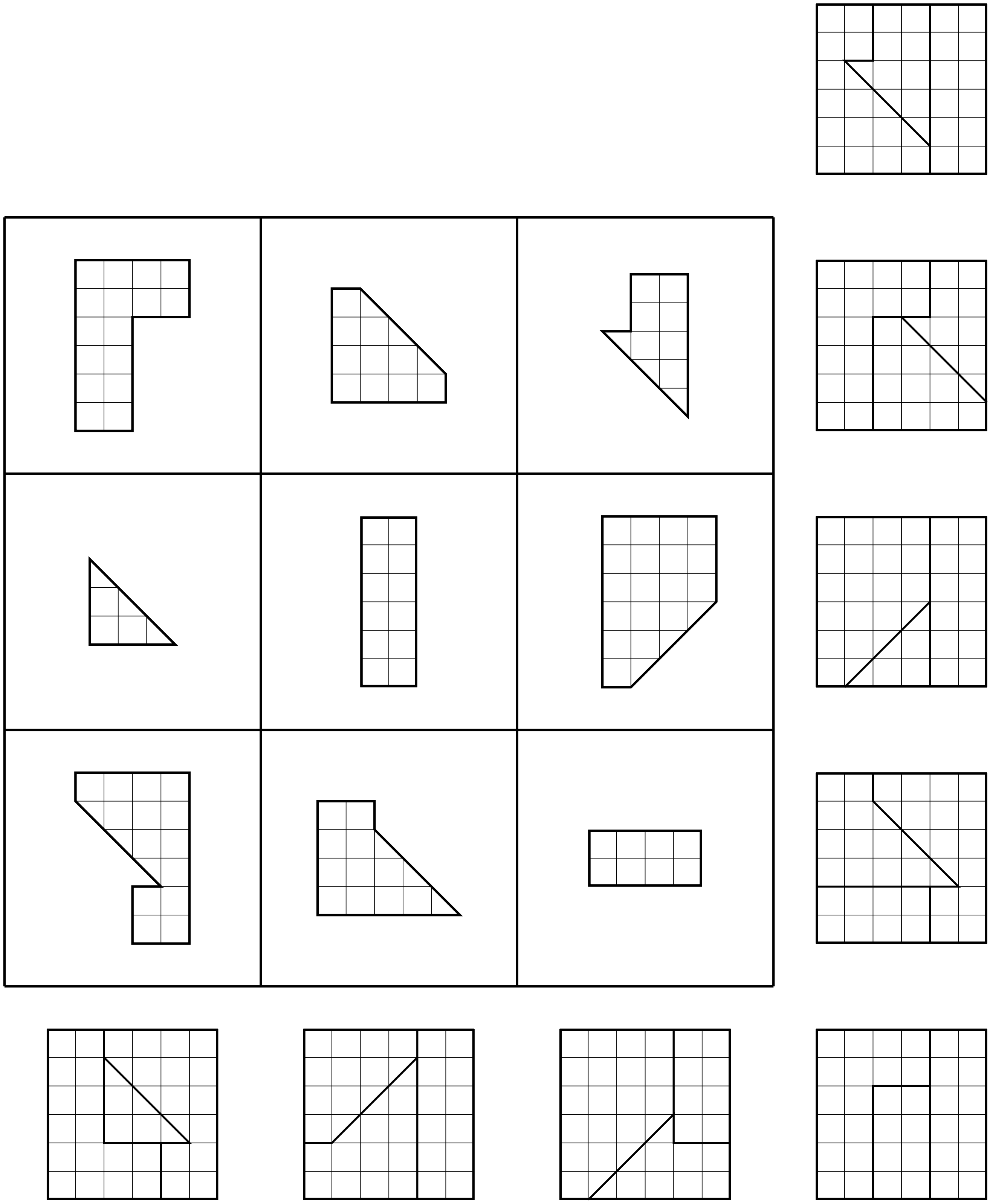
• en ligne



• en colonne



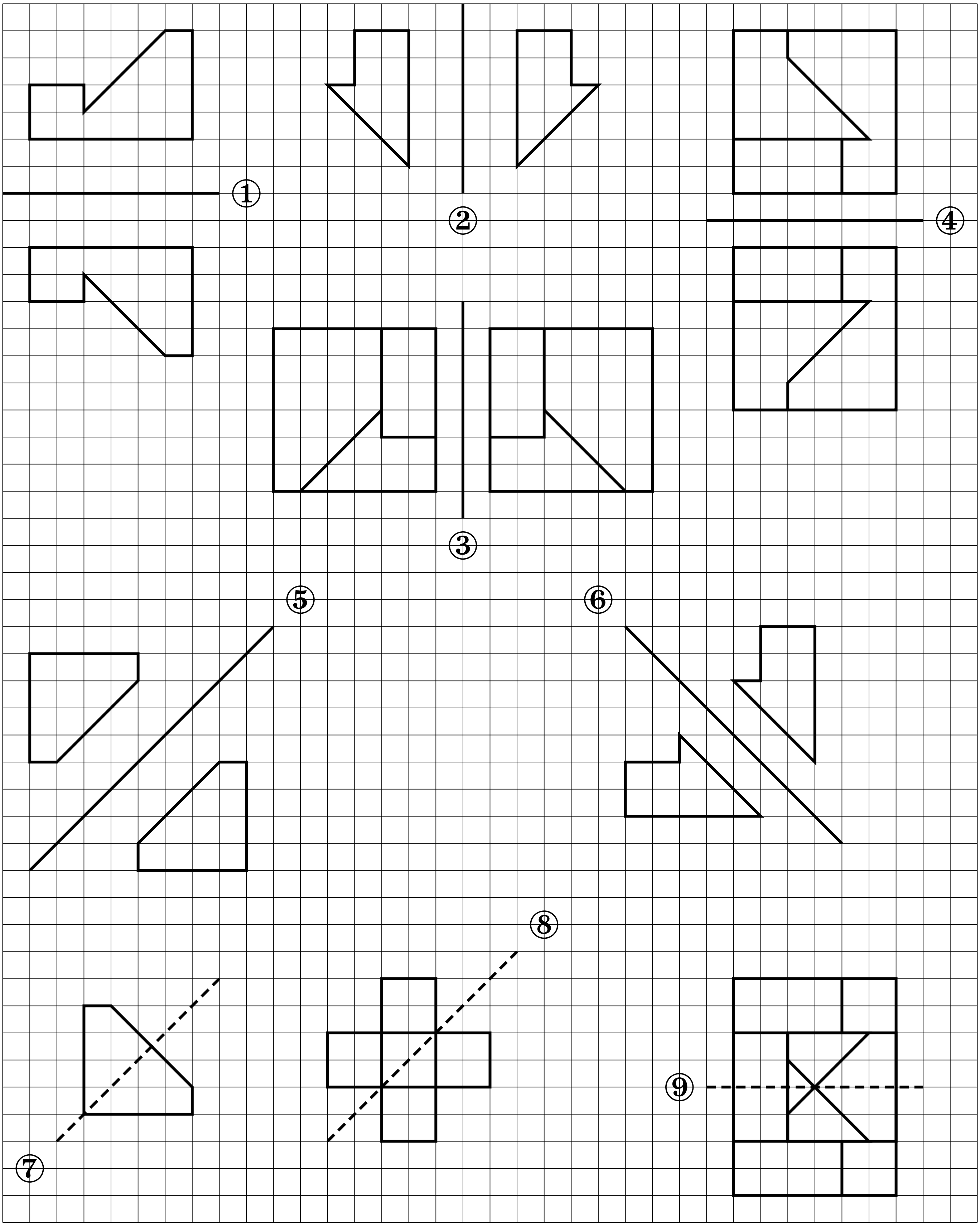
• en diagonale



C0-1 : symétrie axiale (1) (Solution)

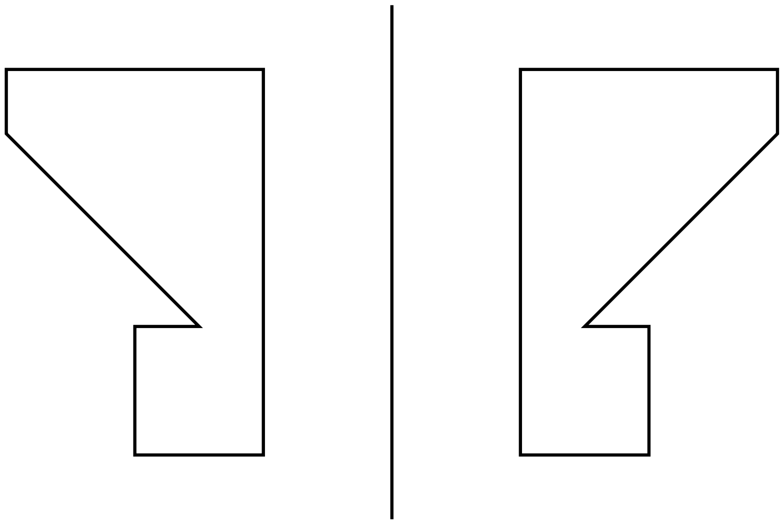
IREM de Lyon

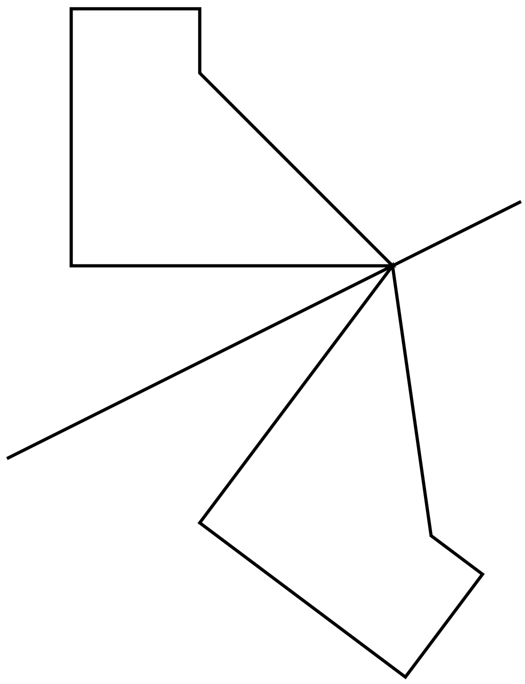
Dessine les figures symétriques par rapport aux axes.

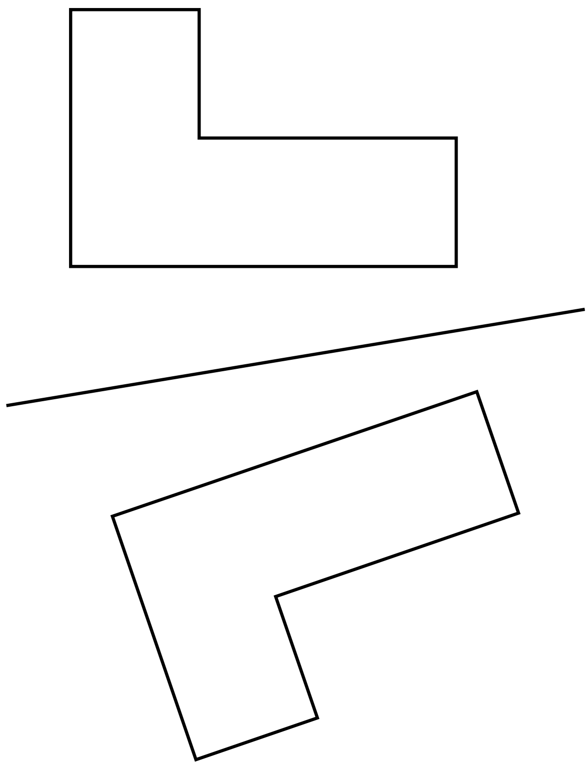


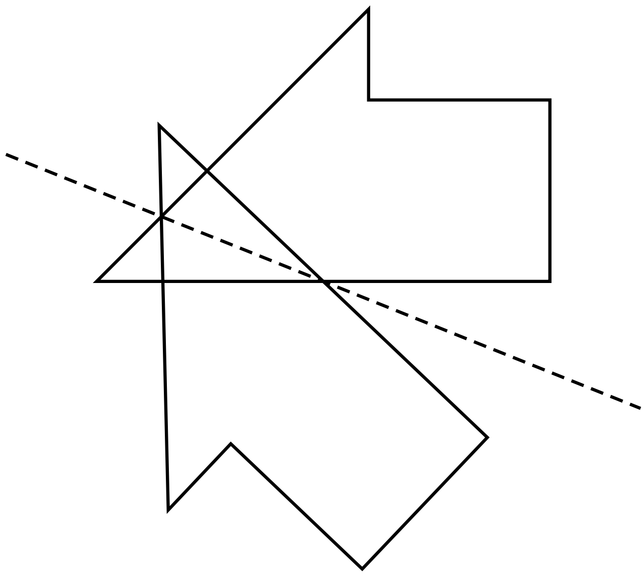
C0-1 : symétrie axiale (2) (Solution)

Dessine les figures symétriques par rapport aux axes.





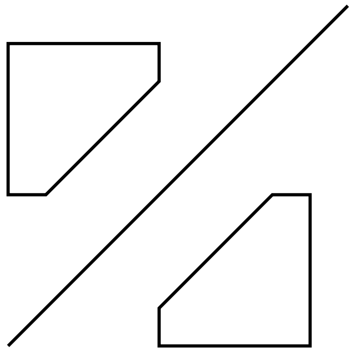




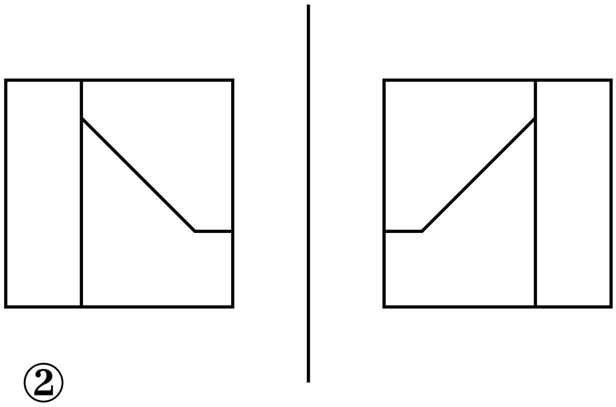
C0-1 : symétrie axiale (3) (Solution)

IREM de Lyon

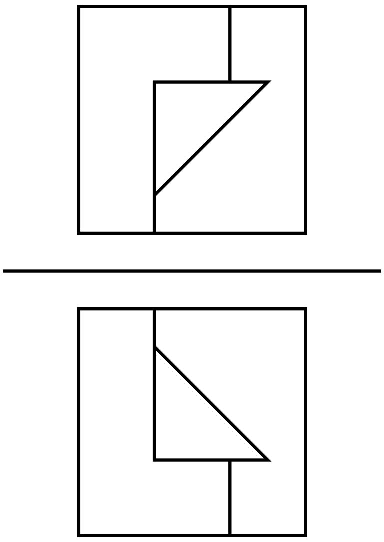
Trace l'axe de symétrie.



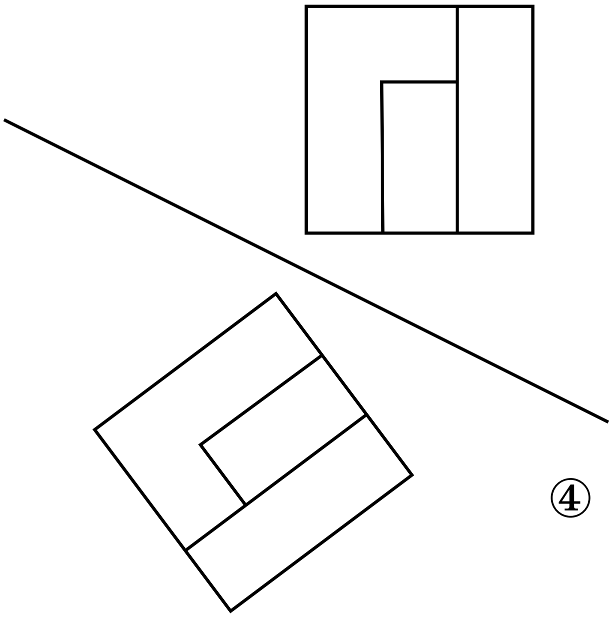
①



②

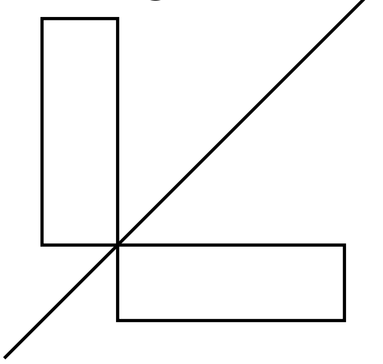


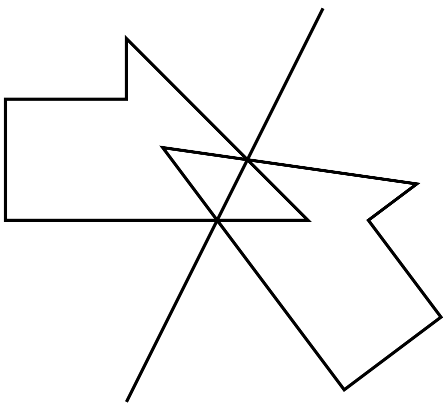
③



④

⑤



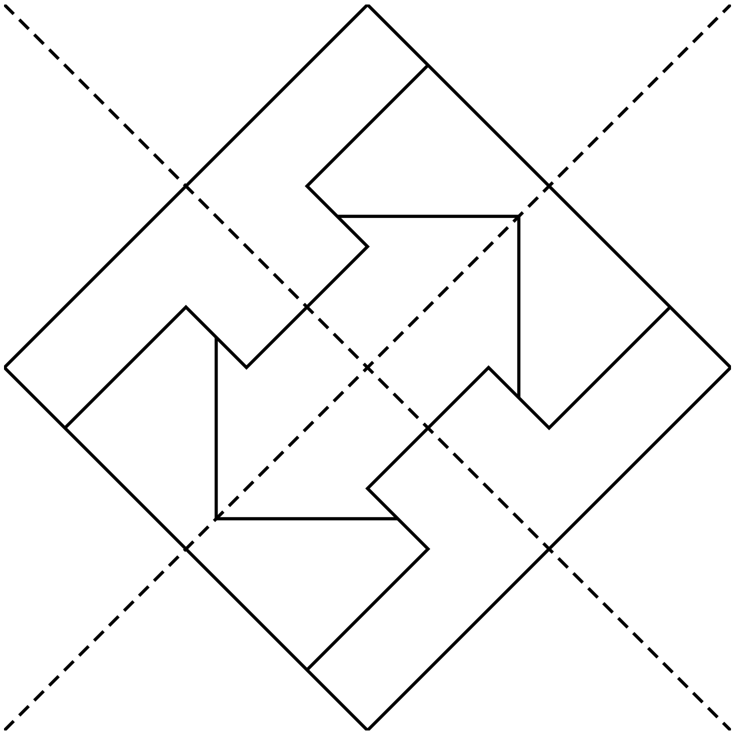


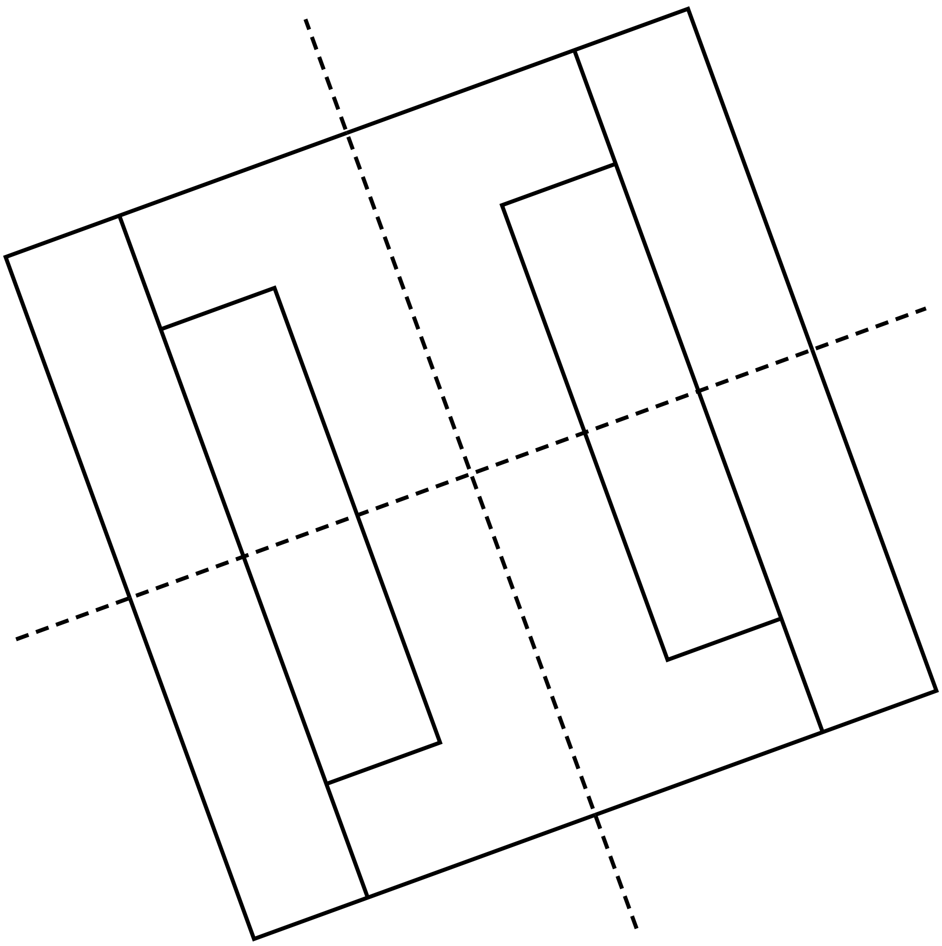
⑥

C0-1 : symétrie axiale (4) (Solution)

IREM de Lyon

Dessine les carrés symétriques par rapport aux deux axes.

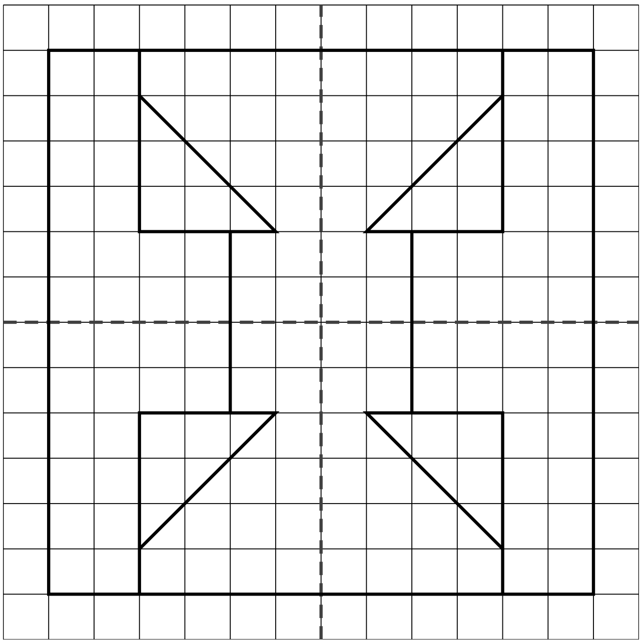


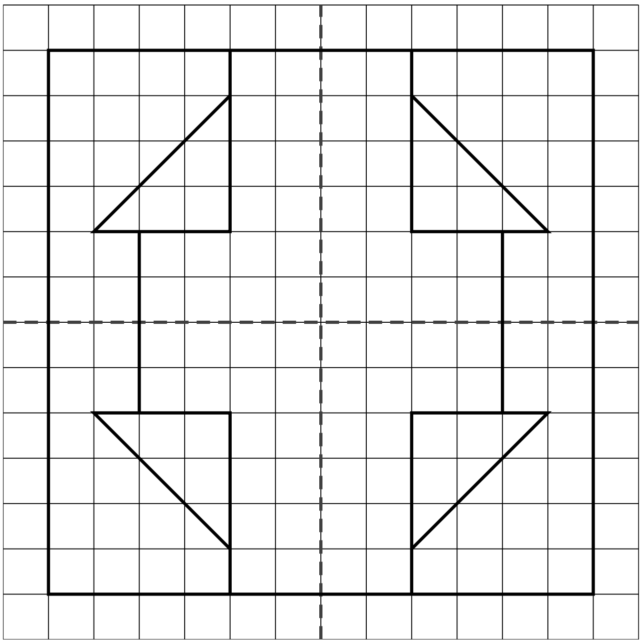


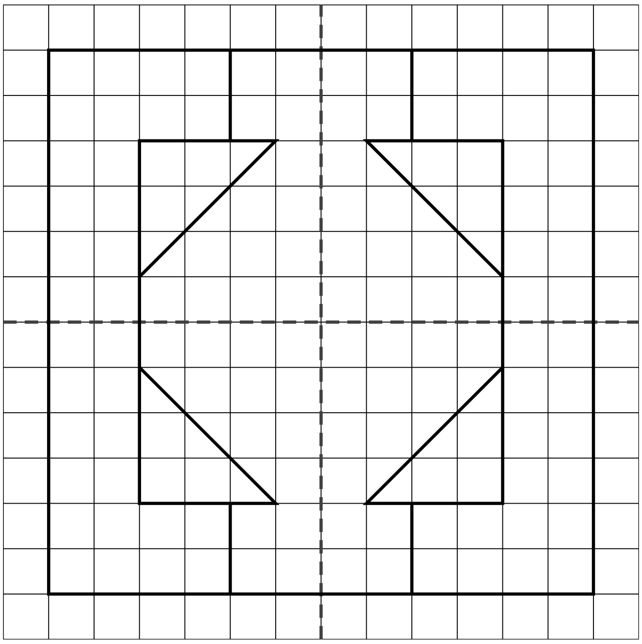
C0-1 : napperons (1) (Solution)

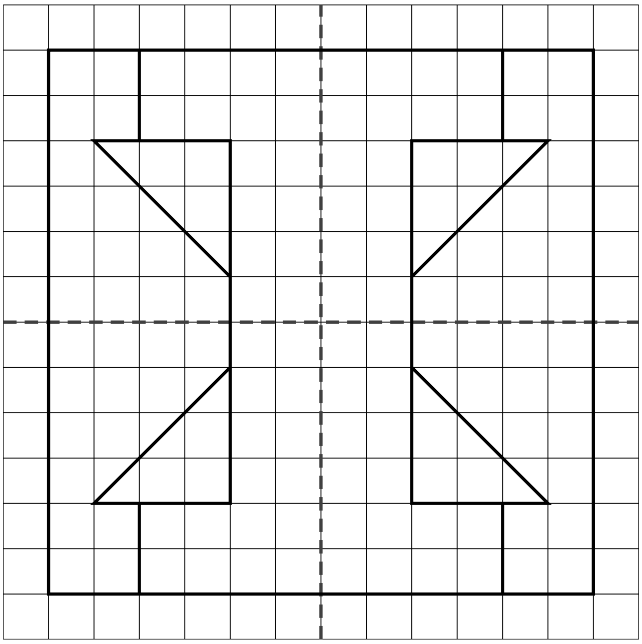
IREM de Lyon

Dessine les carrés symétriques par rapport aux deux axes.





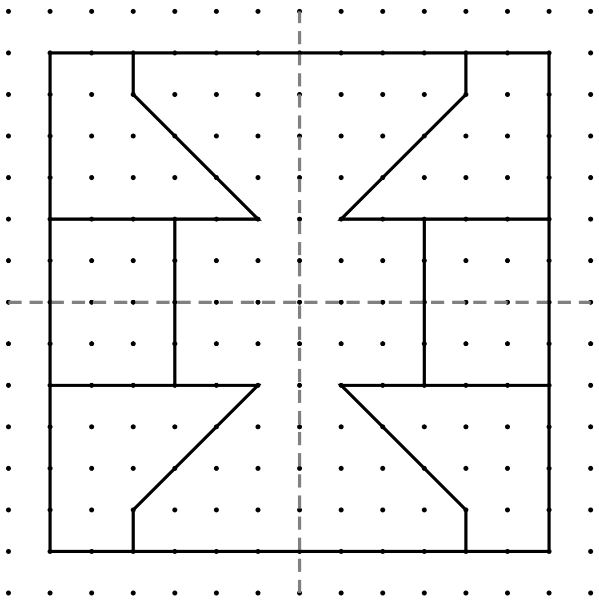


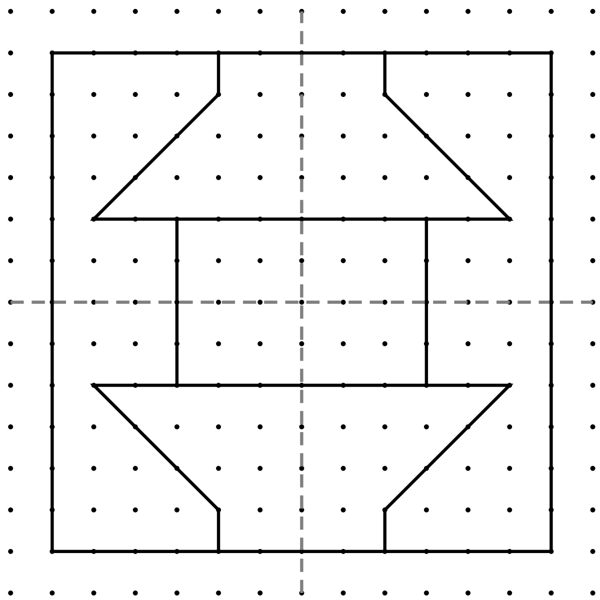


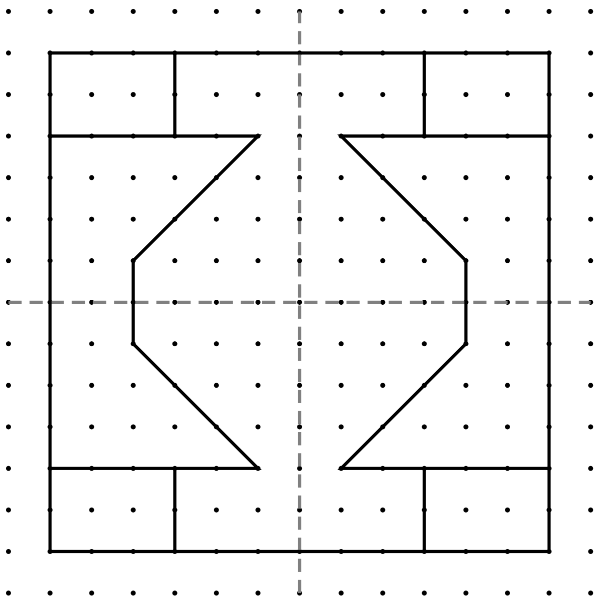
C0-1 : napperons (2) (Solution)

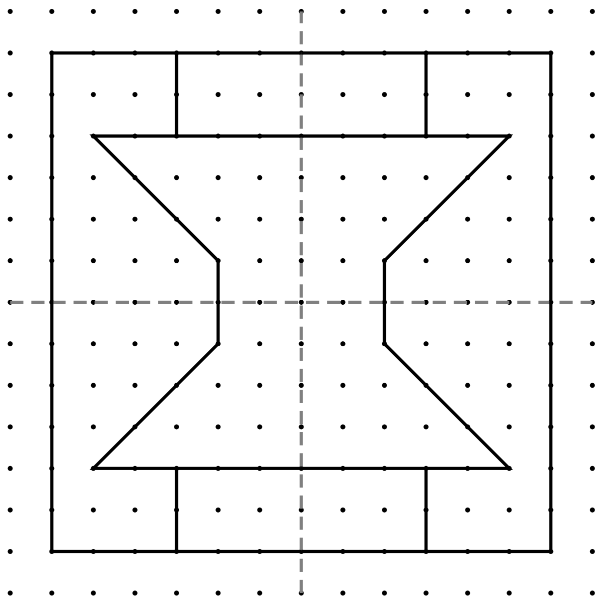
IREM de Lyon

Dessine les carrés symétriques par rapport aux deux axes.



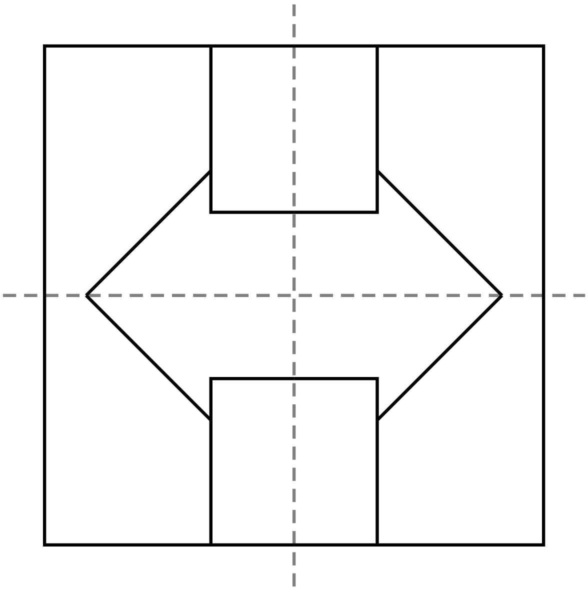


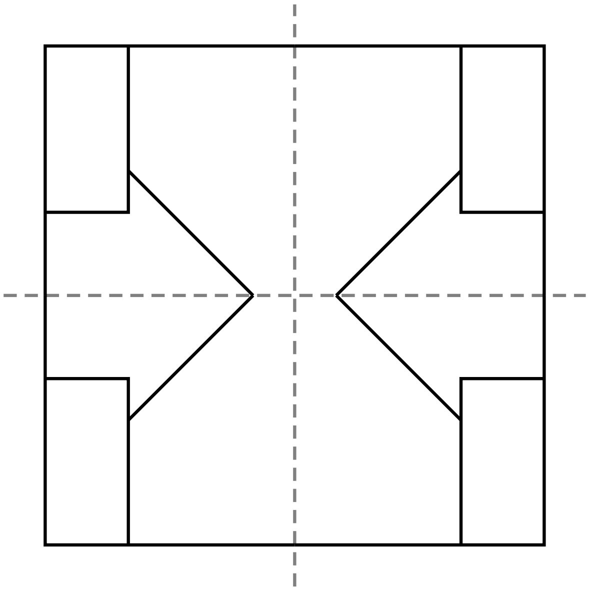


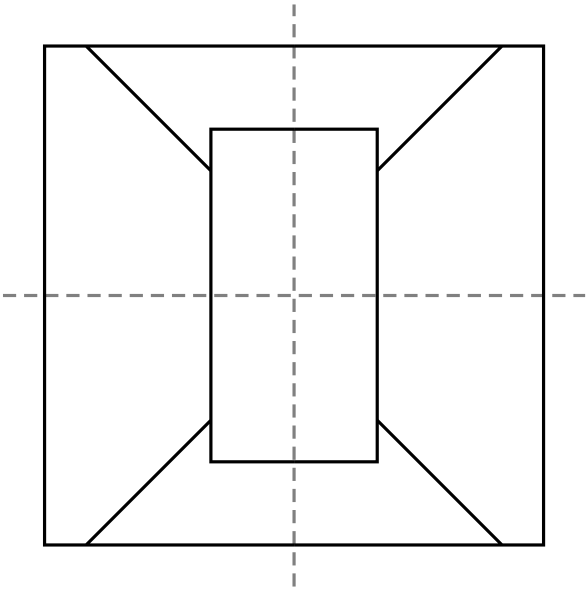


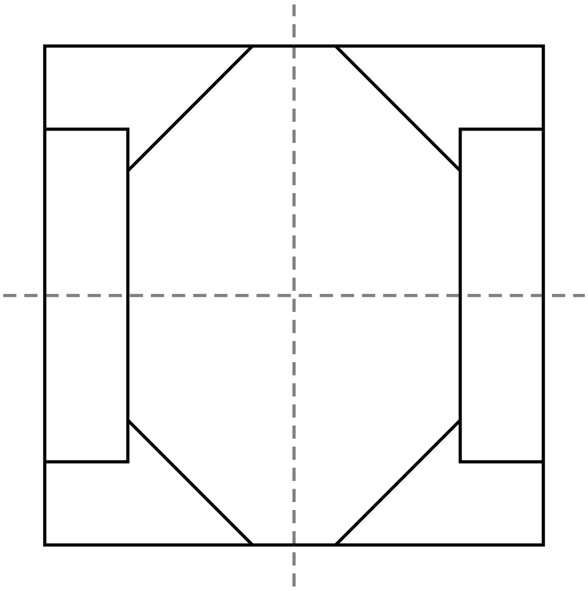
C0-1 : napperons (3) (Solution)

Dessine les carrés symétriques par rapport aux deux axes.





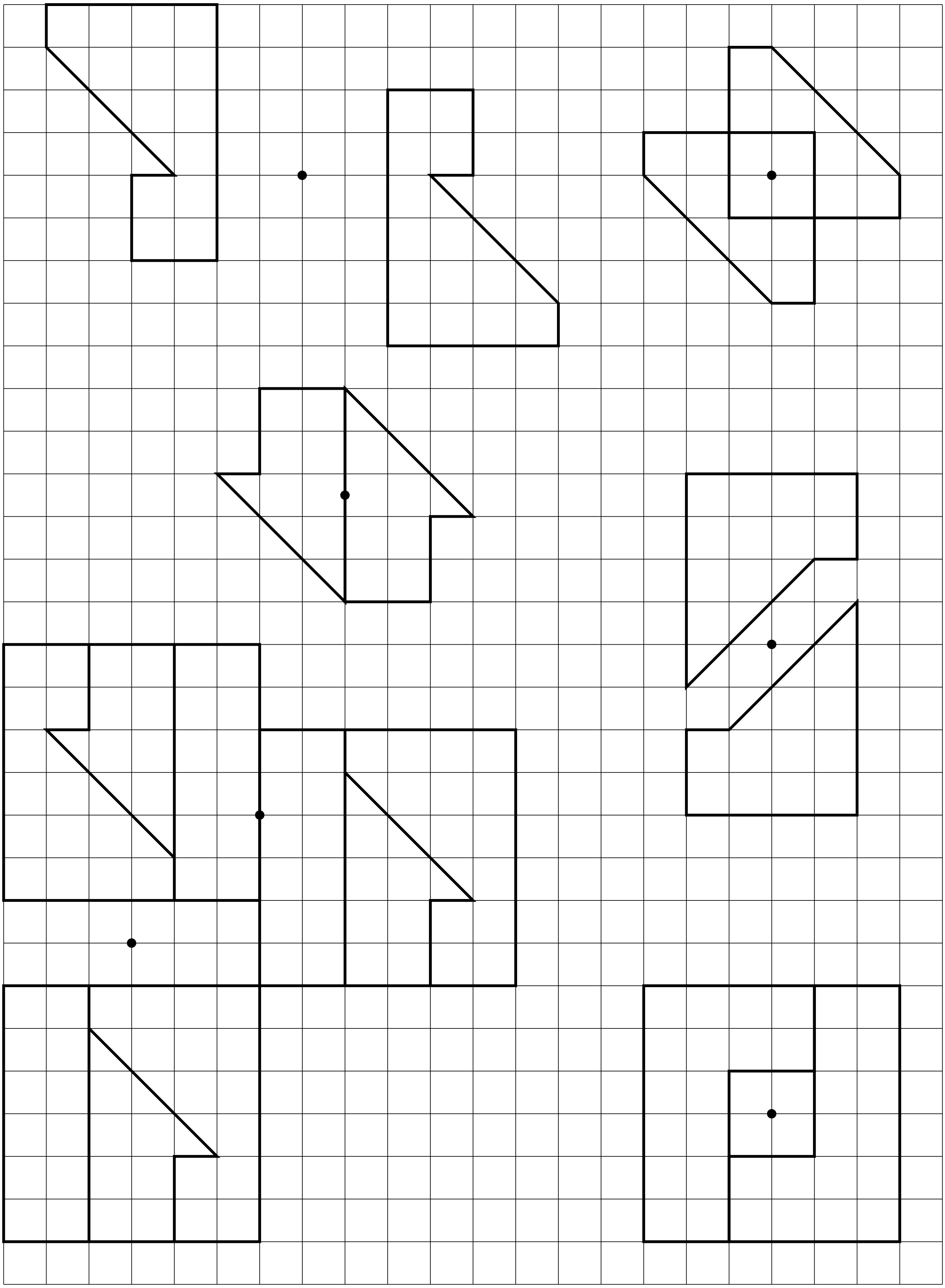




C0-1 : symétrie centrale (1) (Solution)

IREM de Lyon

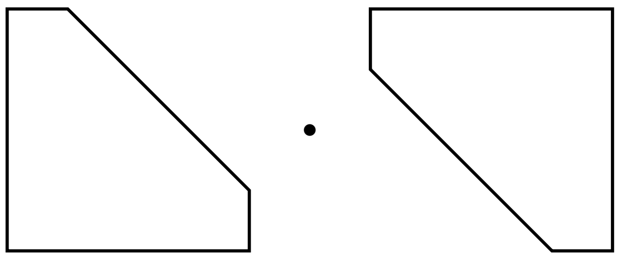
Dessine les figures symétriques par rapport aux centres.

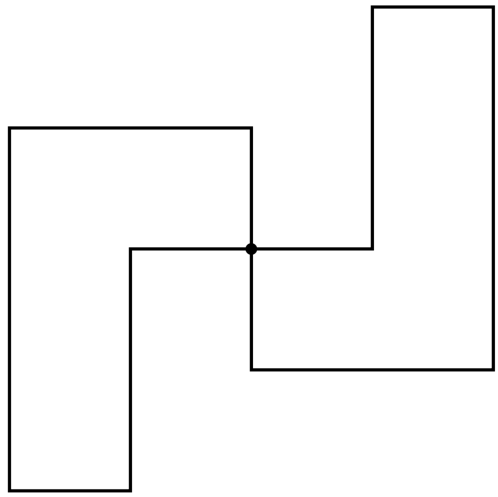


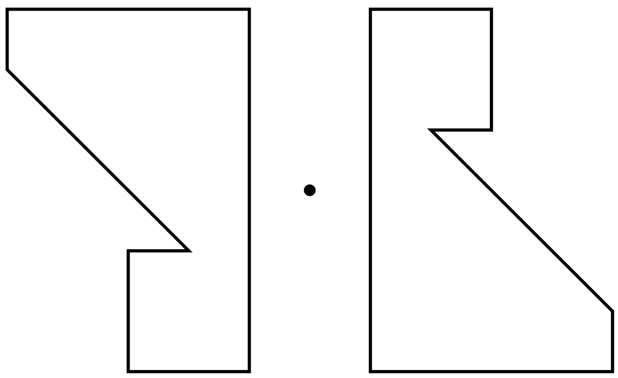
C0-1 : symétrie centrale (2) (Solution)

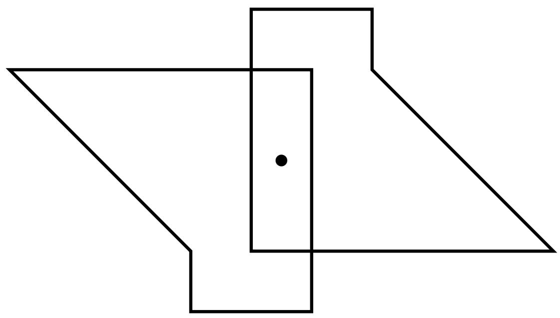
IREM de Lyon

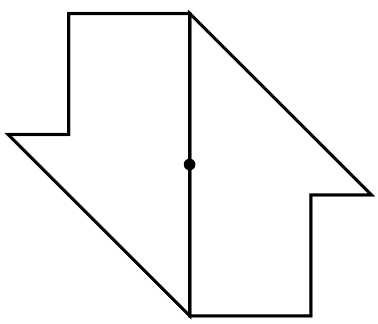
Dessine les figures symétriques par rapport aux centres.

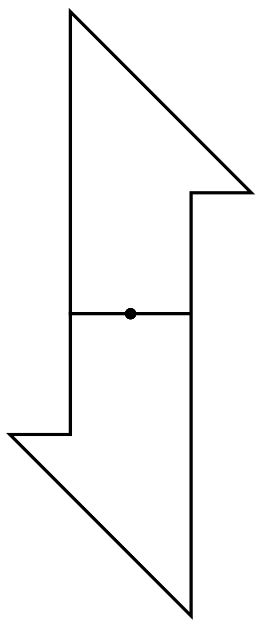








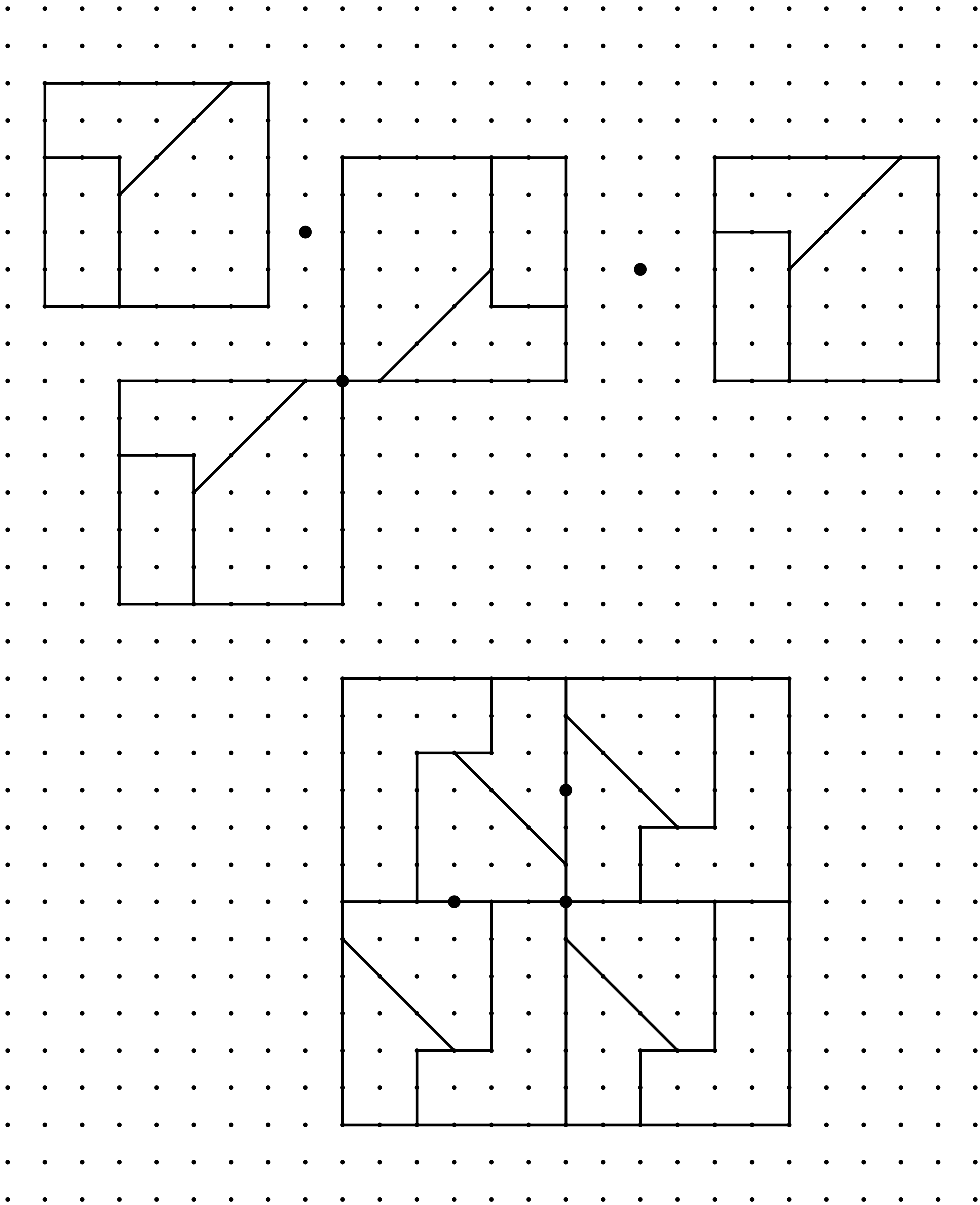




C0-1 : symétrie centrale (3) (Solution)

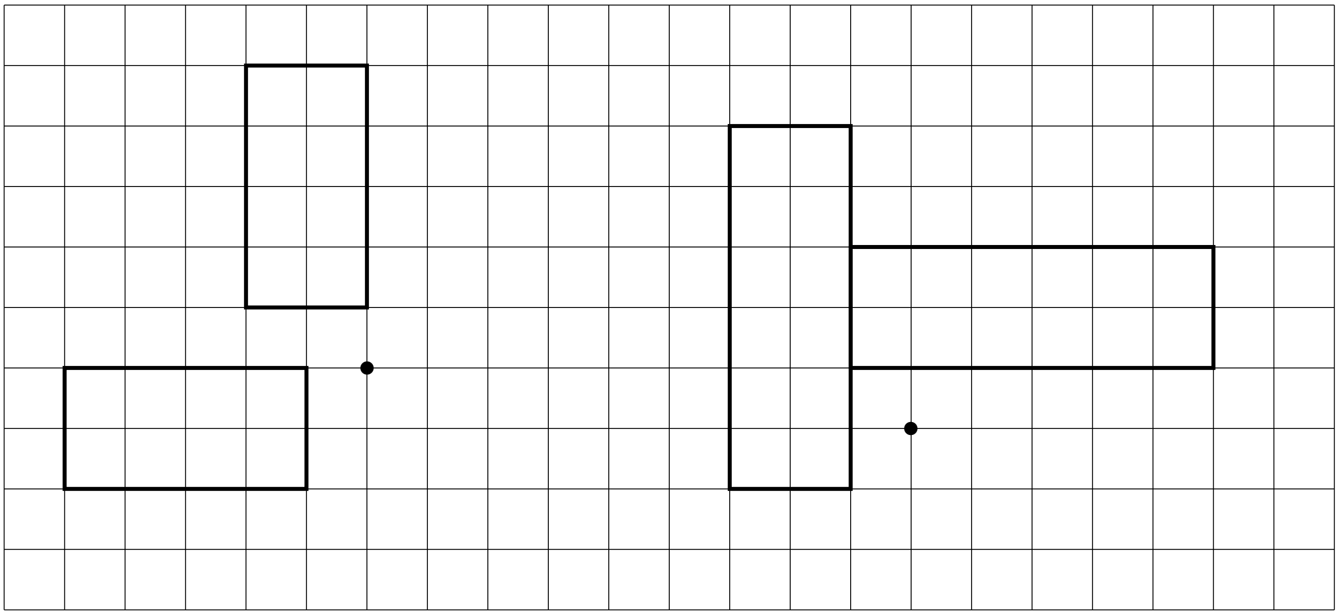
IREM de Lyon

Dessine les figures symétriques par rapport aux centres.

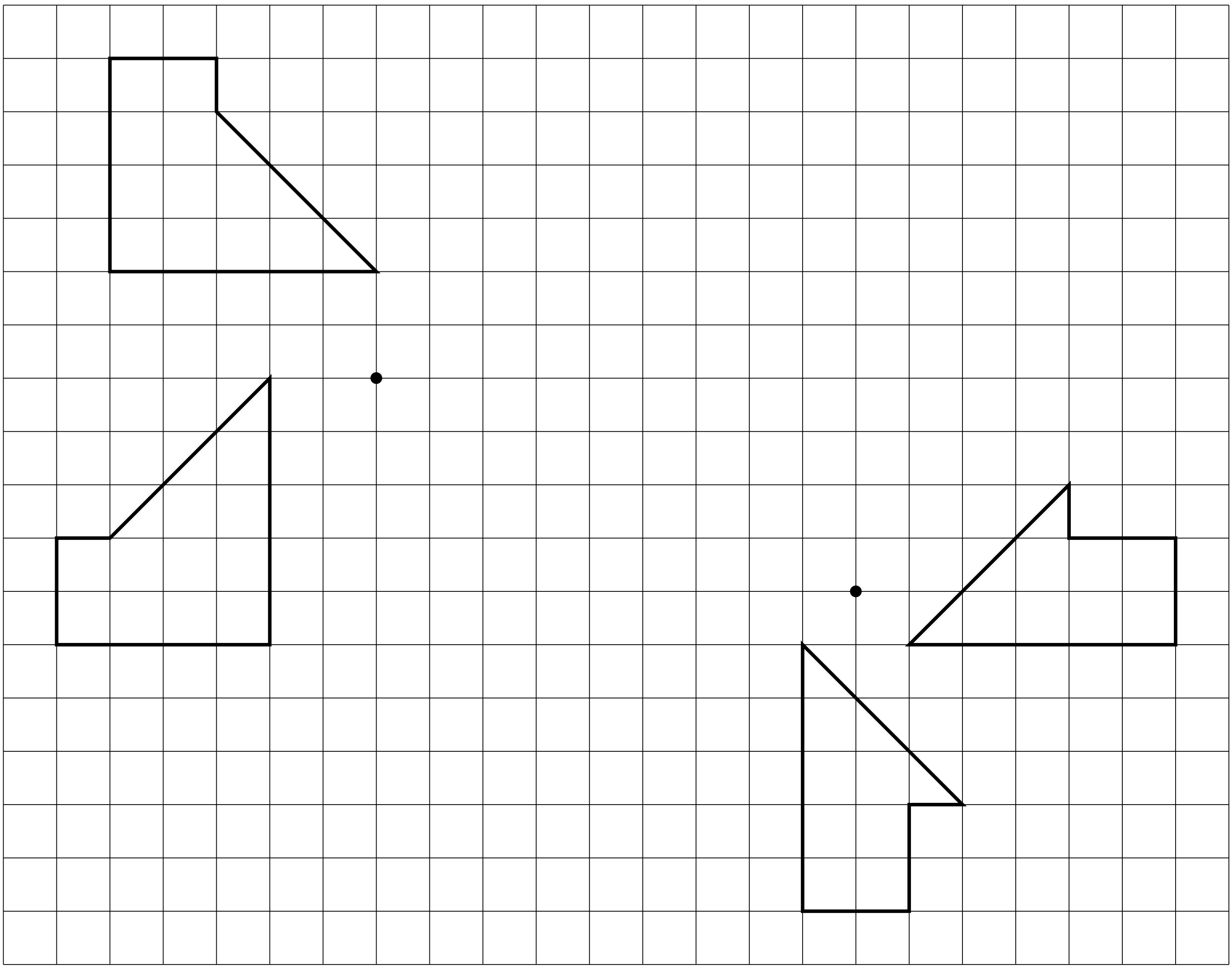


C0-1 : rotation (1) (Solution)

Dessine les figures images dans la rotation d'angle 90° dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.

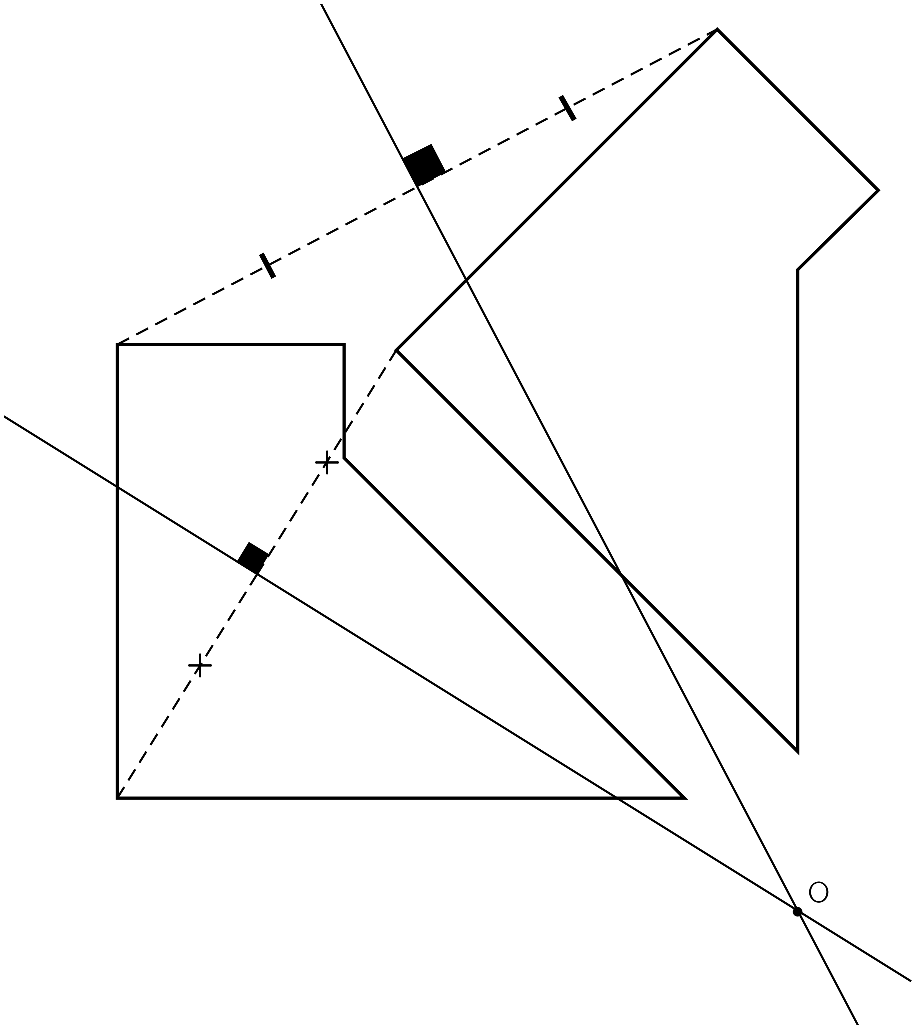


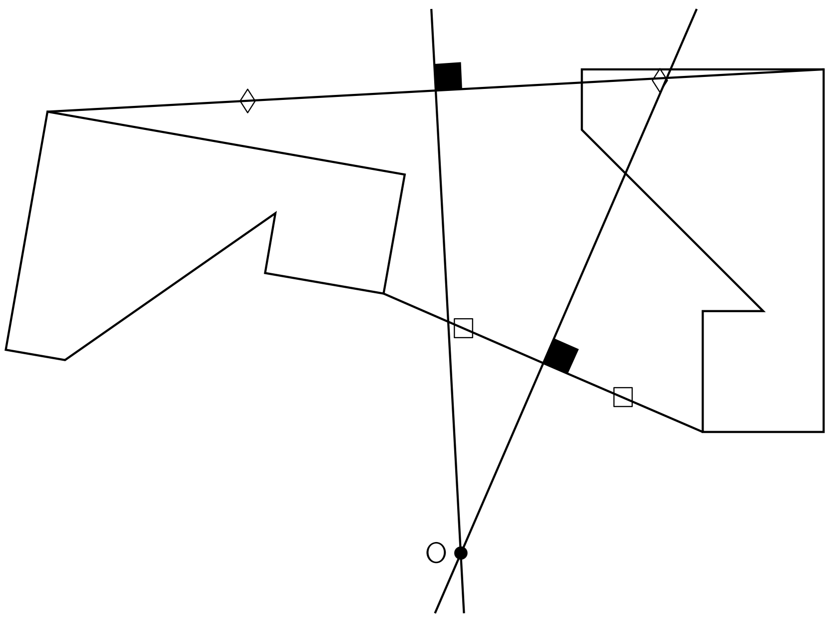
Dessine les figures images dans la rotation d'angle 90° dans le sens des aiguilles d'une montre.



C0-1 : rotation (2) (Solution)

Retrouve le centre O de la rotation transformant une figure en l'autre.

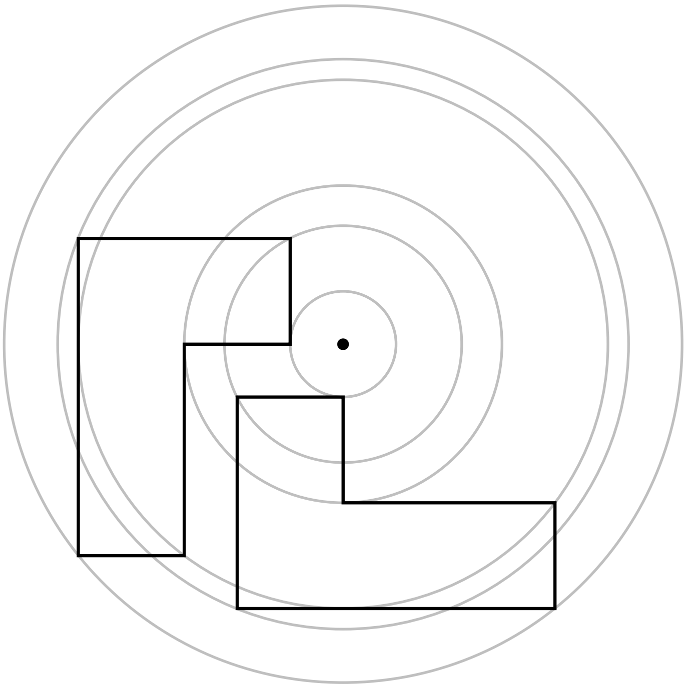




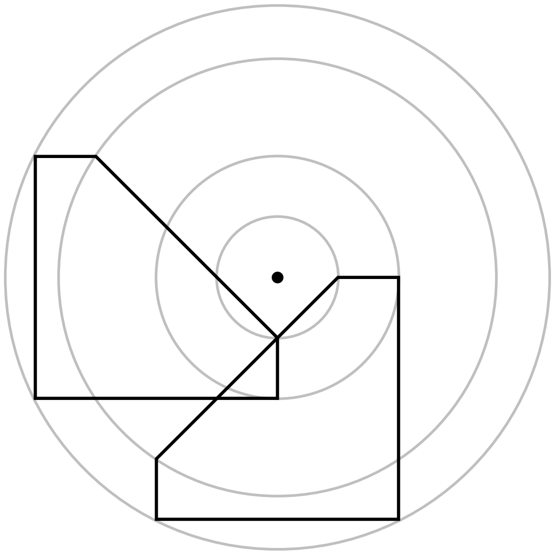
C0-1 : rotation (3) (Solution)

Dessine la figure image dans la rotation. . .

d'angle 90° dans le sens des aiguilles d'une montre ;

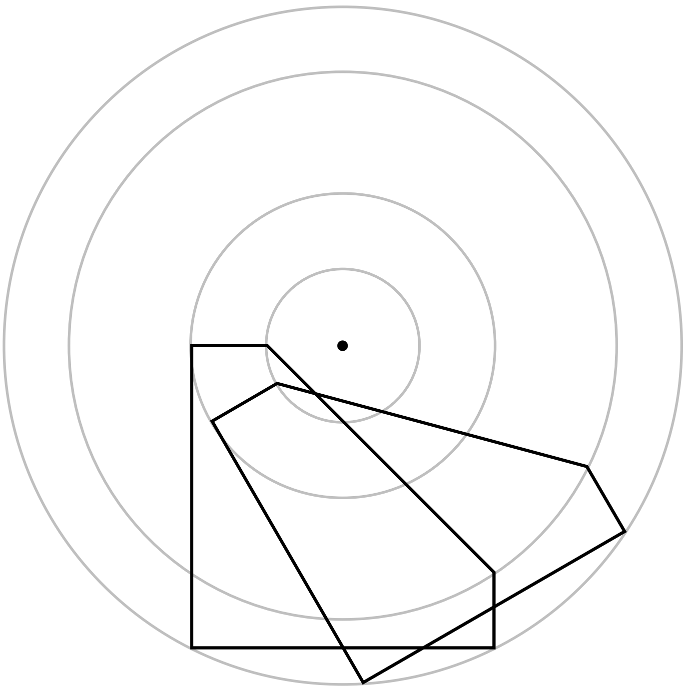


d'angle 90° dans le sens inverse des aiguilles d'une montre ;

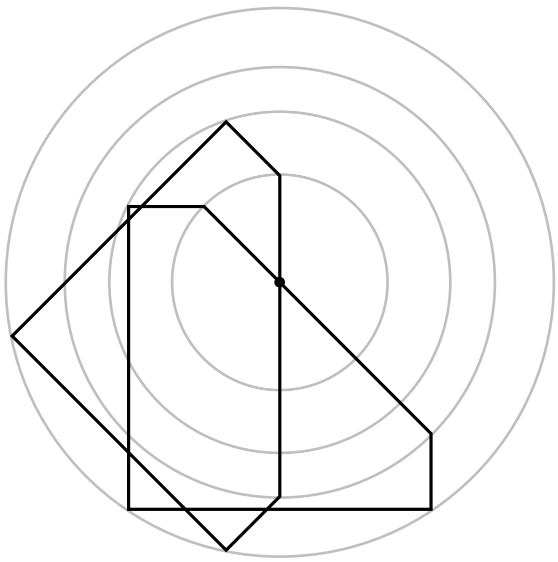


Dessine la figure image dans la rotation. . .

d'angle 30° dans le sens inverse des aiguilles d'une montre ;

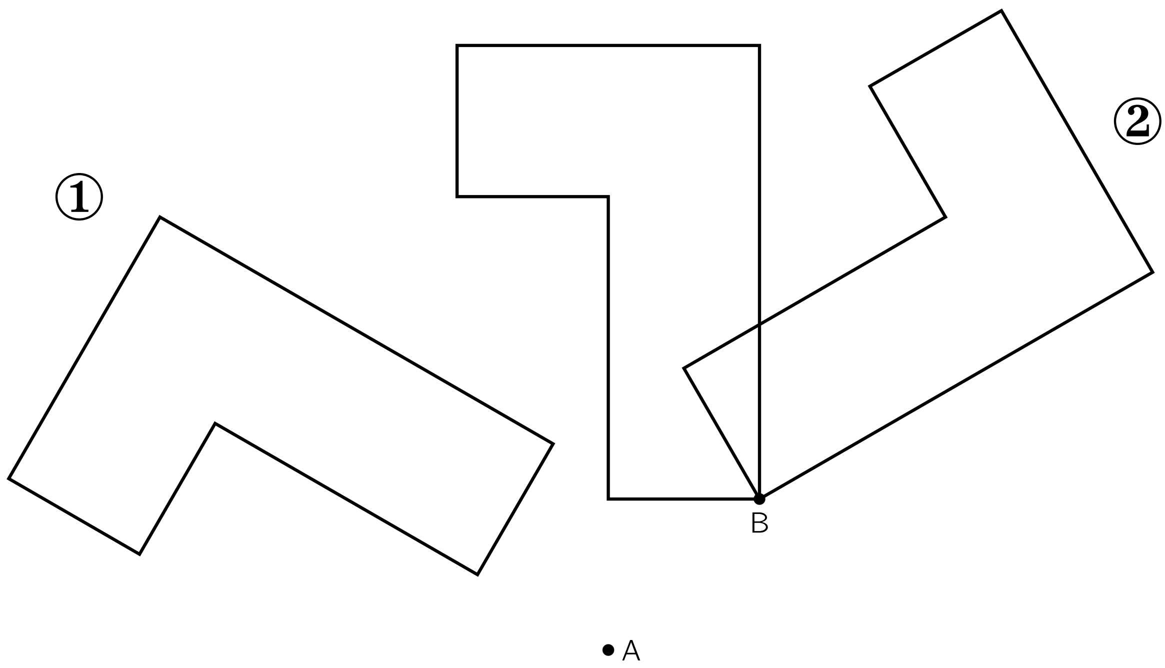


d'angle 45° dans le sens des aiguilles d'une montre.

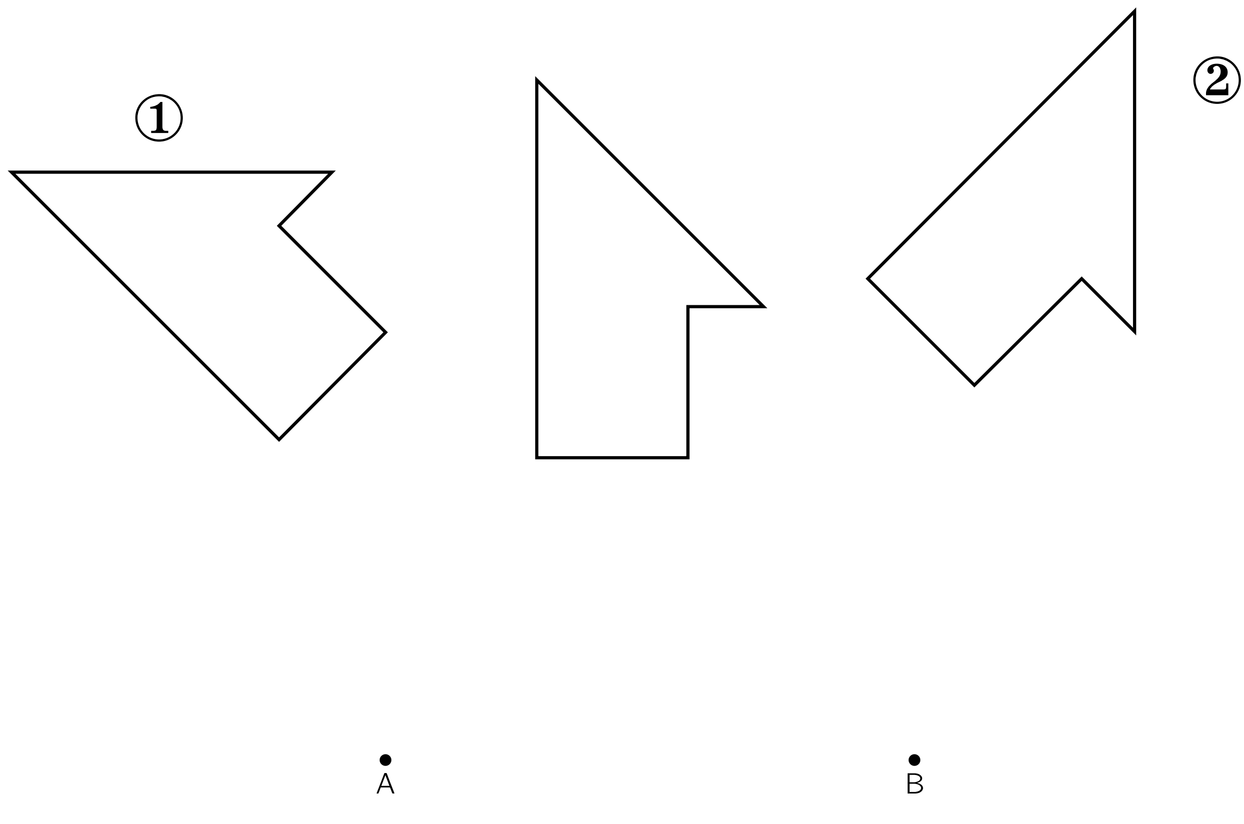


C0-1 : rotation (4) (Solution)

Dessine la figure ① image dans la rotation de centre A et d'angle 60° dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.
Dessine la figure ② image dans la rotation de centre B et d'angle −60° dans le sens des aiguilles d'une montre.



Dessine la figure ① image dans la rotation de centre A et d'angle 45° dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.
Dessine la figure ② image dans la rotation de centre B et d'angle 45° dans le sens des aiguilles d'une montre.



C0-1 : transformations (1) (Solution) — IREM de Lyon

① : rotation de centre F et d'angle 45° dans le sens des aiguilles d'une montre

② : rotation de centre E et d'angle 90° dans le sens inverse des aiguilles d'une montre

③ : symétrie axiale d'axe (DE)

④ : translation de vecteur $\overrightarrow{FB} = \overrightarrow{EA}$ (qui transforme F en B, ou E en A)

⑤ : symétrie centrale de centre D

⑥ : symétrie axiale d'axe (AD) = (AF) = (DF)

C0-1 : transformations (1) (Solution) — IREM de Lyon

① : rotation de centre F et d'angle 45° dans le sens des aiguilles d'une montre

② : rotation de centre E et d'angle 90° dans le sens inverse des aiguilles d'une montre

③ : symétrie axiale d'axe (DE)

④ : translation de vecteur $\overrightarrow{FB} = \overrightarrow{EA}$ (qui transforme F en B, ou E en A)

⑤ : symétrie centrale de centre D

⑥ : symétrie axiale d'axe (AD) = (AF) = (DF)

C0-1 : transformations (2) (Solution) — IREM de Lyon

① : symétrie axiale d'axe (AB) = (AD) = (BD)

② : symétrie centrale de centre A

③ : symétrie axiale d'axe (FG)

④ : rotation de centre A et d'angle 90° dans le sens inverse des aiguilles d'une montre

⑤ : translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$ (qui transforme B en C)

⑥ : rotation de centre A et d'angle 60° dans le sens des aiguilles d'une montre

C0-1 : transformations (2) (Solution) — IREM de Lyon

① : symétrie axiale d'axe (AB) = (AD) = (BD)

② : symétrie centrale de centre A

③ : symétrie axiale d'axe (FG)

④ : rotation de centre A et d'angle 90° dans le sens inverse des aiguilles d'une montre

⑤ : translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$ (qui transforme B en C)

⑥ : rotation de centre A et d'angle 60° dans le sens des aiguilles d'une montre

C0-1 : transformations (3) (Solution)

IREM de Lyon

1. ① $\longrightarrow$ ② : translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$ (qui transforme B en C)
   ② $\longrightarrow$ ③ : rotation de centre C et d'angle 90° dans le sens inverse des aiguilles d'une montre
   ③ $\longrightarrow$ ④ : symétrie axiale d'axe (AB)
   ④ $\longrightarrow$ ⑤ : symétrie centrale de centre E
   ⑤ $\longrightarrow$ ⑥ : symétrie axiale d'axe (AC) = (AF) = (CF)
   ⑥ $\longrightarrow$ ⑦ : translation de vecteur $\overrightarrow{FB}$ (qui transforme F en B)
   ⑦ $\longrightarrow$ ⑧ : rotation de centre B et d'angle 90° dans le sens inverse des aiguilles d'une montre
   ⑧ $\longrightarrow$ ① : symétrie centrale de centre H
2. symétrie axiale d'axe (AD)
3. rotation de centre G et d'angle 90° dans le sens inverse des aiguilles d'une montre

C0-1 : transformations (3) (Solution)

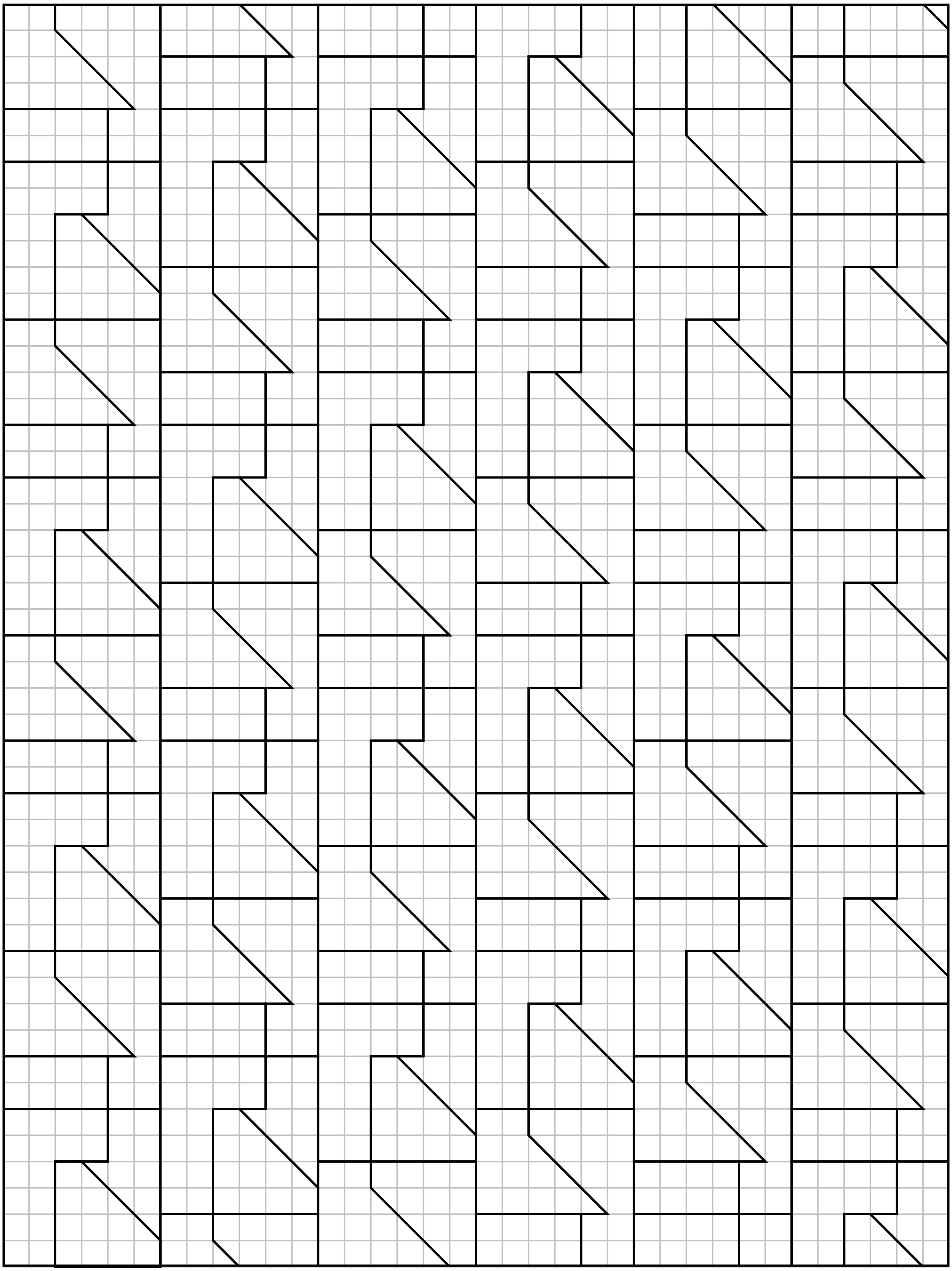
IREM de Lyon

1. ① $\longrightarrow$ ② : translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$ (qui transforme B en C)
   ② $\longrightarrow$ ③ : rotation de centre C et d'angle 90° dans le sens inverse des aiguilles d'une montre
   ③ $\longrightarrow$ ④ : symétrie axiale d'axe (AB)
   ④ $\longrightarrow$ ⑤ : symétrie centrale de centre E
   ⑤ $\longrightarrow$ ⑥ : symétrie axiale d'axe (AC) = (AF) = (CF)
   ⑥ $\longrightarrow$ ⑦ : translation de vecteur $\overrightarrow{FB}$ (qui transforme F en B)
   ⑦ $\longrightarrow$ ⑧ : rotation de centre B et d'angle 90° dans le sens inverse des aiguilles d'une montre
   ⑧ $\longrightarrow$ ① : symétrie centrale de centre H
2. symétrie axiale d'axe (AD)
3. rotation de centre G et d'angle 90° dans le sens inverse des aiguilles d'une montre

C0-1 : pavages (1) (Solution)

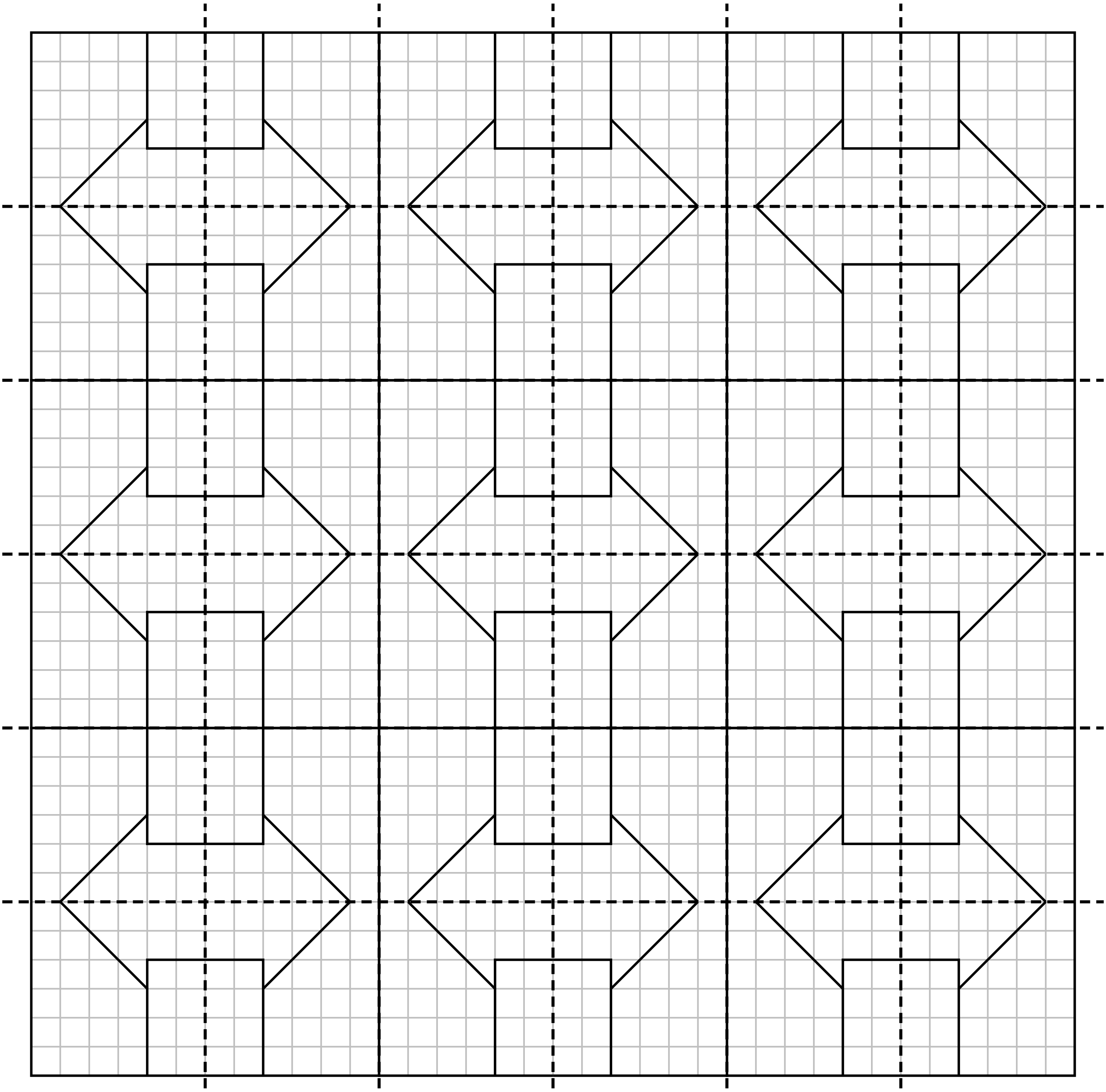
IREM de Lyon

Complète le pavage obtenu par translations. Colorie-le ensuite.



C0-1 : pavages (2) (Solution)

Complète le pavage obtenu par symétries axiales. Colorie-le ensuite.



Note. Le coloriage de cette page et celui de la page précédente peuvent décorer un mur de classe, soit bien séparés les uns des autres, soit juxtaposés, dans un esprit de travail collaboratif. Éventuellement, les élèves choisiront des couleurs communes aux pièces.

C0-1 : algèbre (Solution)

IREM de Lyon

1. Périmètres des pièces en fonction de a et de b :

A	$20\,a$	**D**	$6\,a+3\,b$	**G**	$16\,a+3\,b$
B	$10\,a+3\,b$	**E**	$16\,a$	**H**	$12\,a+3\,b$
C	$10\,a+3\,b$	**F**	$14\,a+3\,b$	**I**	$12\,a$

2. Les deux pièces **B** et **C** ont le même périmètre.

3. $b=\sqrt{2}\,a$

4. Périmètres des pièces :

A	20	**D**	$6+3\sqrt{2}$	**G**	$16+3\sqrt{2}$
B	$10+3\sqrt{2}$	**E**	16	**H**	$12+3\sqrt{2}$
C	$10+3\sqrt{2}$	**F**	$14+3\sqrt{2}$	**I**	12

C0-1 : algèbre (Solution)

IREM de Lyon

1. Périmètres des pièces en fonction de a et de b :

A	$20\,a$	**D**	$6\,a+3\,b$	**G**	$16\,a+3\,b$
B	$10\,a+3\,b$	**E**	$16\,a$	**H**	$12\,a+3\,b$
C	$10\,a+3\,b$	**F**	$14\,a+3\,b$	**I**	$12\,a$

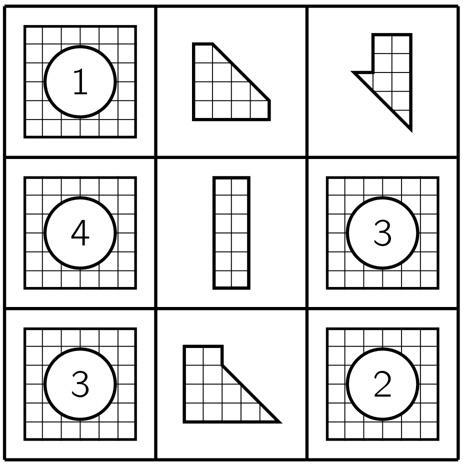
2. Les deux pièces **B** et **C** ont le même périmètre.

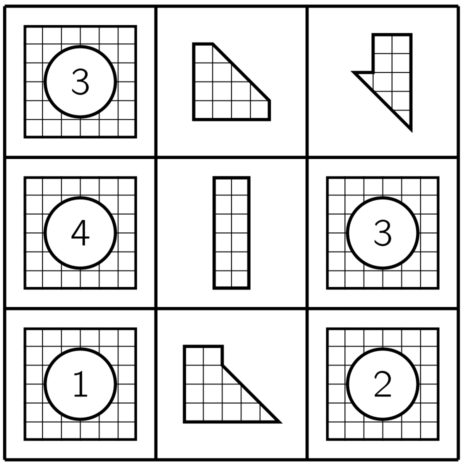
3. $b=\sqrt{2}\,a$

4. Périmètres des pièces :

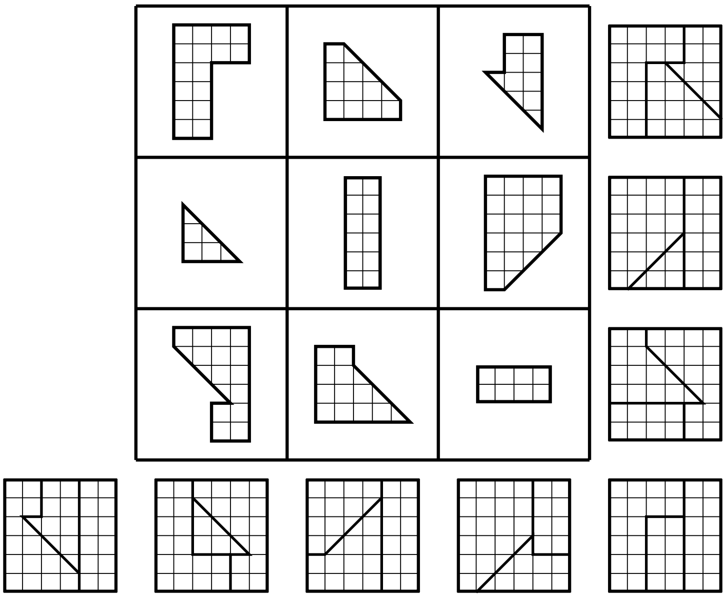
A	20	**D**	$6+3\sqrt{2}$	**G**	$16+3\sqrt{2}$
B	$10+3\sqrt{2}$	**E**	16	**H**	$12+3\sqrt{2}$
C	$10+3\sqrt{2}$	**F**	$14+3\sqrt{2}$	**I**	12

On peut par exemple compléter le carré géomagique en procédant dans l'ordre suivant :





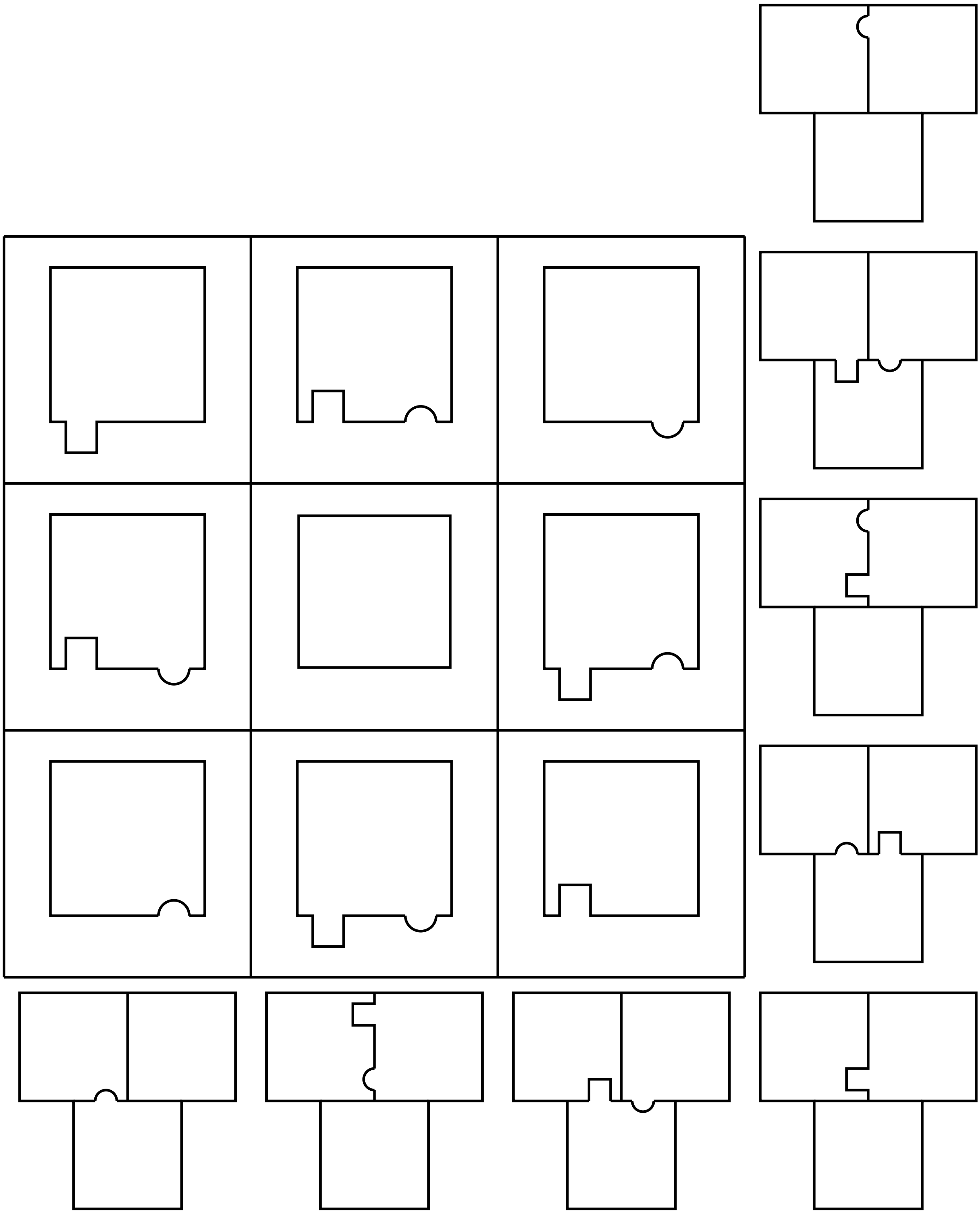
Cela donne la solution unique suivante :



Pour aller plus loin. . . On peut compléter l'activité en proposant le carré magique ci-dessous à gauche, version numérique du carré magique géomagique. En effet, les nombres du carré magique comptent les demi-carrés de chacune des pièces du carrégéomagique. La solution est donnée ci-dessous à droite ; la constante magique est égale à 72.

	23	17
	24	
	25	

32	23	17
9	24	39
31	25	16



C0-2 : construction (Solution)

IREM de Lyon

La solution est donnée en page 48.

C0-2 : aire et périmètre (Solution)

IREM de Lyon

Pièce	Aire	Périmètre
P_1	$24-\dfrac{\pi}{8}\approx 23{,}6$	$21+\dfrac{\pi}{2}\approx 22{,}6$
P_2	24	22
P_3	$24+\dfrac{\pi}{8}\approx 24{,}4$	$21+\dfrac{\pi}{2}\approx 22{,}6$
P_4	$25-\dfrac{\pi}{8}\approx 24{,}6$	$19+\dfrac{\pi}{2}\approx 20{,}6$
P_5	25	20
P_6	$25+\dfrac{\pi}{8}\approx 25{,}4$	$19+\dfrac{\pi}{2}\approx 20{,}6$
P_7	$26-\dfrac{\pi}{8}\approx 25{,}6$	$21+\dfrac{\pi}{2}\approx 22{,}6$
P_8	26	22
P_9	$26+\dfrac{\pi}{8}\approx 26{,}4$	$21+\dfrac{\pi}{2}\approx 22{,}6$

Aire :

$$a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5 < a_6 < a_7 < a_8 < a_9$$

Périmètre :

$$p_5 < p_4 = p_6 < p_2 = p_8 < p_1 = p_3 = p_7 = p_9$$

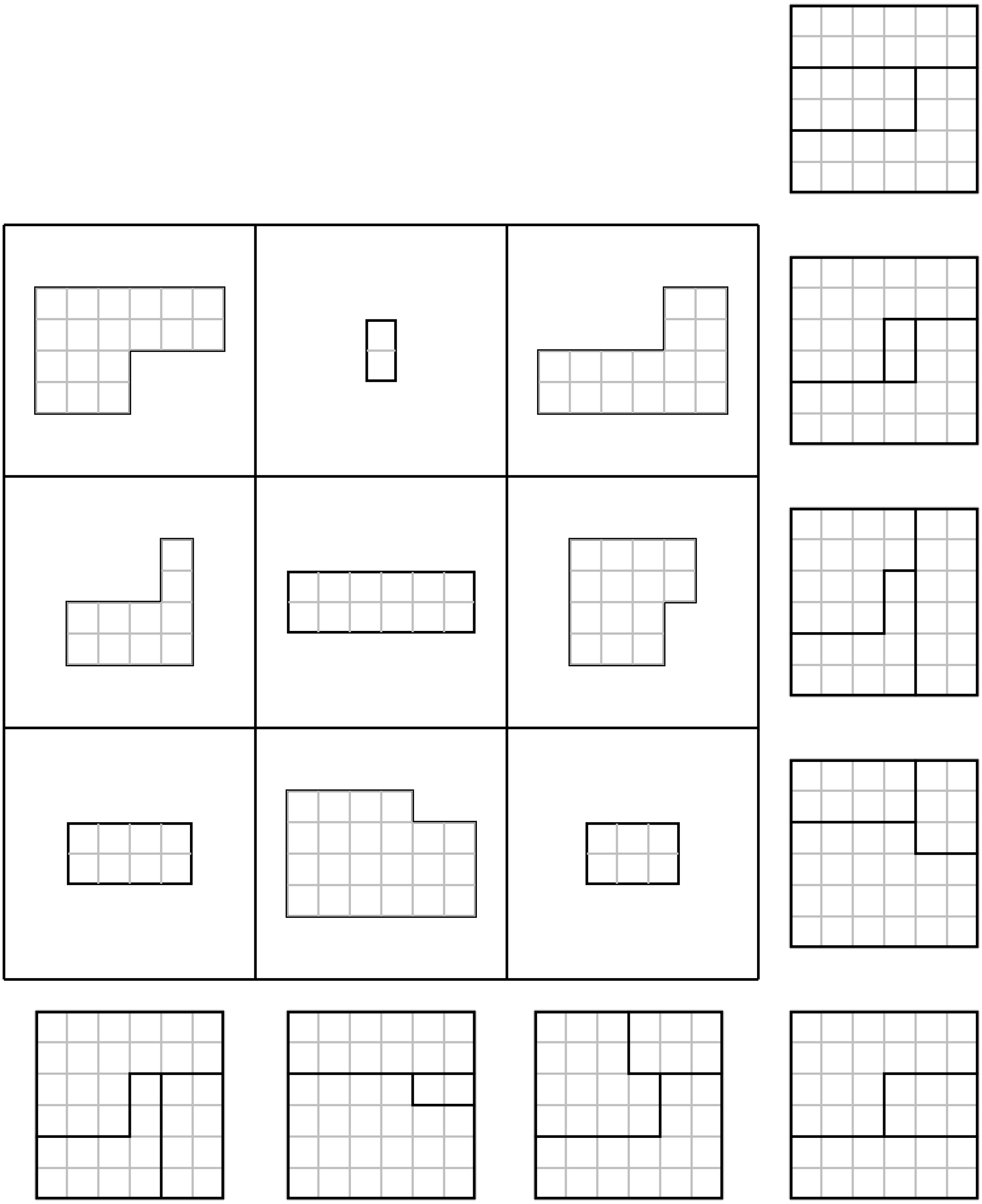
Pour les comparaisons, deux pistes sont possibles.

- Une piste géométrique

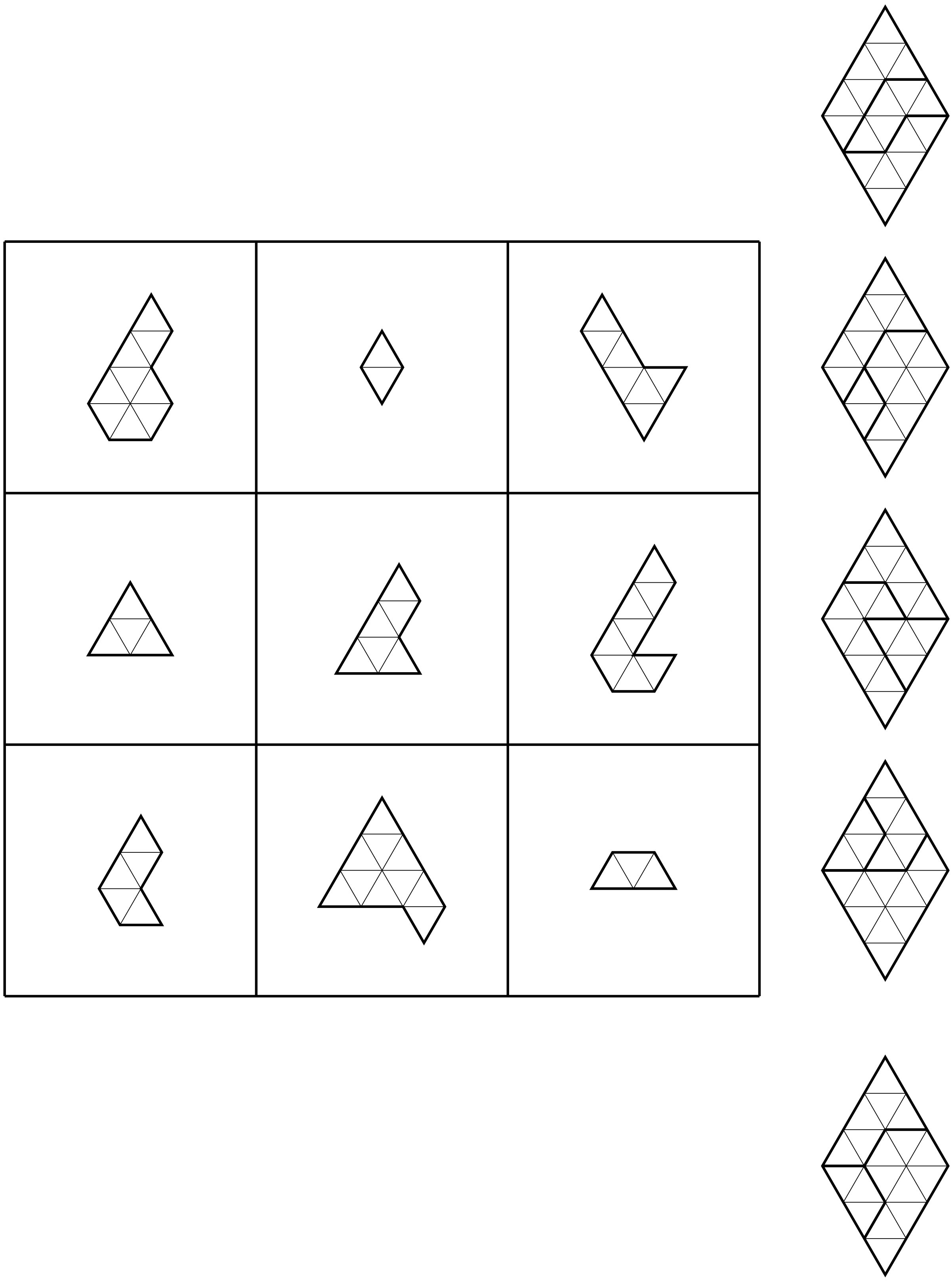
  Il est (très) intéressant de faire obtenir des résultats du type « le carré dedans et le carré dehors ont la même longueur, c'est pareil pour les ronds, donc les pièces 1, 3, 7 et 9 ont le même périmètre » (Charles, élève en Sixième). L'argument de cet élève n'est certes pas mathématiquement rigoureux mais celui-ci a très bien compris la notion de périmètre !

  Cette démarche est intéressante car elle donne du *sens* à la notion de périmètre et d'aire et ne se base pas sur des résultats numériques seuls.

- Une piste calculatoire
  - L'élève utilise les valeurs approchés (un arrondi au dixième suffit).
  - L'élève utilise les valeurs exactes.
    Pour comparer deux nombres, l'élève étudie le signe de leur différence.
    Par exemple, la différence des aires des pièces P_3 et P_4 vaut $1-\dfrac{\pi}{4}$, qui est positive, π étant inférieur à 4. Donc l'aire de la pièce P_4 est supérieure à l'aire de la pièce P_3 .



Carré géomagique C8 (Solution)



C8 : périmètre, aire et Saute-grenouille (1) (Solution)

IREM de Lyon

Pièce	A	B	C	D	E	F	G	H	I
Périmètre	9	4	9	6	8	10	7	10	5
Aire	9	2	7	4	6	8	5	10	3

1 ♡ Si le périmètre de **G** est égal à 7 alors le périmètre de **A** est égal à 9.

2 ♡ Si le périmètre de **I** est égal à 50 alors le périmètre de **H** est égal à 100.

3 ♡ Si le périmètre de **E** est égal à 40 alors le périmètre de **H** est égal à 50.

1 ♣ Si le périmètre de **B** est égal à 12 alors le périmètre de **D** est égal à 18.

2 ♣ Si le périmètre de **E** est égal à 12 alors le périmètre de **F** est égal à 15.

3 ♣ Si le périmètre de **B** est égal à 8 alors le périmètre de **I** est égal à 10.

4 ♣ Si le périmètre de **D** est égal à 12 alors le périmètre de **B** est égal à 8.

1 ♢ Si le périmètre de **C** est égal à 27 alors le périmètre de **E** est égal à 24.

2 ♢ Si la somme des périmètres de **F** et de **H** est égale à 80 alors le périmètre de **E** est égal à 32.

3 ♢ Si la somme des périmètres de **A** et de **G** est égale à 128 alors le périmètre de **E** est égal à 64.

4 ♢ Si l'aire de **B** est égale à 16 alors l'aire de **C** est égale à 56.

5 ♢ Si l'aire de **D** est égale à 36 alors l'aire de **H** est égale à 90.

6 ♢ Si l'aire de **E** est égale à 12 alors l'aire de **F** est égale à 16.

7 ♢ Si l'aire de **B** est égale à 4 alors l'aire de **C** est égale à 14.

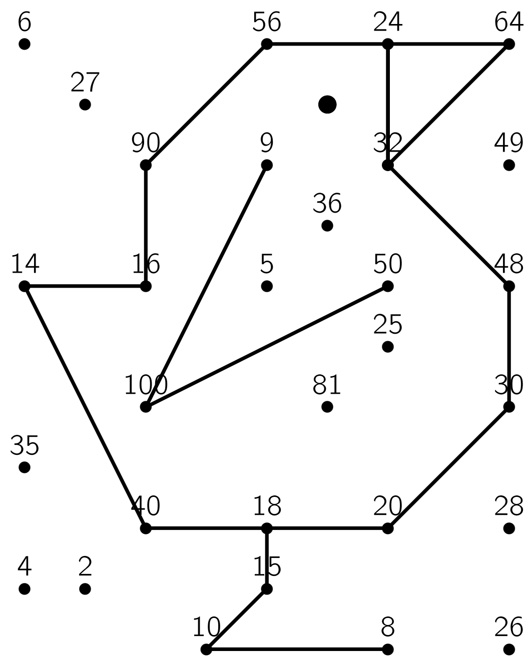
8 ♢ Si l'aire de **G** est égale à 25 alors l'aire de **F** est égale à 40.

9 ♢ Si la somme des aires de **A** et de **E** est égale à 30 alors l'aire de **H** est égale à 20.

10 ♢ Si la somme des aires de **D** et de **E** est égale à 100 alors l'aire de **I** est égale à 30.

11 ♢ Si la somme des aires de **B** et de **D** est égale à 36 alors l'aire de **F** est égale à 48.

12 ♢ Si l'aire de **C** est égale à 28 alors la somme des aires de **G** et de **I** est égale à 32.



C8 : périmètre, aire et Saute-grenouille (2) (Solution)

IREM de Lyon

Pièce	A	B	C	D	E	F	G	H	I
Périmètre	9	4	9	6	8	10	7	10	5
Aire	9	2	7	4	6	8	5	10	3

1 ♡ Si l'aire de **C** est égale à 7 alors l'aire de **F** est égale à 8.

2 ♡ Si l'aire de **B** est égale à 8 alors l'aire de **F** est égale à 32.

3 ♡ Si l'aire de **G** est égale à 10 alors l'aire de **C** est égale à 14.

4 ♡ Si l'aire de **D** est égale à 24 alors l'aire de **E** est égale à 36.

5 ♡ Si l'aire de **F** est égale à 80 alors l'aire de **G** est égale à 50.

1 ♠ Si l'aire de **B** est égale à 6 alors l'aire de **E** est égale à 18.

2 ♠ Si l'aire de **D** est égale à 160 alors l'aire de **B** est égale à 80.

3 ♠ Si l'aire de **C** est égale à 35 alors l'aire de **A** est égale à 45.

4 ♠ Si le périmètre de **E** est égal à 8 alors le périmètre de **I** est égal à 5.

5 ♠ Si le périmètre de **D** est égal à 12 alors le périmètre de **C** est égal à 18.

6 ♠ Si le périmètre de **F** est égal à 40 alors le périmètre de **E** est égal à 32.

7 ♠ Si le périmètre de **G** est égal à 35 alors le périmètre de **B** est égal à 20.

8 ♠ Si le périmètre de **H** est égal à 40 alors le périmètre de **D** est égal à 24.

9 ♠ Si le périmètre de **E** est égal à 48 alors le périmètre de **I** est égal à 30.

10 ♠ Si le périmètre de **D** est égal à 36 alors le périmètre de **G** est égal à 42.

11 ♠ Si la somme des aires de **B** et de **D** est égale à 6 alors l'aire de **I** est égale à 3.

12 ♠ Si la somme des aires de **A** et de **B** est égale à 88 alors l'aire de **C** est égale à 56.

13 ♠ Si la somme des aires de **E** et de **F** est égale à 42 alors l'aire de **C** est égale à 21.

14 ♠ Si la somme des aires de **C** et de **E** est égale à 13 alors la somme des aires de **B** et de **C** est égale à 9.

15 ♠ Si la somme des périmètres de **A** et de **B** est égale à 13 alors le périmètre de **G** est égal à 7.

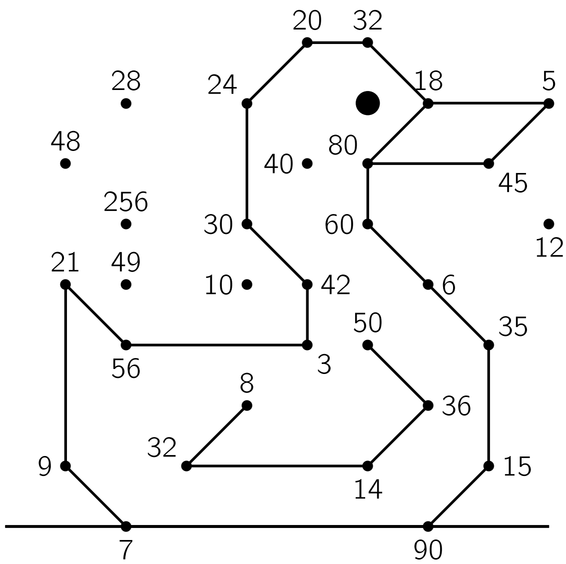
16 ♠ Si la somme des périmètres de **D** et de **E** est égale à 140 alors le périmètre de **C** est égal à 90.

17 ♠ Si la somme des périmètres de **B** et de **D** est égale à 30 alors le périmètre de **I** est égal à 15.

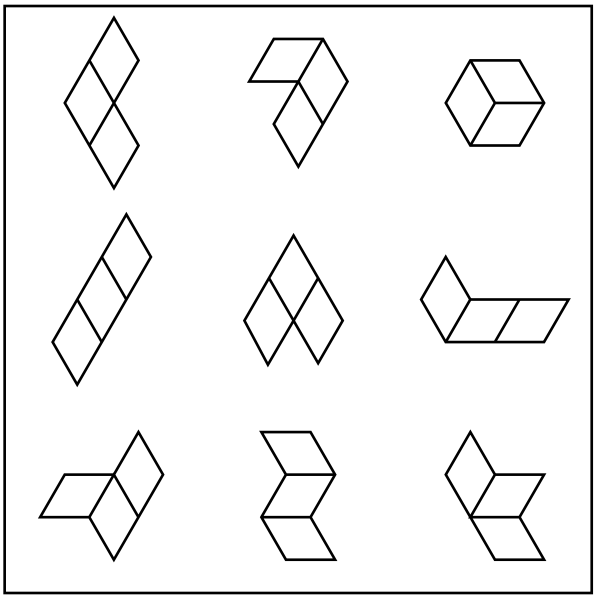
18 ♠ Si l'aire de **G** est égale à 35 alors la somme des aires de **B** et de **I** est égale à 35.

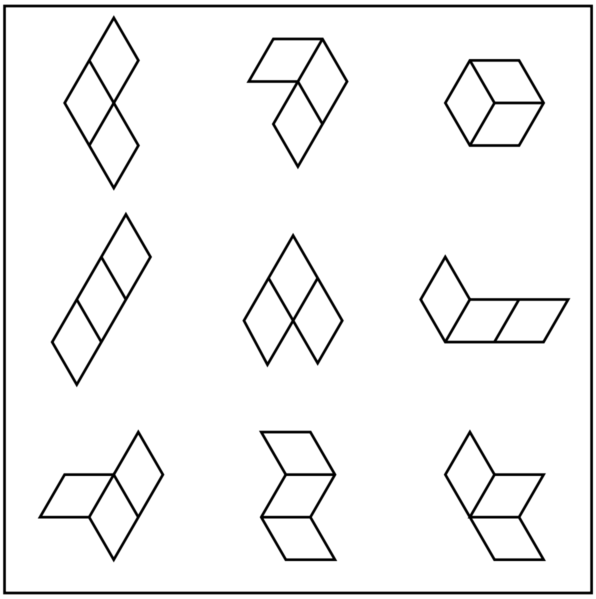
19 ♠ Si le périmètre de **I** est égal à 15 alors la somme des périmètres de **F** et de **H** est égale à 60.

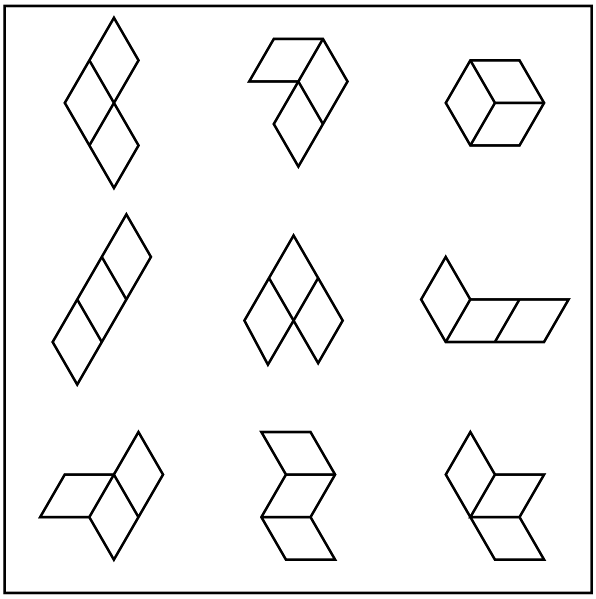
20 ♠ Si le périmètre de **C** est égal à 45 alors la somme des périmètres de **C** et de **G** est égale à 80.

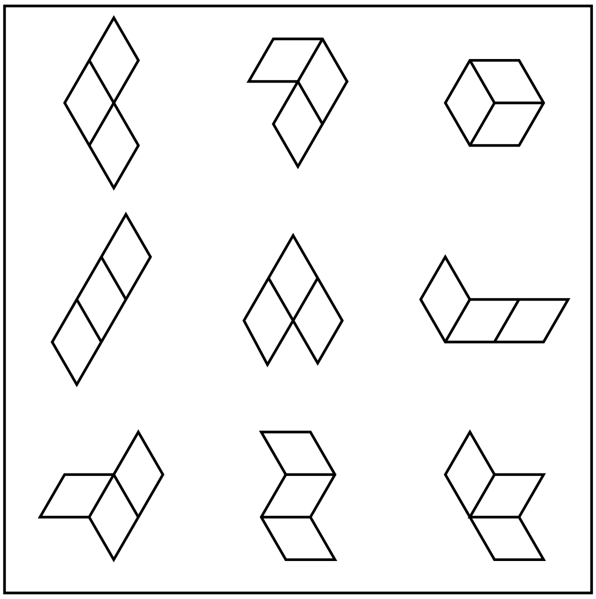


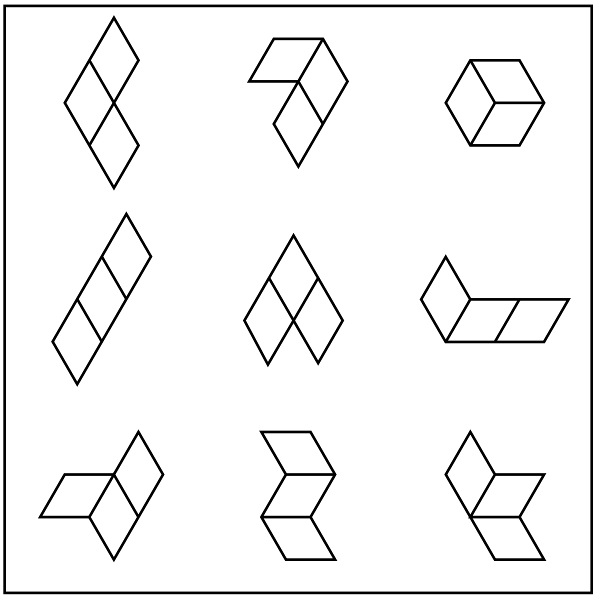
C8 : recherche de trilosanges (Solution)

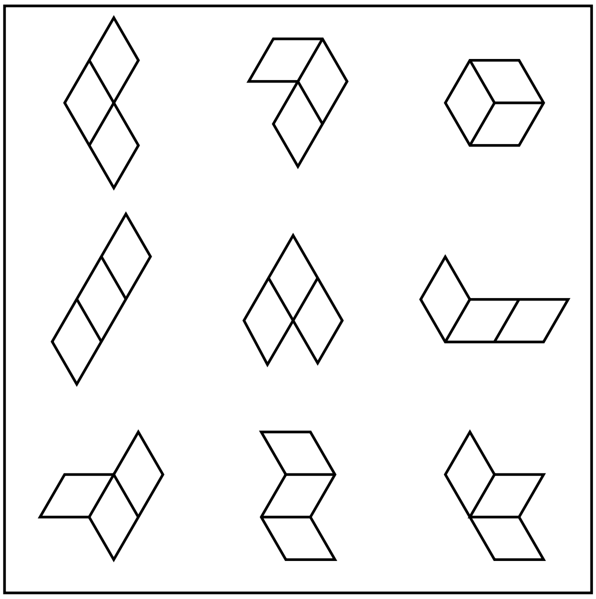












C8 : recouvrement d'un trilosange (Solution)

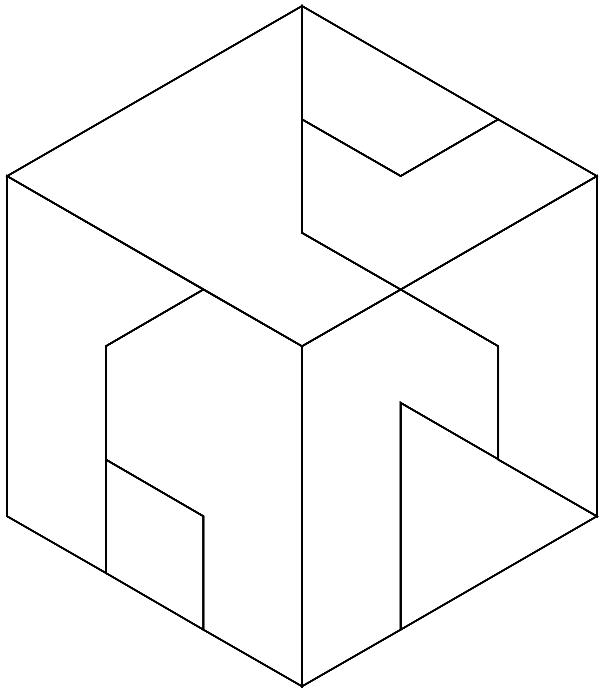
IREM de Lyon

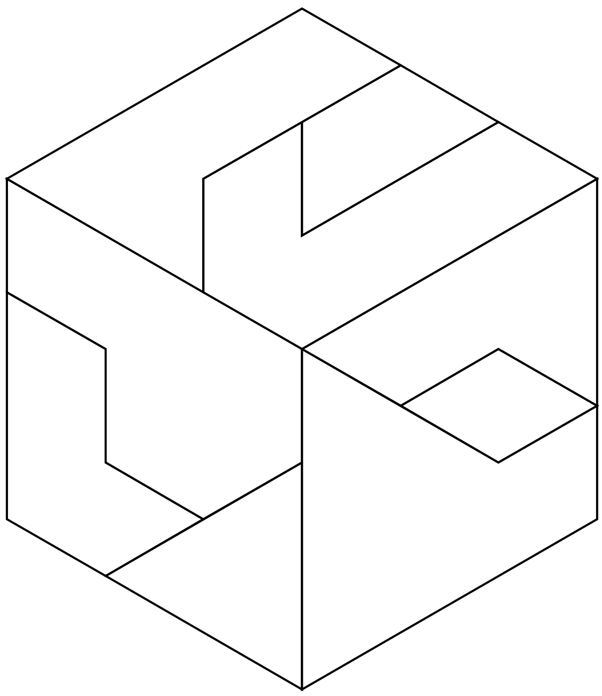
Une solution est donnée ci-dessous, dans le cas où le trilosange recouvre exactement un hexagone.

C8 : recouvrement d'un hexagone (Solution)

IREM de Lyon

Voici deux solutions possibles, parmi d'autres :



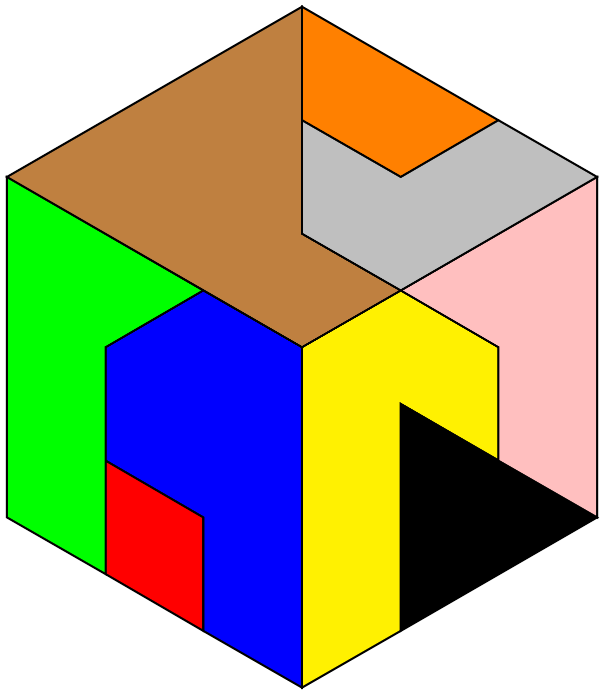


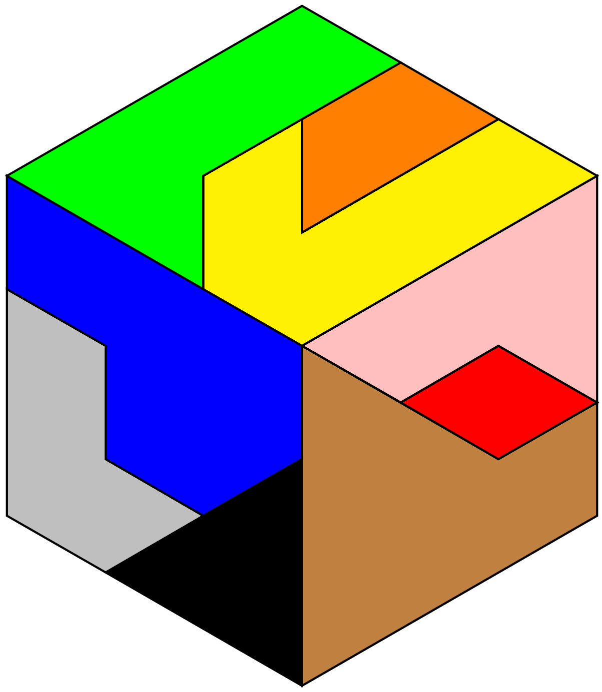
Ce défi est directement inspiré de l'activité **C8 : recouvrement** !

Le plateau est à la même échelle que les pièces données en page 58.

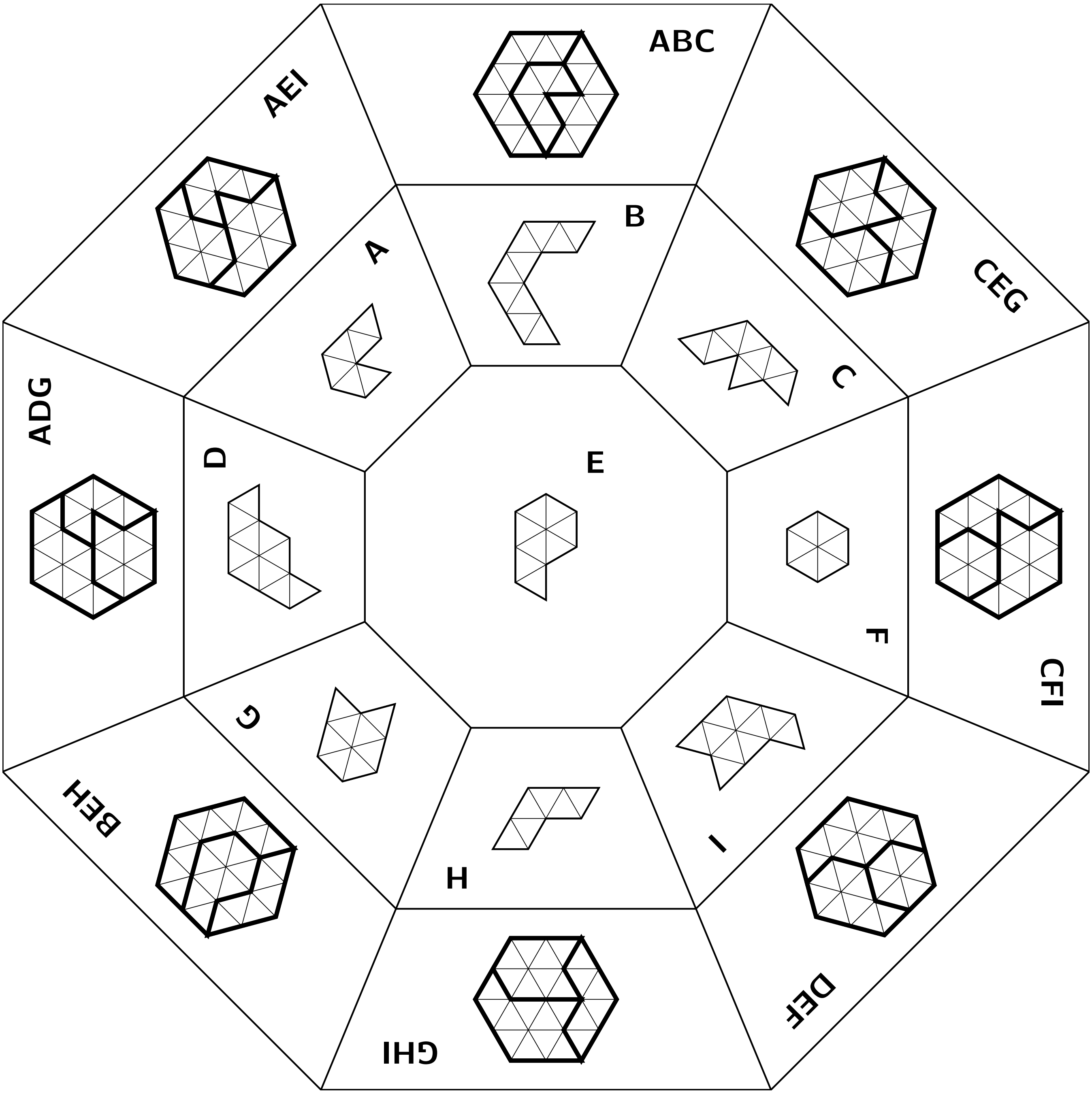
Remarque. L'hexagone peut être recouvert par trois losanges identiques et chaque losange peut être le modèle à trouver de chacun des huit alignements de carré géomagique. Dans ce cas, les neuf pièces étant utilisées, il faut prendre les trois solutions horizontales ou les trois solutions verticales (une solution en diagonale impliquerait une répétition impossible d'une pièce).

Et en couleurs. . .





Note. Les différentes productions des élèves peuvent décorer un mur de classe, soit bien séparés les uns des autres, soit juxtaposés, dans un esprit de travail de décoration collaboratif. Éventuellement, les élèves choisiront des couleurs communes aux pièces.


ABC
AEI
CEG
ADG
CFI
BEH
DEF
GHI
A
B
C
D
E
F
G
H
I

C10 : aire et périmètre (Solution)

IREM de Lyon

Périmètre				
12			B	
10		C	D I	
8	A H	E G		
6	F			
	6	8	10	Aire

C10 : aire et périmètre (Solution)

IREM de Lyon

Périmètre				
12			B	
10		C	D I	
8	A H	E G		
6	F			
	6	8	10	Aire

C10 : aire et périmètre (Solution)

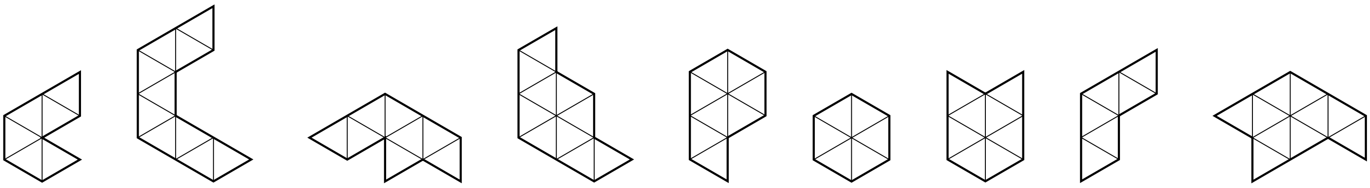
IREM de Lyon

Périmètre				
12			B	
10		C	D I	
8	A H	E G		
6	F			
	6	8	10	Aire

C10 : aire, périmètre et fractions (Solution)

IREM de Lyon

Tu disposes des neuf pièces suivantes :



A B C D E F G H I

1. Détermine l'aire (en triangle unité) et le périmètre (en segment unité) de chaque pièce.
2. Complète le tableau ci-dessous, qui indique la proportion de l'aire d'une pièce par rapport à une autre.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
A	1	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{3}{5}$
B	$\frac{5}{3}$	1	$\frac{5}{4}$	1	$\frac{5}{4}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{5}{3}$	1
C	$\frac{4}{3}$	$\frac{4}{5}$	1	$\frac{4}{5}$	1	$\frac{4}{3}$	1	$\frac{4}{3}$	$\frac{4}{5}$
D	$\frac{5}{3}$	1	$\frac{5}{4}$	1	$\frac{5}{4}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{5}{3}$	1
E	$\frac{4}{3}$	$\frac{4}{5}$	1	$\frac{4}{5}$	1	$\frac{4}{3}$	1	$\frac{4}{3}$	$\frac{4}{5}$
F	1	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{3}{5}$
G	$\frac{4}{3}$	$\frac{4}{5}$	1	$\frac{4}{5}$	1	$\frac{4}{3}$	1	$\frac{4}{3}$	$\frac{4}{5}$
H	1	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{3}{5}$
I	$\frac{5}{3}$	1	$\frac{5}{4}$	1	$\frac{5}{4}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{5}{3}$	1

3. Complète le tableau ci-dessous, qui indique la proportion du périmètre d'une pièce par rapport à une autre.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
A	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{4}{5}$	1	$\frac{4}{3}$	1	1	$\frac{4}{5}$
B	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{6}{5}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{6}{5}$
C	$\frac{5}{4}$	$\frac{5}{6}$	1	1	$\frac{5}{4}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{5}{4}$	1
D	$\frac{5}{4}$	$\frac{5}{6}$	1	1	$\frac{5}{4}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{5}{4}$	1
E	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{4}{5}$	1	$\frac{4}{3}$	1	1	$\frac{4}{5}$
F	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{5}$
G	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{4}{5}$	1	$\frac{4}{3}$	1	1	$\frac{4}{5}$
H	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{4}{5}$	1	$\frac{4}{3}$	1	1	$\frac{4}{5}$
I	$\frac{5}{4}$	$\frac{5}{6}$	1	1	$\frac{5}{4}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{5}{4}$	1

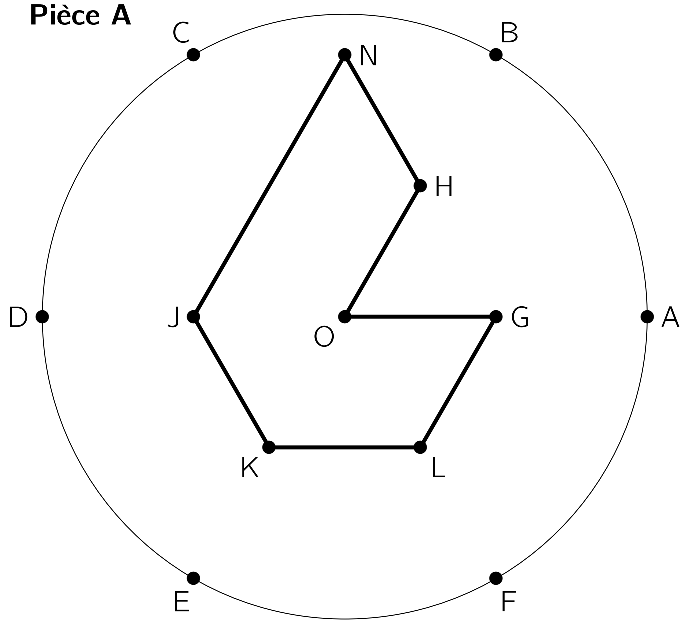
C10 : programme de construction (1) (Solution)

IREM de Lyon

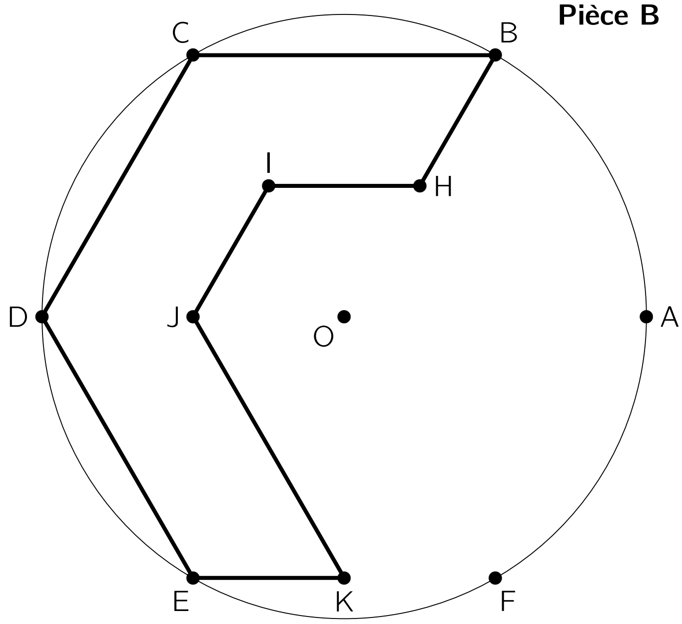
Remarques

- Les points A, B, ... , S sont *communs* aux neuf figures. Cela permet d'avoir un support commun (dessiné en double en page 173), à donner si nécessaire aux élèves.
- Le rayon du cercle est égal à 4 cm, soit une longueur de 5 grands carreaux de cahier d'élève.

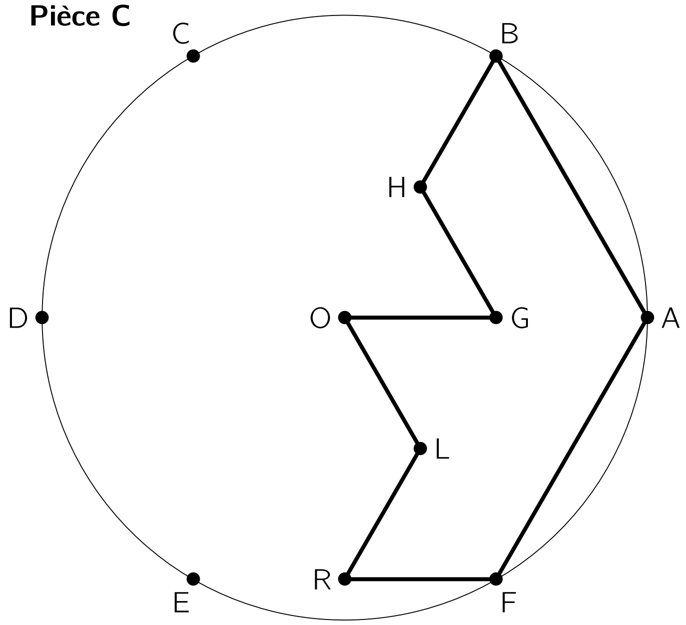
Pièce A



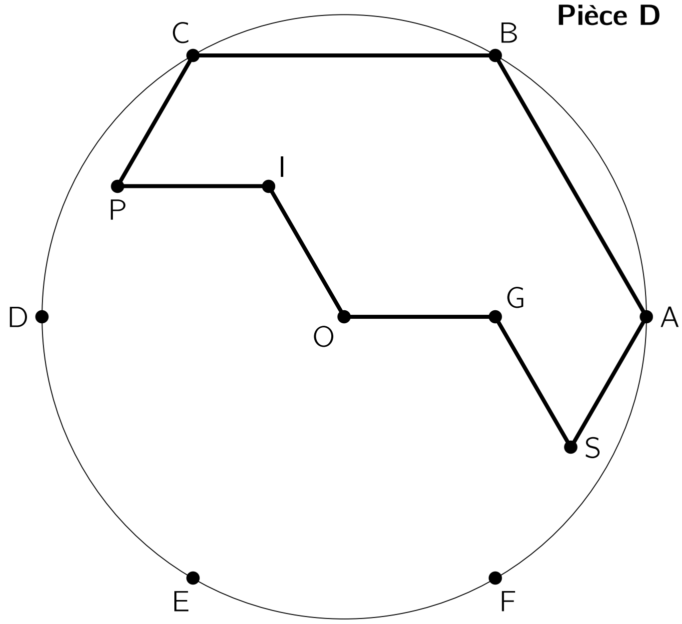
Pièce B



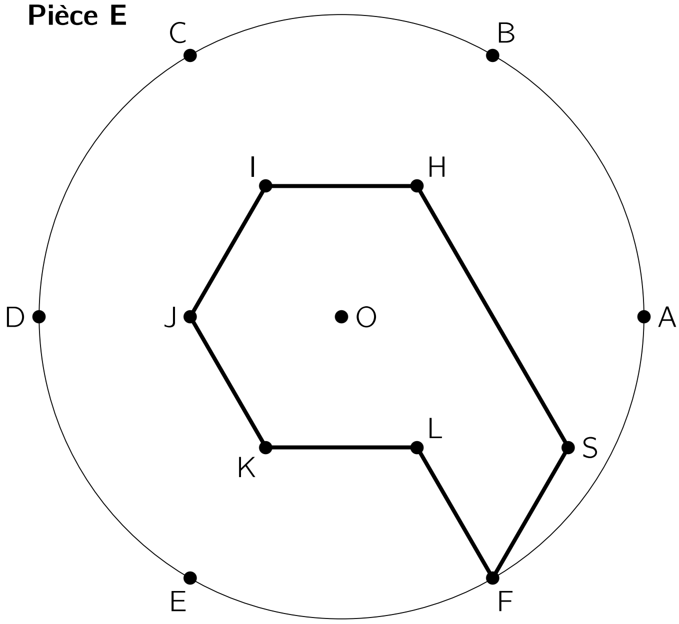
Pièce C



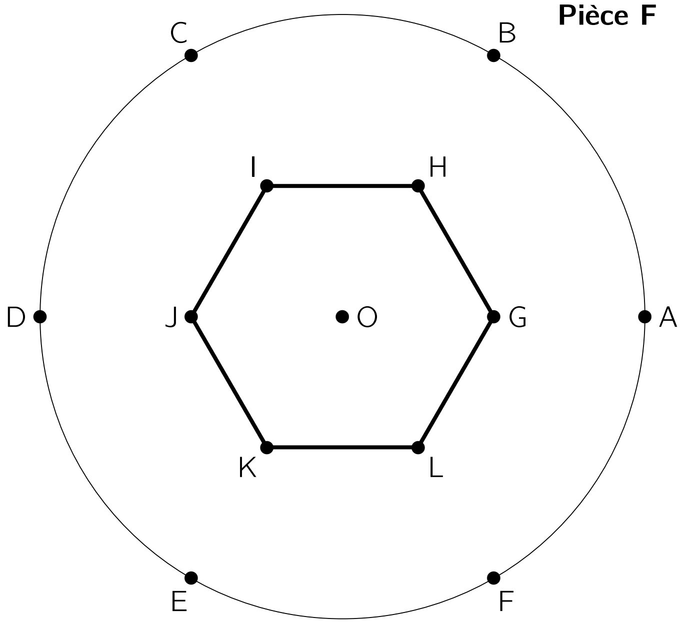
Pièce D



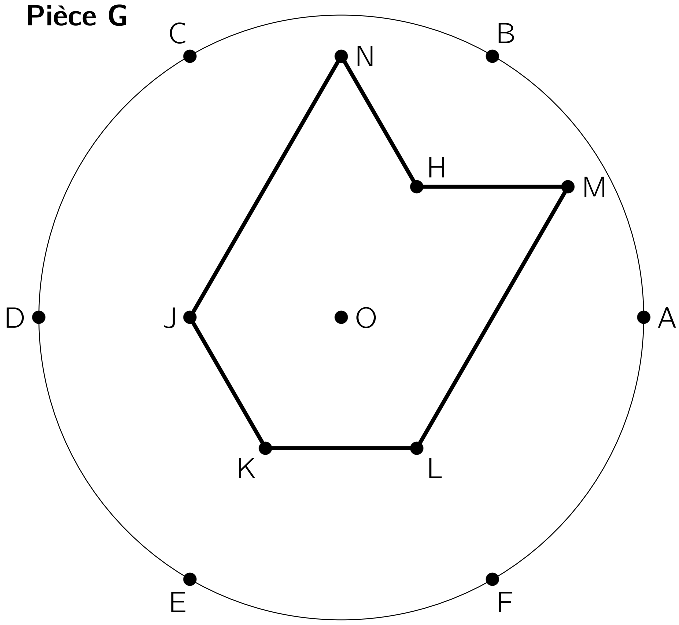
Pièce E



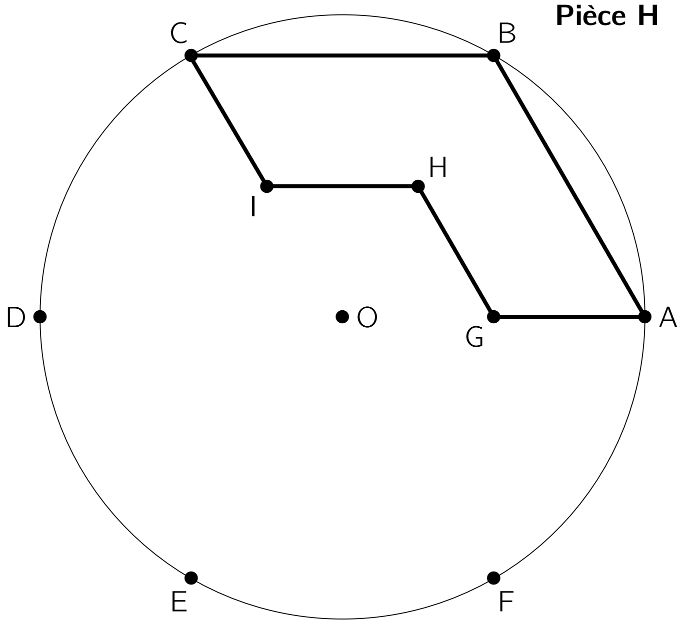
Pièce F



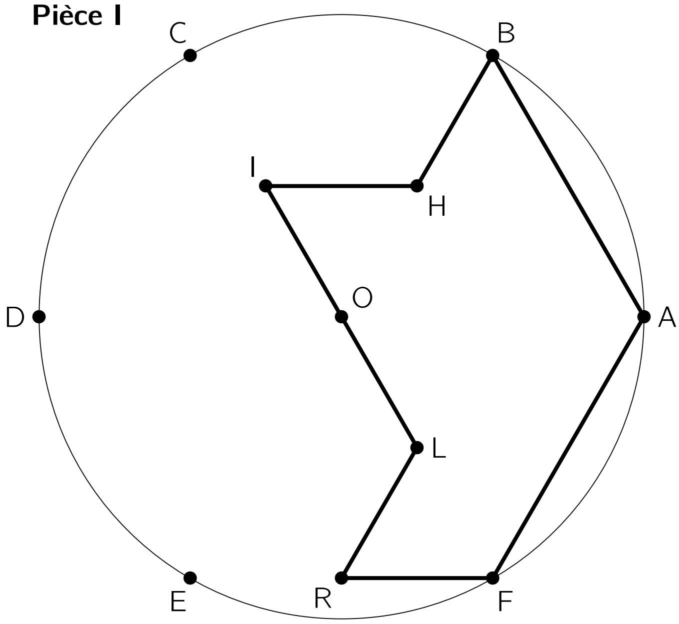
Pièce G

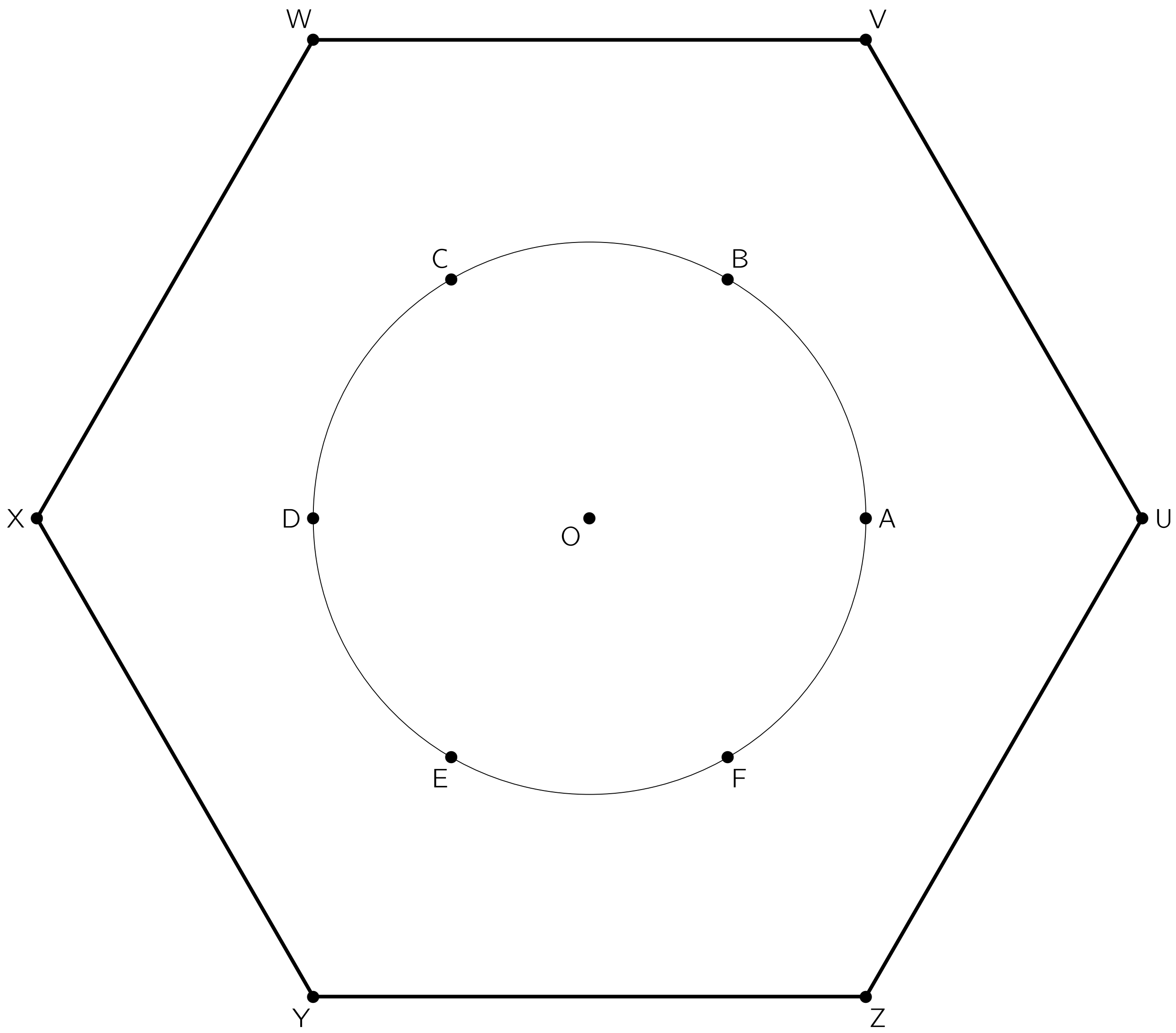


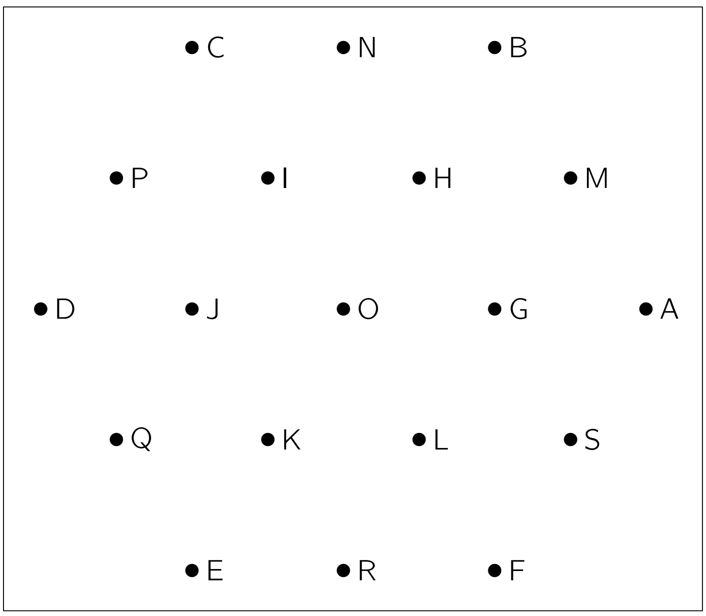
Pièce H

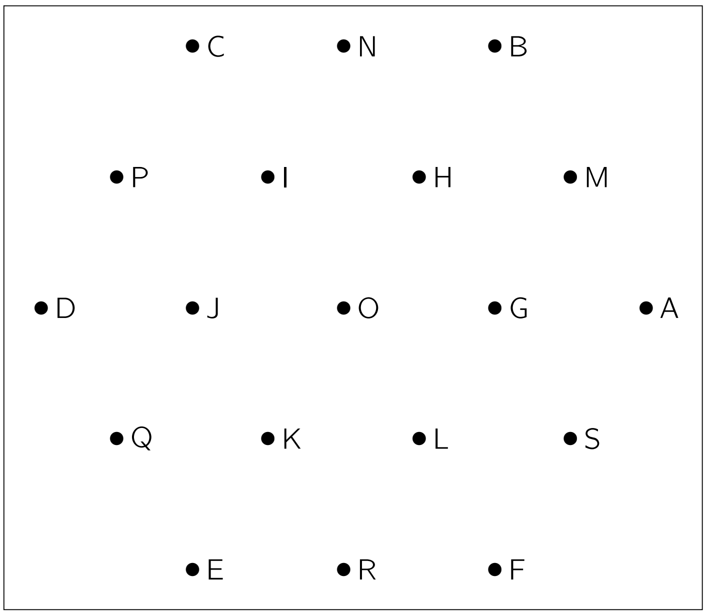


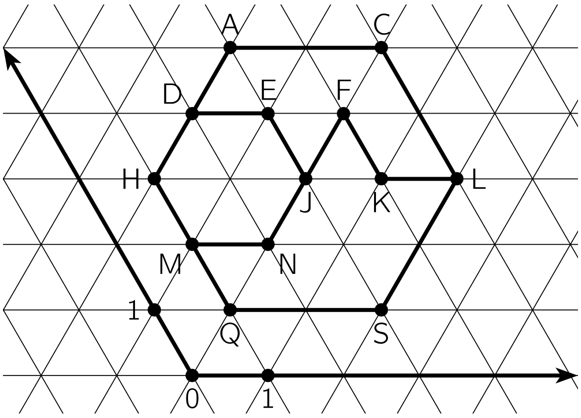
Pièce I

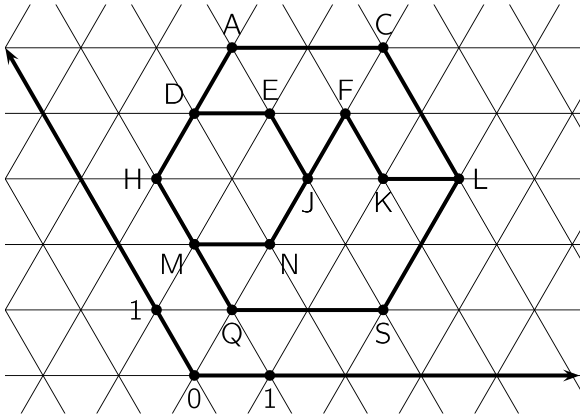


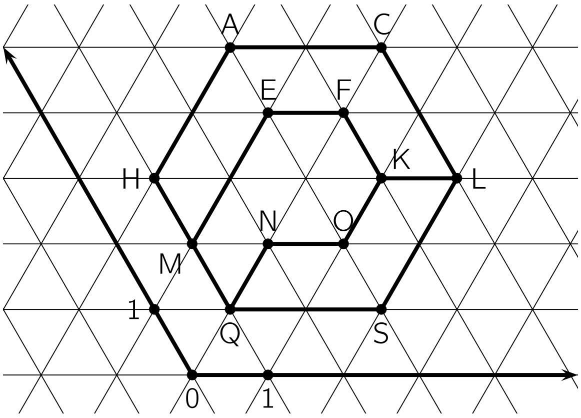

W
V
C
B
X
D
O
A
U
E
F
Y
Z

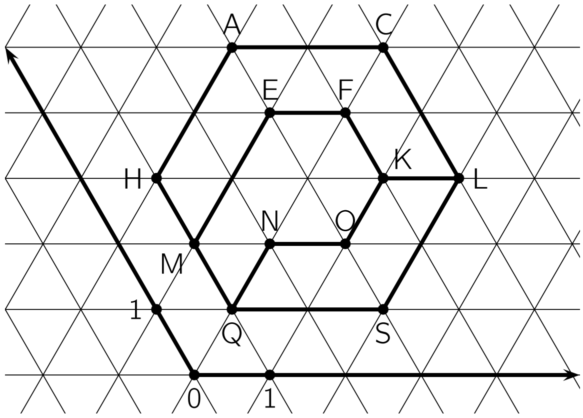

C N B
P I H M
D J O G A
Q K L S
E R F

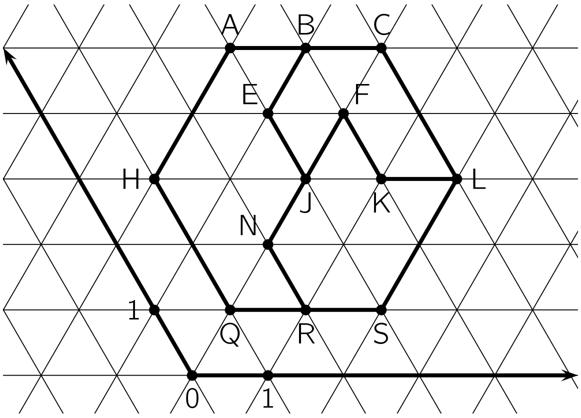

C N B
P I H M
D J O G A
Q K L S
E R F

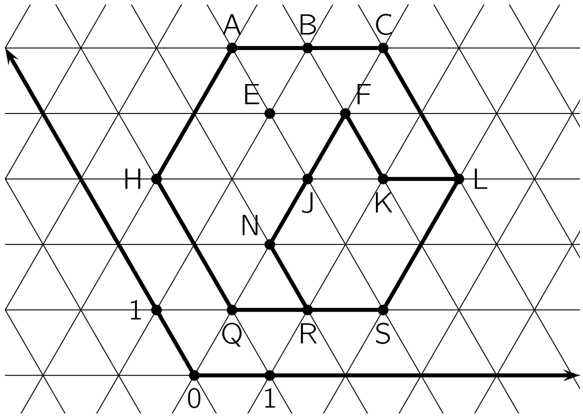


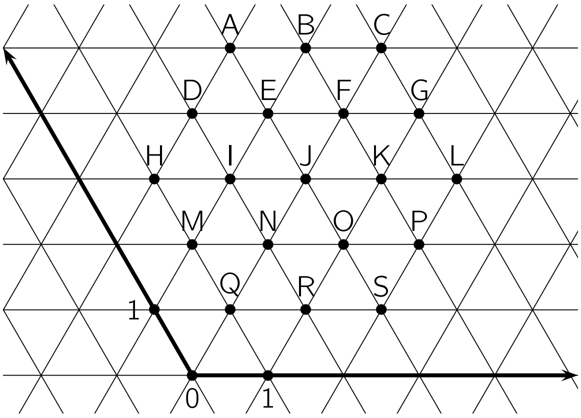








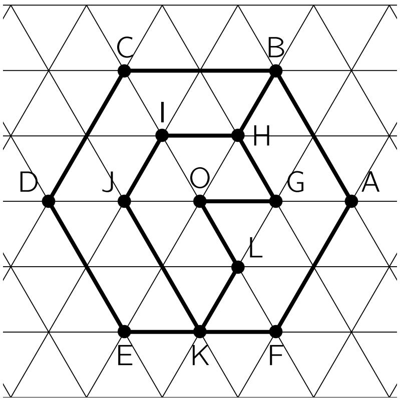


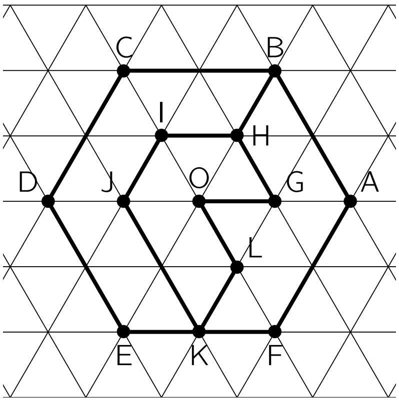


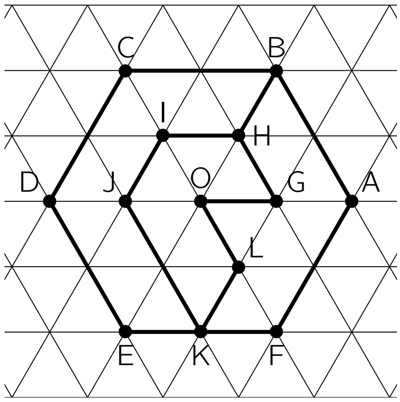
A (3 ; 5)	B (4 ; 5)	C (5 ; 5)	D (2 ; 4)
E (3 ; 4)	F (4 ; 4)	G (5 ; 4)	H (1 ; 3)
I (2 ; 3)	J (3 ; 3)	K (4 ; 3)	L (5 ; 3)
M (1 ; 2)	N (2 ; 2)	O (3 ; 2)	P (4 ; 2)
Q (1 ; 1)	R (2 ; 1)	S (3 ; 1)	

C10 : programme de construction (3) (Solution)

IREM de Lyon

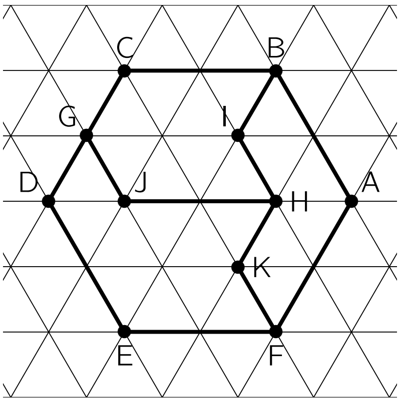


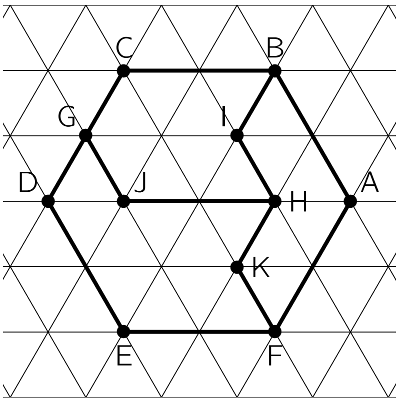


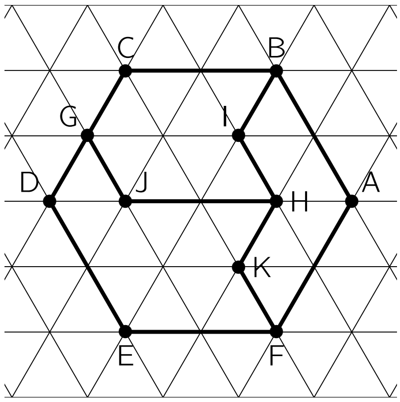


C10 : programme de construction (3) (Solution)

IREM de Lyon

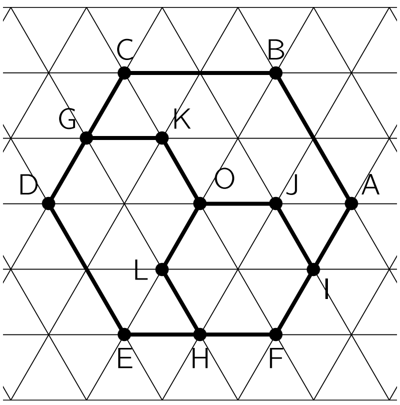


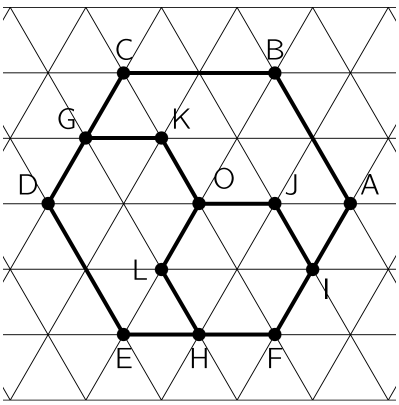


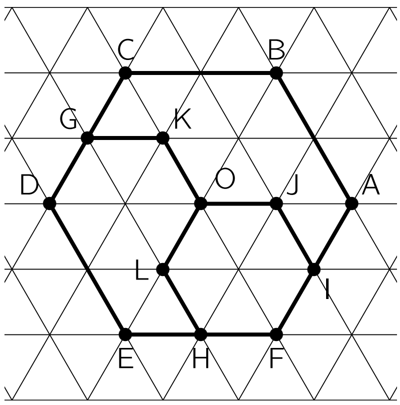


C10 : programme de construction (3) (Solution)

IREM de Lyon



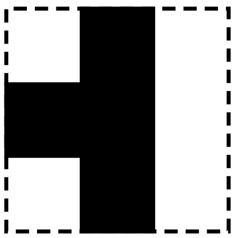




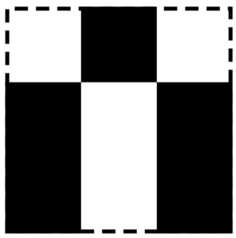
C10 : aire, périmètre et MosaColla (1) (Solution)

IREM de Lyon

Grille ❶

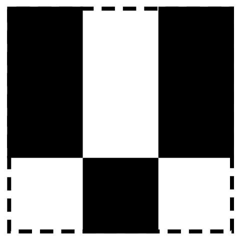


Grille ❷



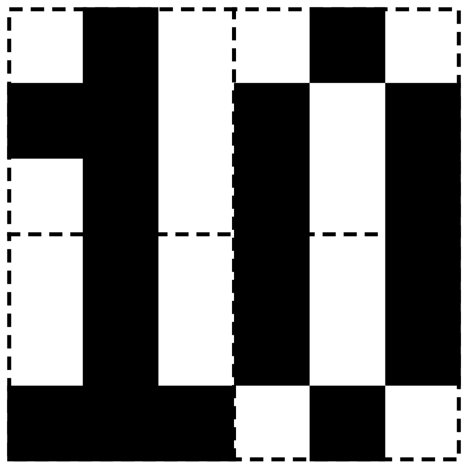
Grille ❸

Grille ❹



MosaColla :

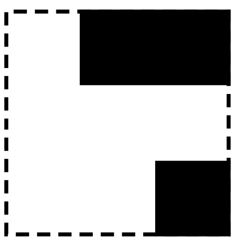
A1 Les pièces **A** et **F** ont la même aire.
B1 Les pièces **E** et **H** ont le même périmètre.
C1 Les pièces **C** et **G** ont la même aire.
A2 Les pièces **B** et **I** ont la même aire.
B2 Les pièces **C** et **I** ont le même périmètre.
C2 Les pièces **F** et **H** ont la même aire.
A3 Les pièces **B** et **D** ont la même aire.
B3 Les pièces **A** et **E** ont le même périmètre.
C3 Les pièces **A** et **G** ont le même périmètre.



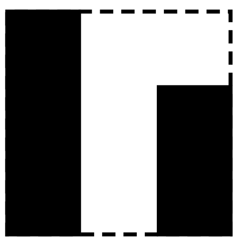
C10 : aire, périmètre et MosaColla (2) (Solution)

IREM de Lyon

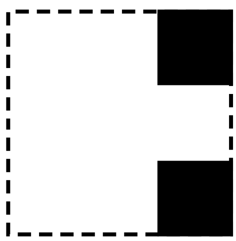
Grille ❶



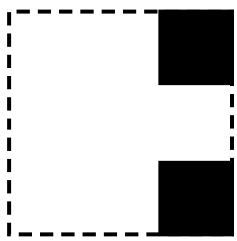
Grille ❷



Grille ❸

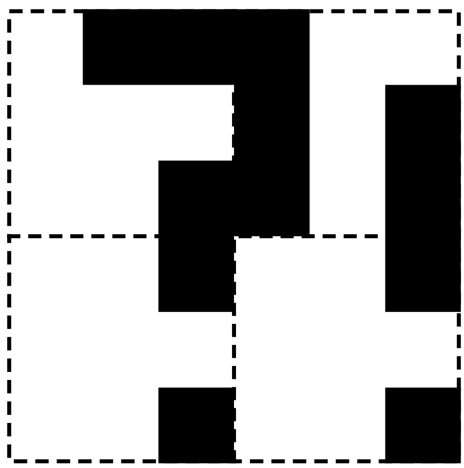


Grille ❹



MosaColla :

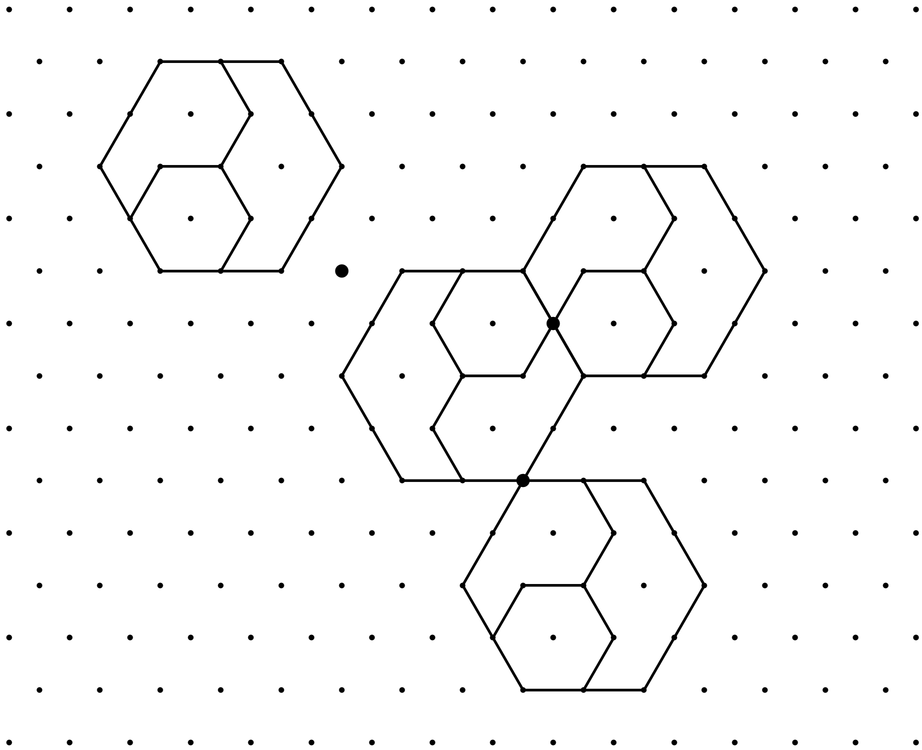
A1 Les pièces **A** et **F** ont la même aire.
B1 Les pièces **E** et **H** ont le même périmètre.
C1 Les pièces **C** et **G** ont la même aire.
A2 Les pièces **B** et **I** ont la même aire.
B2 Les pièces **C** et **I** ont le même périmètre.
C2 Les pièces **F** et **H** ont la même aire.
A3 Les pièces **B** et **D** ont la même aire.
B3 Les pièces **A** et **E** ont le même périmètre.
C3 Les pièces **A** et **G** ont le même périmètre.



C10 : symétrie centrale (Solution)

IREM de Lyon

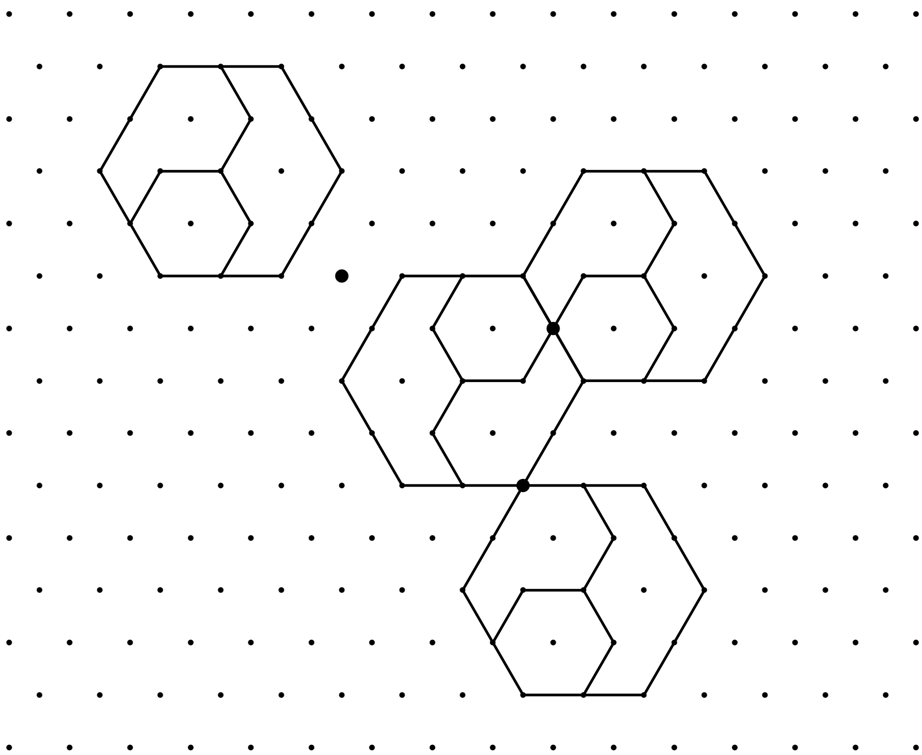
Dessine les trois figures symétriques par rapport aux trois centres.



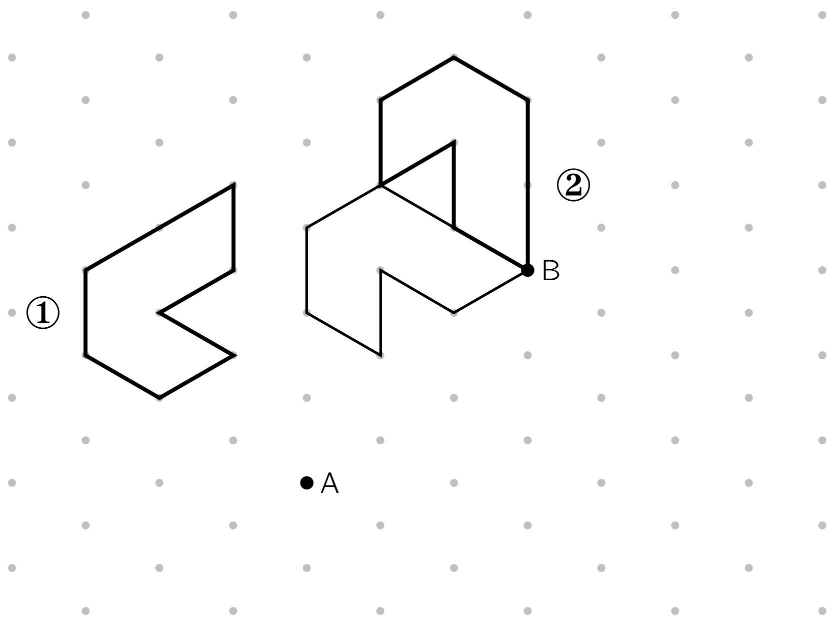
C10 : symétrie centrale (Solution)

IREM de Lyon

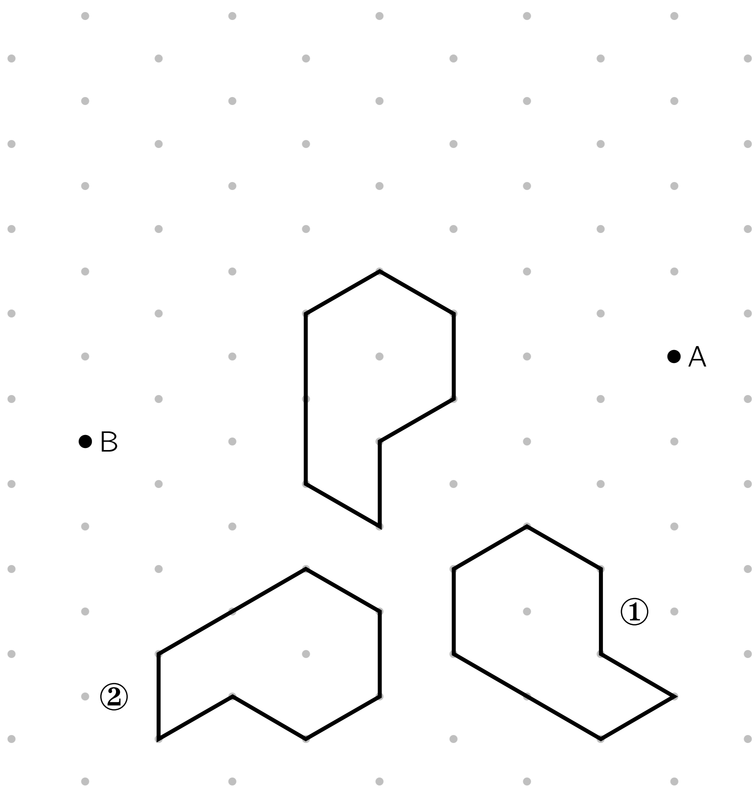
Dessine les trois figures symétriques par rapport aux trois centres.



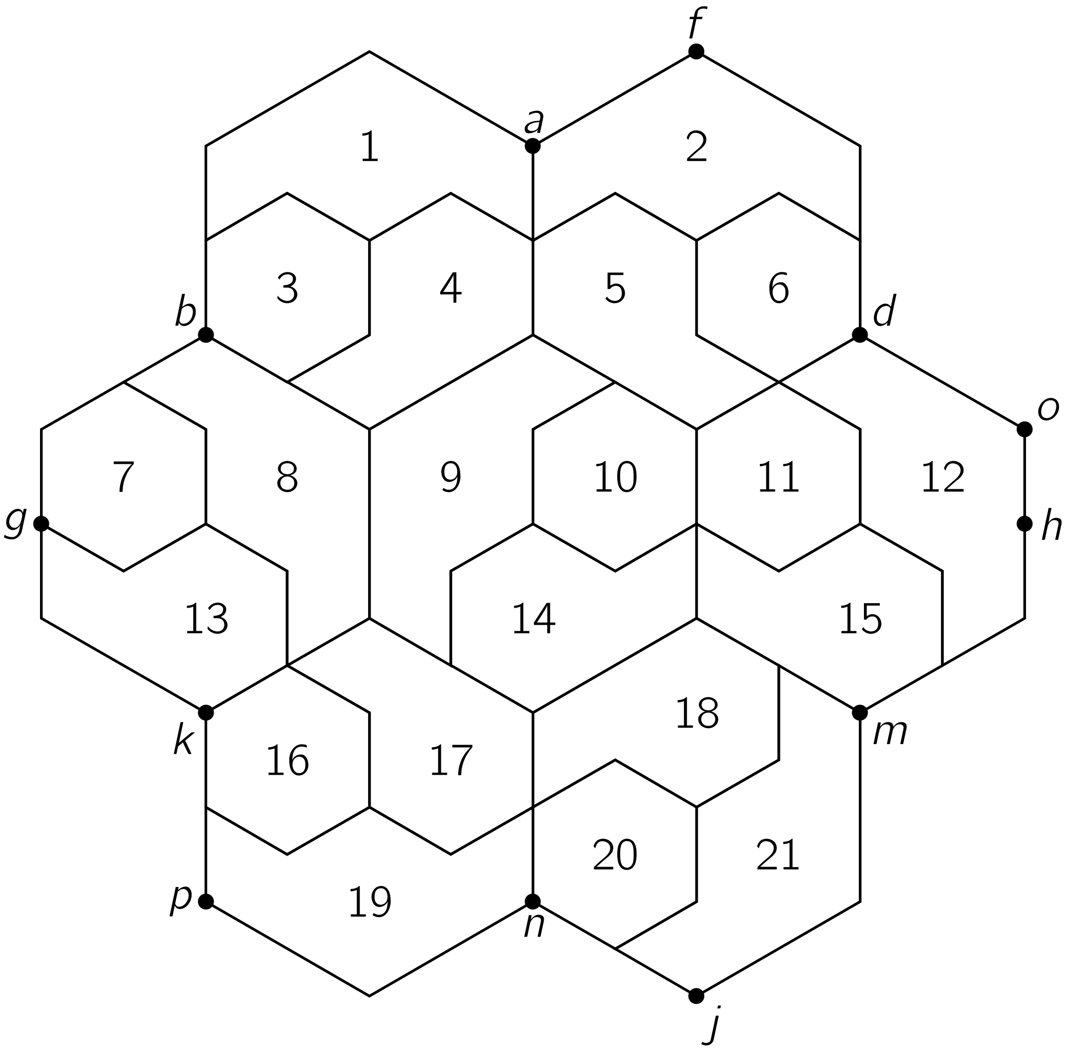
Le réseau ci-dessous est un réseau pointé équilatéral.
Dessine la figure ① image dans la rotation de centre A et d'angle 60° dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.
Dessine la figure ② image dans la rotation de centre B et d'angle 60° dans le sens des aiguilles d'une montre.



Le réseau ci-dessous est un réseau pointé équilatéral.
Dessine la figure ① image dans la rotation de centre A et d'angle 60° dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.
Dessine la figure ② image dans la rotation de centre B et d'angle 60° dans le sens des aiguilles d'une montre.

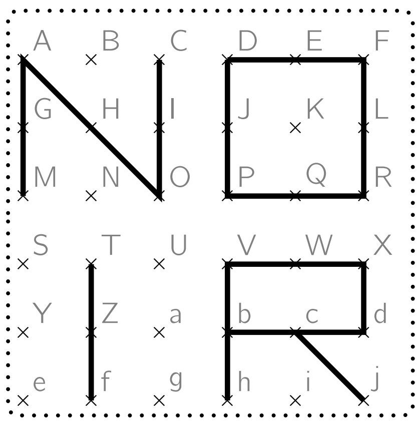


C10 : symétrie axiale et Vrai/Faux (1) (Solution)



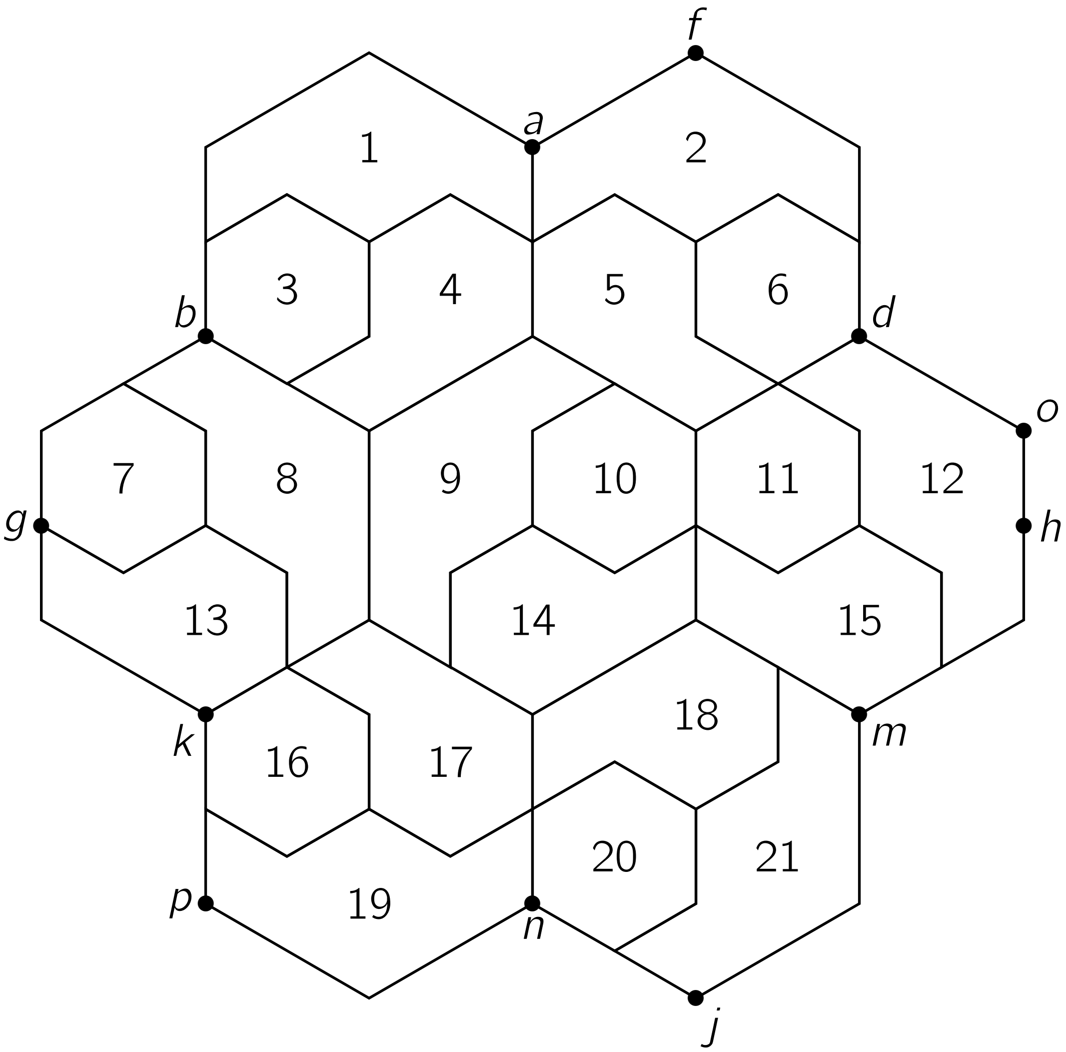
Si tu penses que la première phrase ci-dessous est vraie, trace dans le cadre de droite le segment [A M] ; si tu penses qu'elle est fausse, trace le segment [A N]. Et ainsi de suite.

	Vrai	Faux
2 a pour image **1** dans la symétrie axiale d'axe (an).	[A M]	
3 a pour image **6** dans la symétrie axiale d'axe (an).	[T f]	
7 a pour image **16** dans la symétrie axiale d'axe (dk).		[c j]
1 a pour image **21** dans la symétrie axiale d'axe (dk).	[D P]	
8 a pour image **12** dans la symétrie axiale d'axe (an).		[V X]
14 a pour image **18** dans la symétrie axiale d'axe (op).		[C O]
5 a pour image **13** dans la symétrie axiale d'axe (bm).		[V h]
19 a pour image **2** dans la symétrie axiale d'axe (dk).		[F R]
3 a pour image **16** dans la symétrie axiale d'axe (gh).	[b d]	
6 a pour image **11** dans la symétrie axiale d'axe (dk).		[A O]
9 a pour image **12** dans la symétrie axiale d'axe (fj).	[D F]	
5 a pour image **18** dans la symétrie axiale d'axe (gh).		[X d]
2 a pour image **12** dans la symétrie axiale d'axe (dk).		[P R]



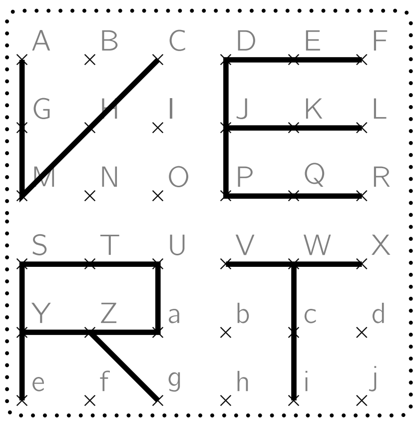
C10 : symétrie axiale et Vrai/Faux (2) (Solution)

IREM de Lyon



Si tu penses que la première phrase ci-dessous est vraie, trace dans le cadre de droite le segment [A M] ; si tu penses qu'elle est fausse, trace le segment [A N]. Et ainsi de suite.

	Vrai	Faux
2 a pour image **1** dans la symétrie axiale d'axe (an).	[A M]	
3 a pour image **6** dans la symétrie axiale d'axe (an).	[D P]	
7 a pour image **16** dans la symétrie axiale d'axe (dk).		[V X]
1 a pour image **21** dans la symétrie axiale d'axe (dk).	[Z g]	
8 a pour image **12** dans la symétrie axiale d'axe (an).		[D F]
14 a pour image **18** dans la symétrie axiale d'axe (op).		[Y a]
5 a pour image **13** dans la symétrie axiale d'axe (bm).		[J L]
19 a pour image **2** dans la symétrie axiale d'axe (dk).		[U a]
3 a pour image **16** dans la symétrie axiale d'axe (gh).	[W i]	
6 a pour image **11** dans la symétrie axiale d'axe (dk).		[C M]
9 a pour image **12** dans la symétrie axiale d'axe (fj).	[S e]	
5 a pour image **18** dans la symétrie axiale d'axe (gh).		[P R]
2 a pour image **12** dans la symétrie axiale d'axe (dk).		[S U]



C10 : construction avec le logiciel Scratch (1) (Solution)

IREM de Lyon

La plupart des élèves ont construit un programme qui empile des blocs `Gauche`, `Droite` et `Avance`.

Quelques-uns ont utilisé des blocs de répétition ; voici une réponse possible au problème avec ces blocs (présentée sur trois colonnes, en raison de sa taille), de Judith (élève de 3ème).

```
quand 🏴 est cliqué
effacer tout
stylo en position d'écriture
aller à x: -100 y: 0
s'orienter à 90
Droite
répéter 6 fois
    Avance
    Avance
    Droite
```

```
répéter 2 fois
    Droite
    Avance
répéter 2 fois
    Gauche
    Avance
Avance
Gauche
```

```
répéter 2 fois
    Gauche
    Avance
Droite
Droite
Avance
Gauche
Gauche
Avance
stop tout
```

Remarque.

Des élèves ont commencé en choisissant

```
aller à x: -100 y: 0
s'orienter à 30
```

à la place de

```
aller à x: -100 y: 0
s'orienter à 90
Droite
```

.

Note. La création des trois blocs a facilité le travail de l'élève dans le sens où les blocs ont permis de diviser par 2 le nombre de lignes du code !

Note. L'élève pourra commencer par chercher un tracé lui permettant de ne pas lever le crayon.

C10 : construction avec le logiciel Scratch (2) (Solution)

Une solution possible.

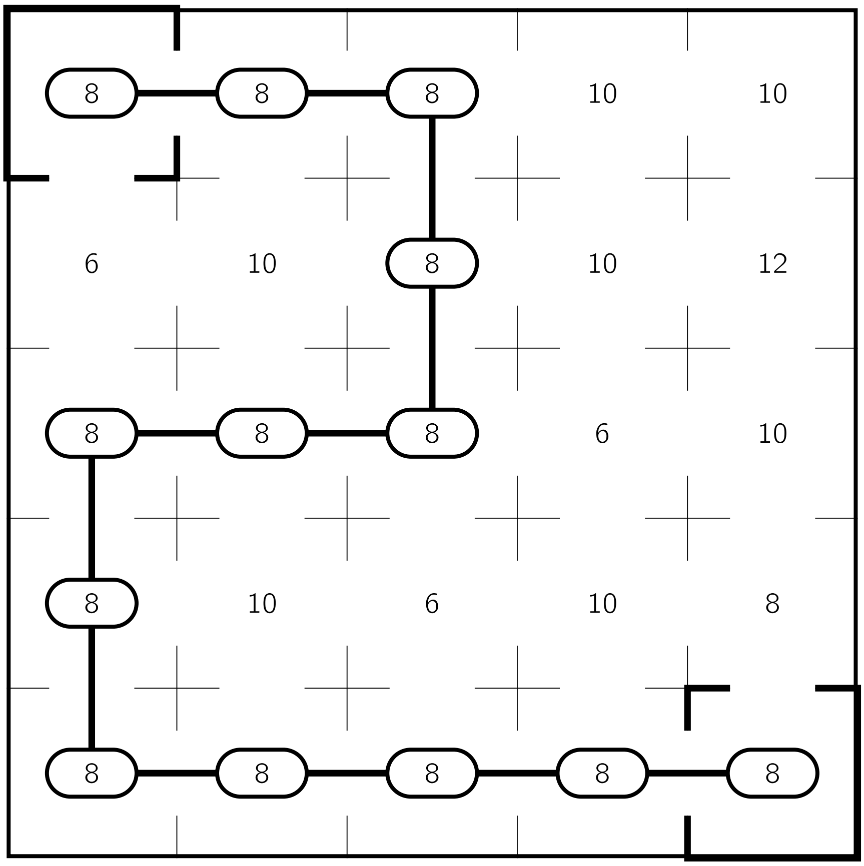
```
quand [drapeau] est cliqué
effacer tout
aller à x: (0) y: (100)
stylo en position d'écriture
Deplace (-120) (100)
Deplace (180) (100)
Deplace (120) (100)
Deplace (60) (100)
Deplace (0) (100)
Deplace (-60) (100)
Deplace (-180) (50)
Deplace (-120) (50)
Deplace (180) (50)
Deplace (120) (100)
Deplace (0) (50)
Deplace (-60) (50)
Deplace (60) (50)
Deplace (-60) (50)
stop [tout ▾]
```

Note. L'élève pourra commencer par chercher un tracé lui permettant de ne pas lever le crayon.

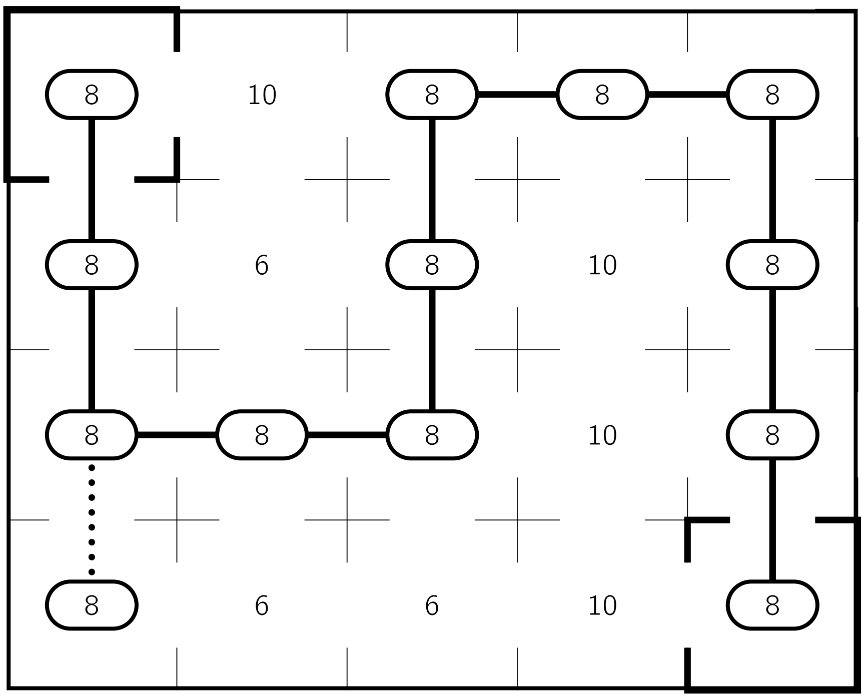
Note. Le bloc `Deplace` permet de diviser par 2 le nombre de lignes du code !

C10 : aire, périmètre et labyrinthe (1) (Solution)

Chaque pièce a été remplacée par son périmètre. Les nombres entourés sont égaux et les pièces correspondantes ont alors le même périmètre : cela permet d'identifier les cases dans lesquelles on peut passer (et celles-là seulement).



Chaque pièce a été remplacée par son aire. Les nombres entourés sont égaux et les pièces correspondantes ont alors la même aire : cela permet d'identifier les cases dans lesquelles on peut passer (et celles-là seulement).

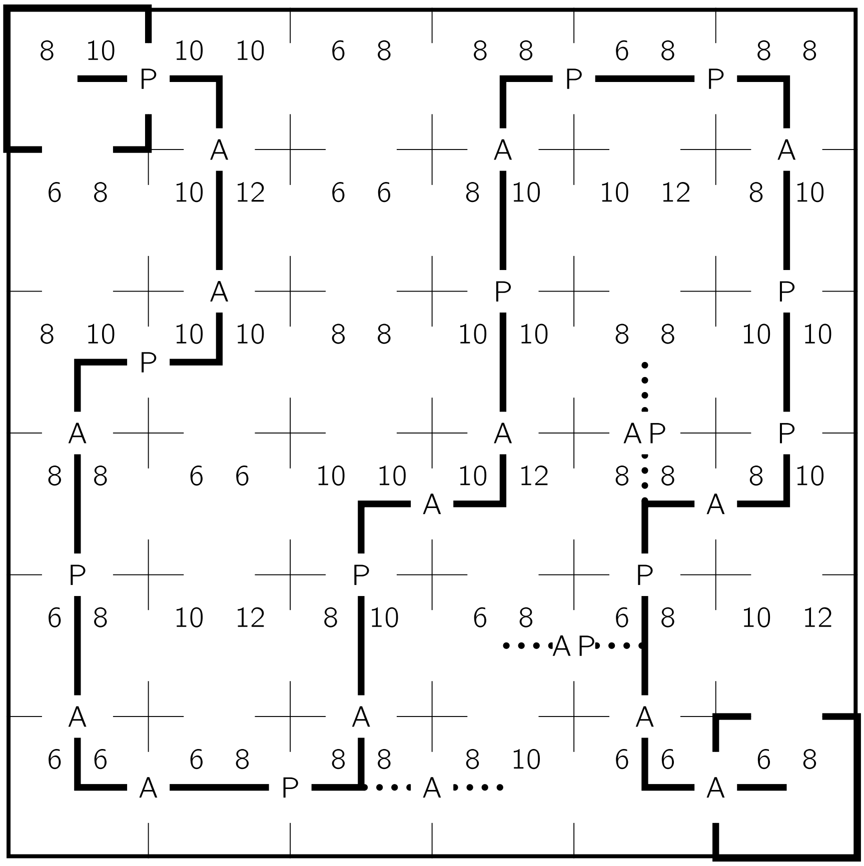


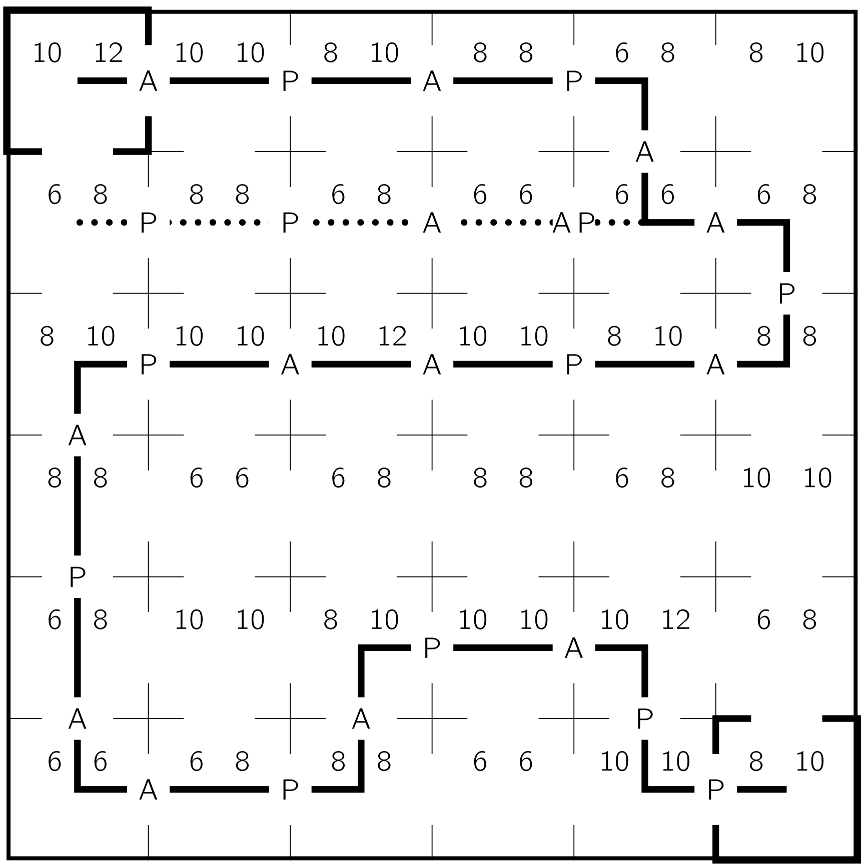
C10 : aire, périmètre et labyrinthe (2) (Solution)

IREM de Lyon

Chaque pièce a été remplacée par deux nombres l'un à-côté de l'autre : celui de gauche est l'aire de la pièce et celui de droite est celui du périmètre de la pièce. Cela permet d'identifier les cases dans lesquelles on peut passer (et celles-là seulement).

Sur le chemin, les lettres A et P précisent le choix (entre l'aire et le périmètre) de l'égalité.

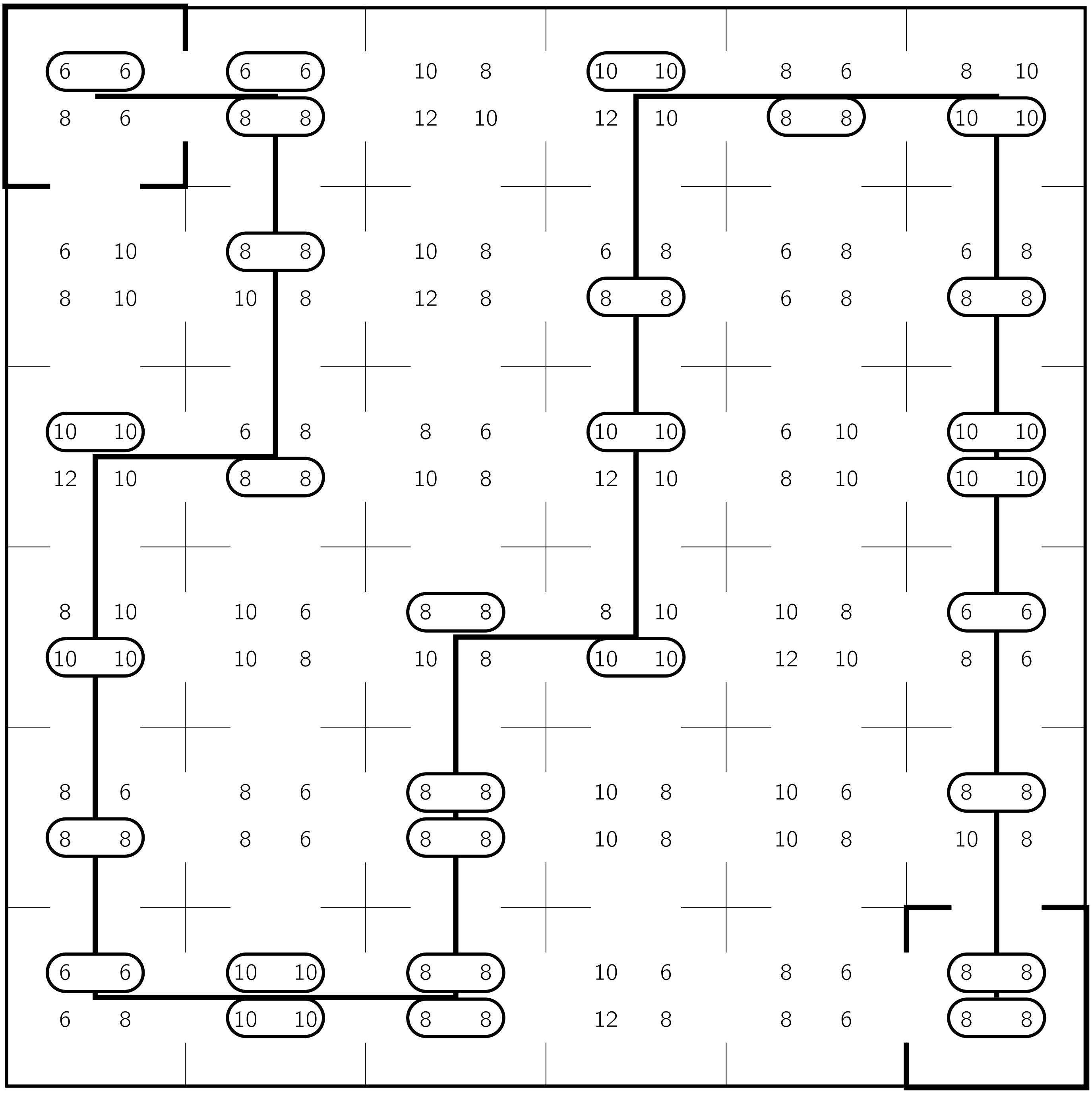




C10 : aire, périmètre et labyrinthe (3) (Solution)

IREM de Lyon

Chaque pièce a été remplacée par deux nombres l'un en-dessous de l'autre : celui du haut est l'aire de la pièce et celui du bas est celui du périmètre de la pièce. Lorsque les deux aires sont égales ou lorsque les deux périmètres sont égaux, les deux nombres sont entourés : cela permet d'identifier les cases dans lesquelles on peut passer (et celles-là seulement).

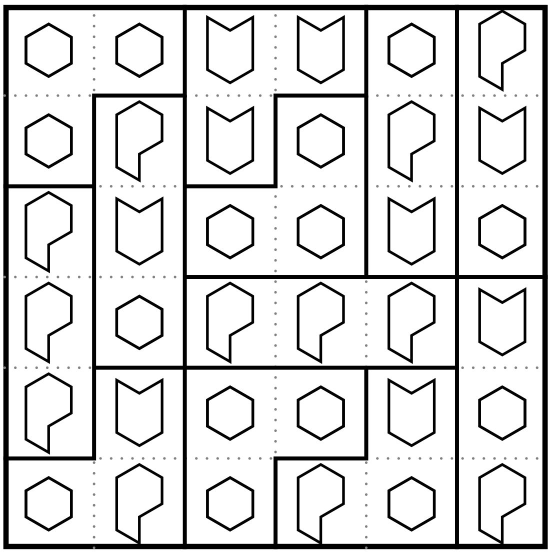


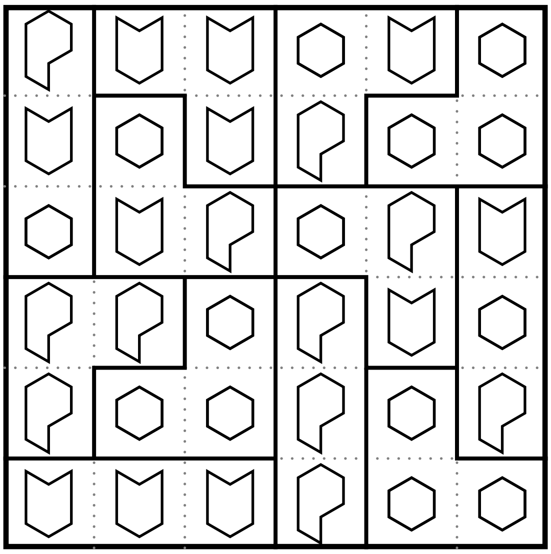
C10 : tous égaux ou tous différents (Solution)

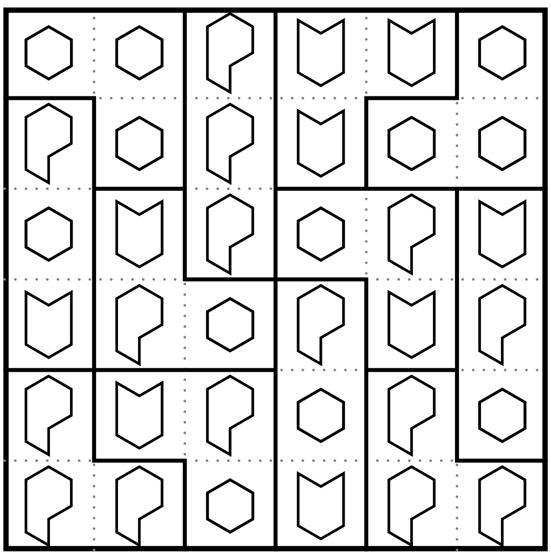
IREM de Lyon

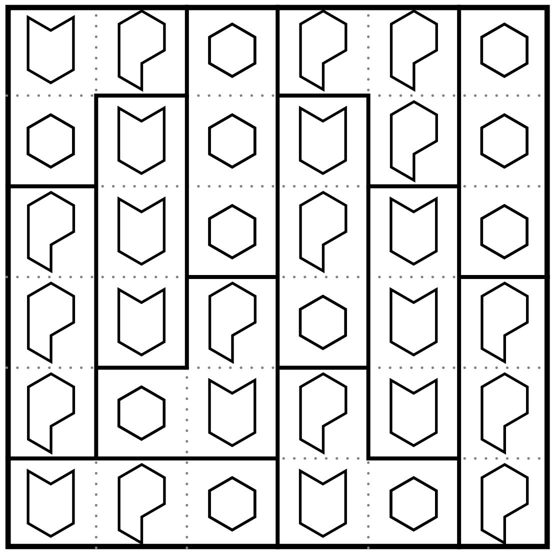
Remplis chaque case d'une grille par l'une des trois pièces , et selon les conditions suivantes :

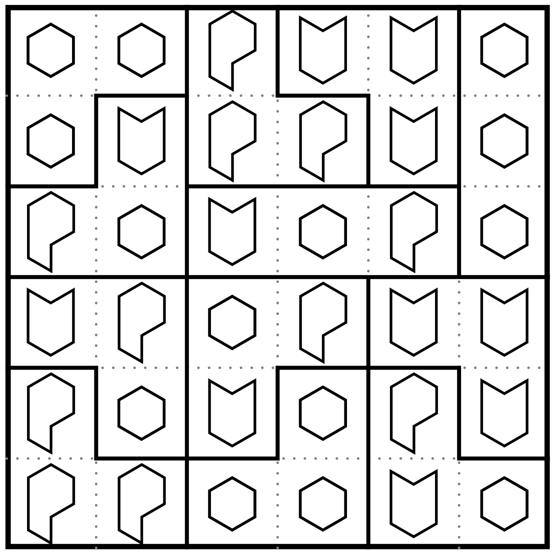
- dans chaque zone, les trois pièces sont soit identiques soit toutes différentes ;
- deux pièces situées de part et d'autre d'un côté séparant deux zones sont différentes.

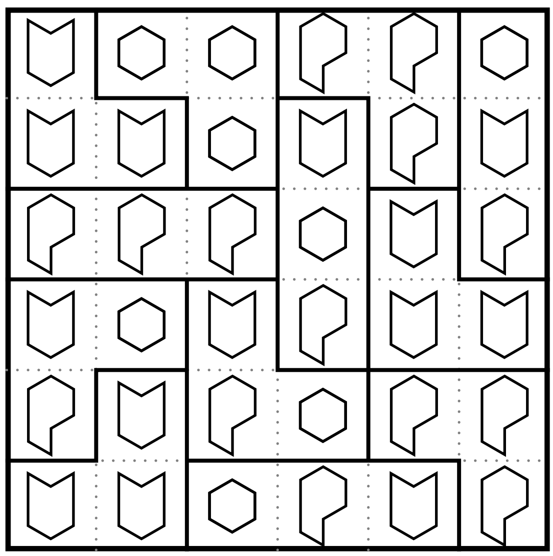

1.


2.


3.

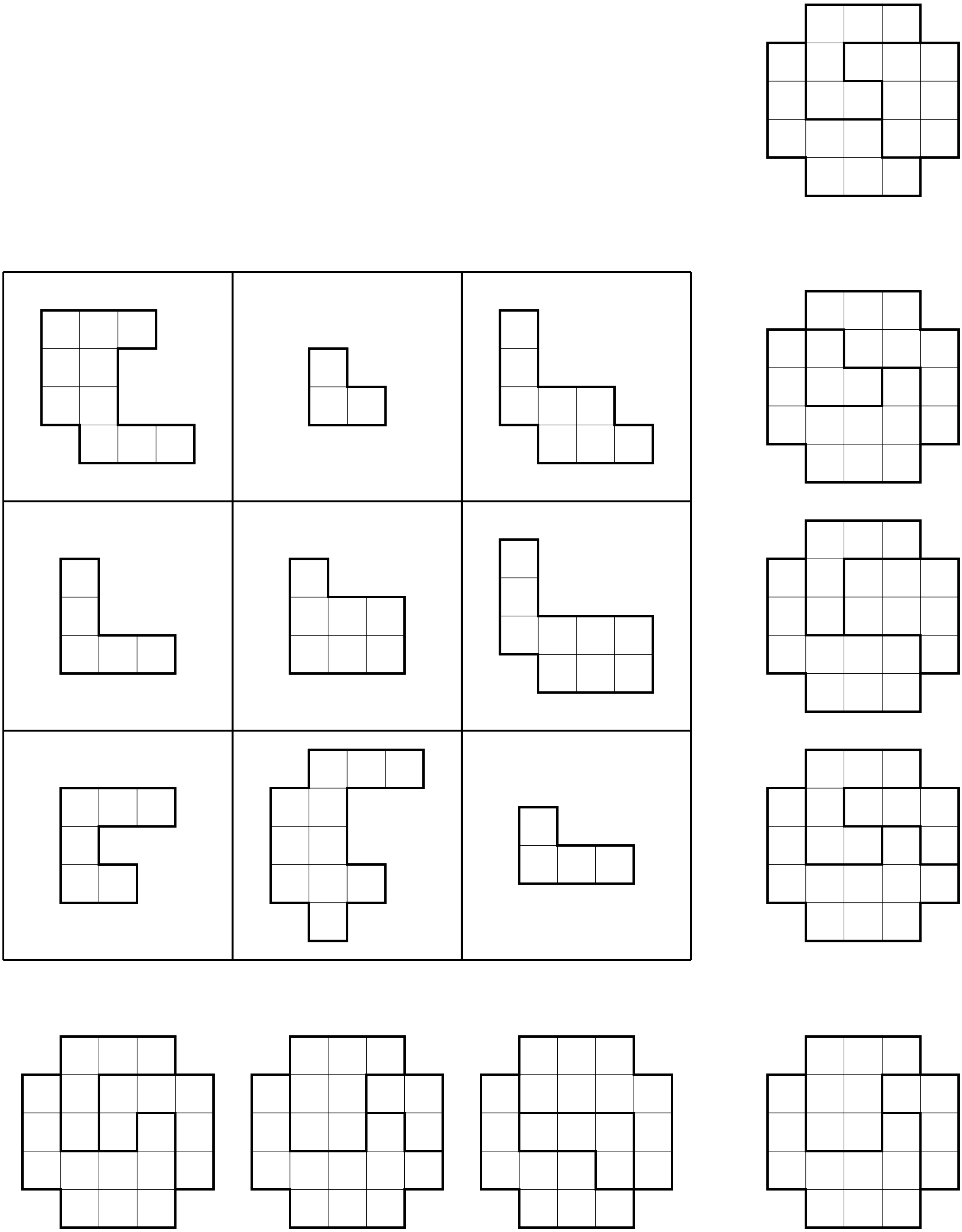

4.


5.

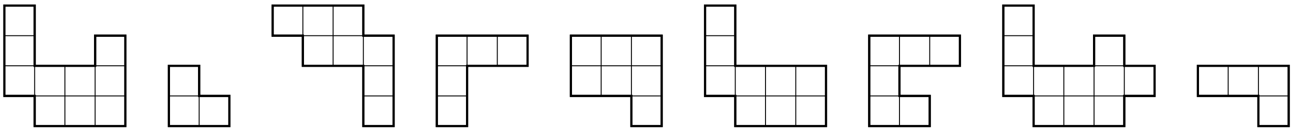

6.

Idée originale : `https://www.janko.at/Raetsel/Tripletts/index.htm`

Carré géomagique C18 (Solution)



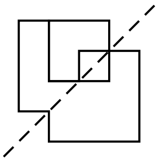
C18 : symétries axiale et centrale (Quelques solutions)



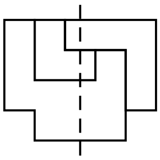
A **B** **C** **D** **E** **F** **G** **H** **I**

Réalise au moins une figure ayant **un** axe de symétrie avec les pièces suivantes :

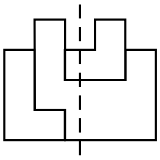
1. A et **B**



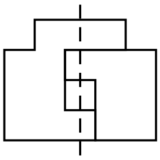
2. A, **B** et **D**



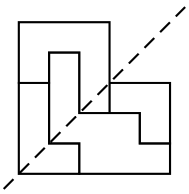
3. A, **B** et **I**



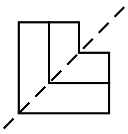
4. A et **E**

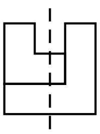


5. B, **C**, **G** et **I**

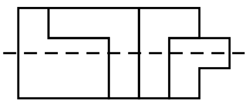


6. B et **D**

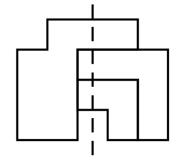




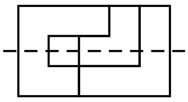
7. B, **D**, **E** et **I**



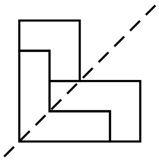
8. B, **D** et **F**

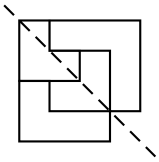


9. B, **D** et **G**

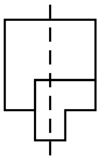


10. B, **D** et **I**

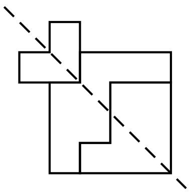


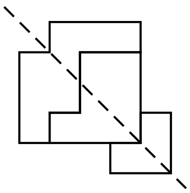


11. B et **E**

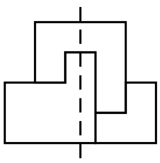


12. B, **E** et **C**

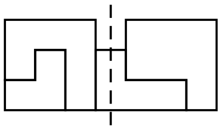




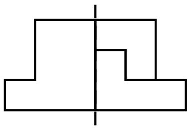
13. B, **E** et **G**

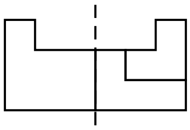


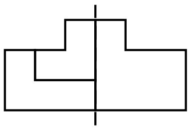
14. B, **E**, **G** et **I**

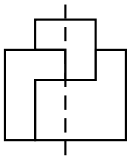


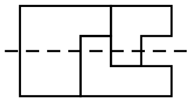
15. B, **E** et **I**

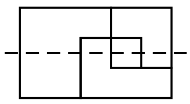




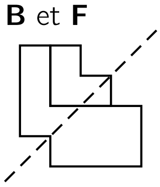




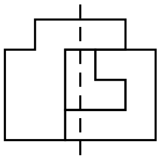




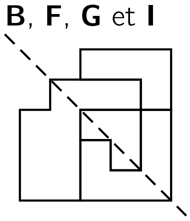
16. B et **F**



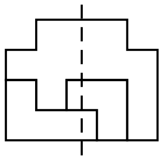
17. B, **F** et **G**



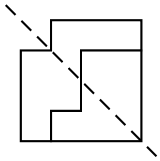
18. B, **F**, **G** et **I**



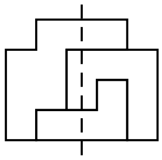
19. B, **H** et **I**



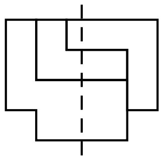
20. C et **E**



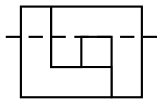
21. C, **H** et **I**



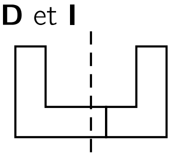
22. D, **F** et **I**



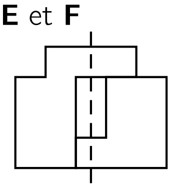
23. D et **G**



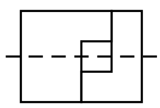
24. D et **I**

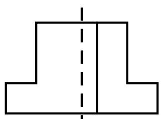


25. E et **F**



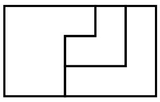
26. E et **I**



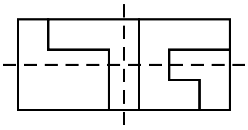


Réalise au moins une figure ayant **deux** axes de symétrie avec les pièces suivantes :

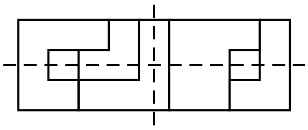
1. **B**, **D** et **E**



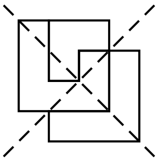
2. **B**, **D**, **E** et **G**



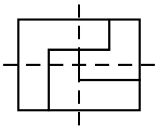
3. **B**, **D**, **E**, **G** et **I**



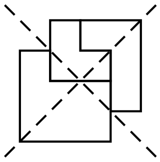
4. **B**, **D** et **G**



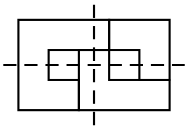
5. **B**, **D** et **I**



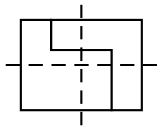
6. **B**, **E** et **I**



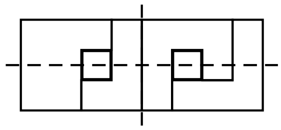
7. **B**, **G** et **I**



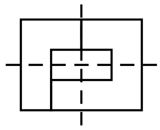
8. **D** et **E**



9. **D E**, **G** et **I**

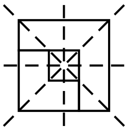


10. **G** et **I**

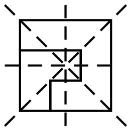


Réalise au moins une figure ayant **quatre** axes de symétrie avec les pièces suivantes :

1. **B** et **D**

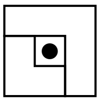


2. **B** et **G**

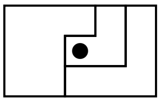


Réalise au moins une figure ayant un centre de symétrie avec les pièces suivantes :

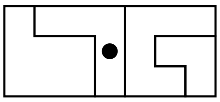
1. **B** et **D**



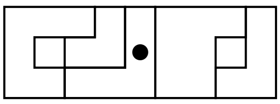
2. **B**, **D** et **E**



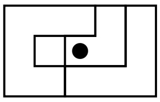
3. **B**, **D**, **E** et **G**

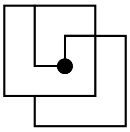


4. **B**, **D**, **E**, **G** et **I**

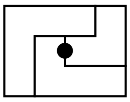


5. **B**, **D** et **G**

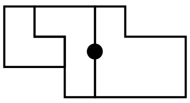


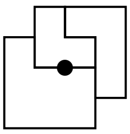


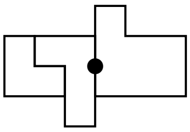
6. **B**, **D** et **I**



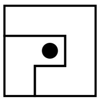
7. **B**, **E** et **I**



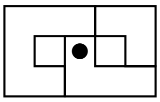




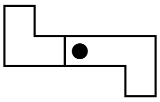
8. **B** et **G**



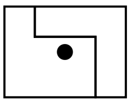
9. **B**, **G** et **I**



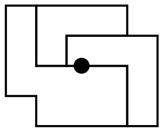
10. **B** et **I**



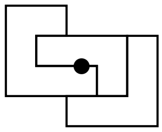
11. **D** et **E**



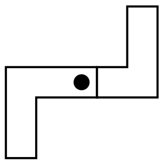
12. **D**, **F** et **I**



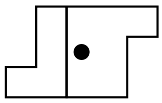
13. **D**, **G** et **I**



14. **D** et **I**



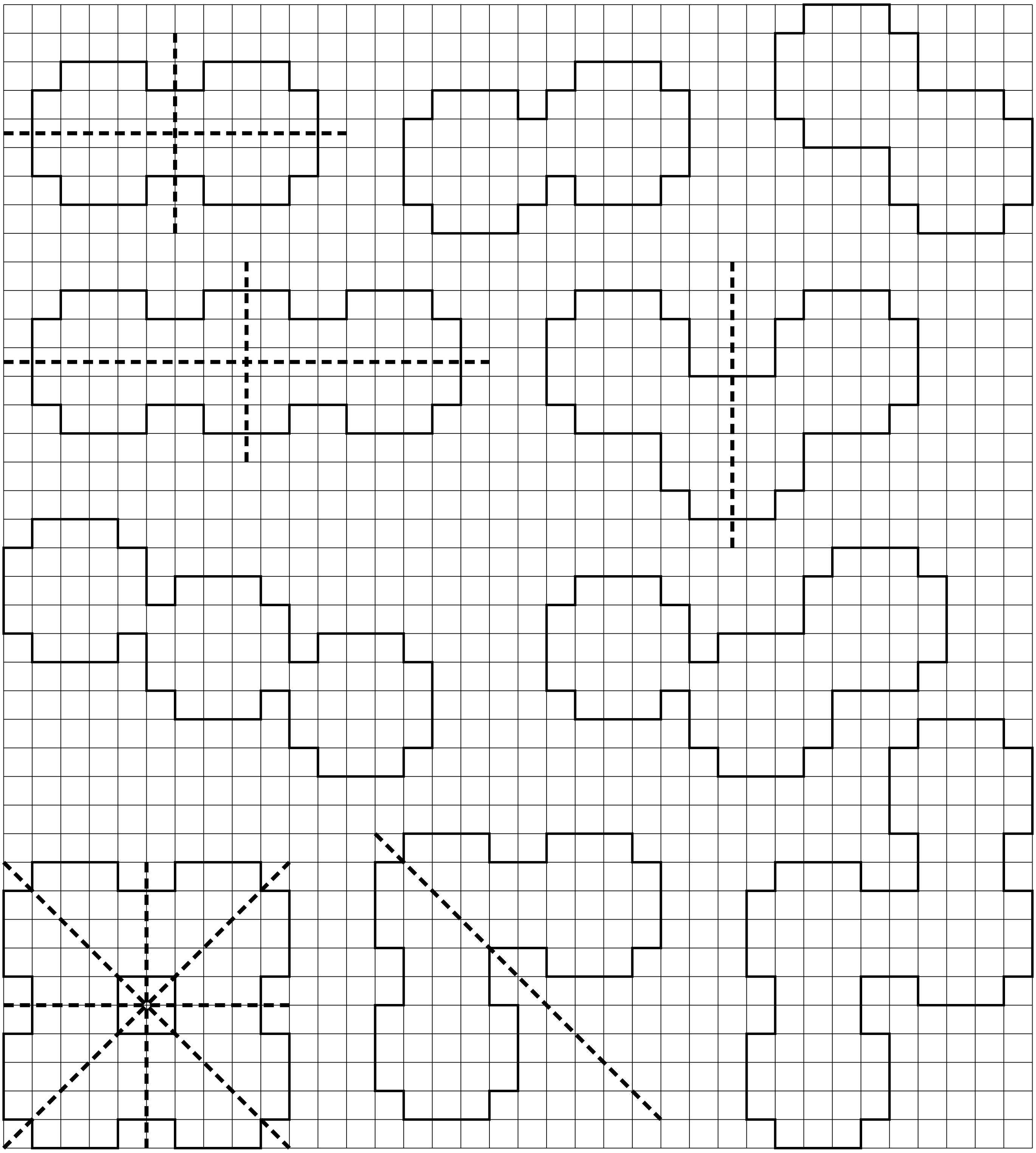
15. **E** et **I**



C18 : symétrie axiale et modèle (Solution)

IREM de Lyon

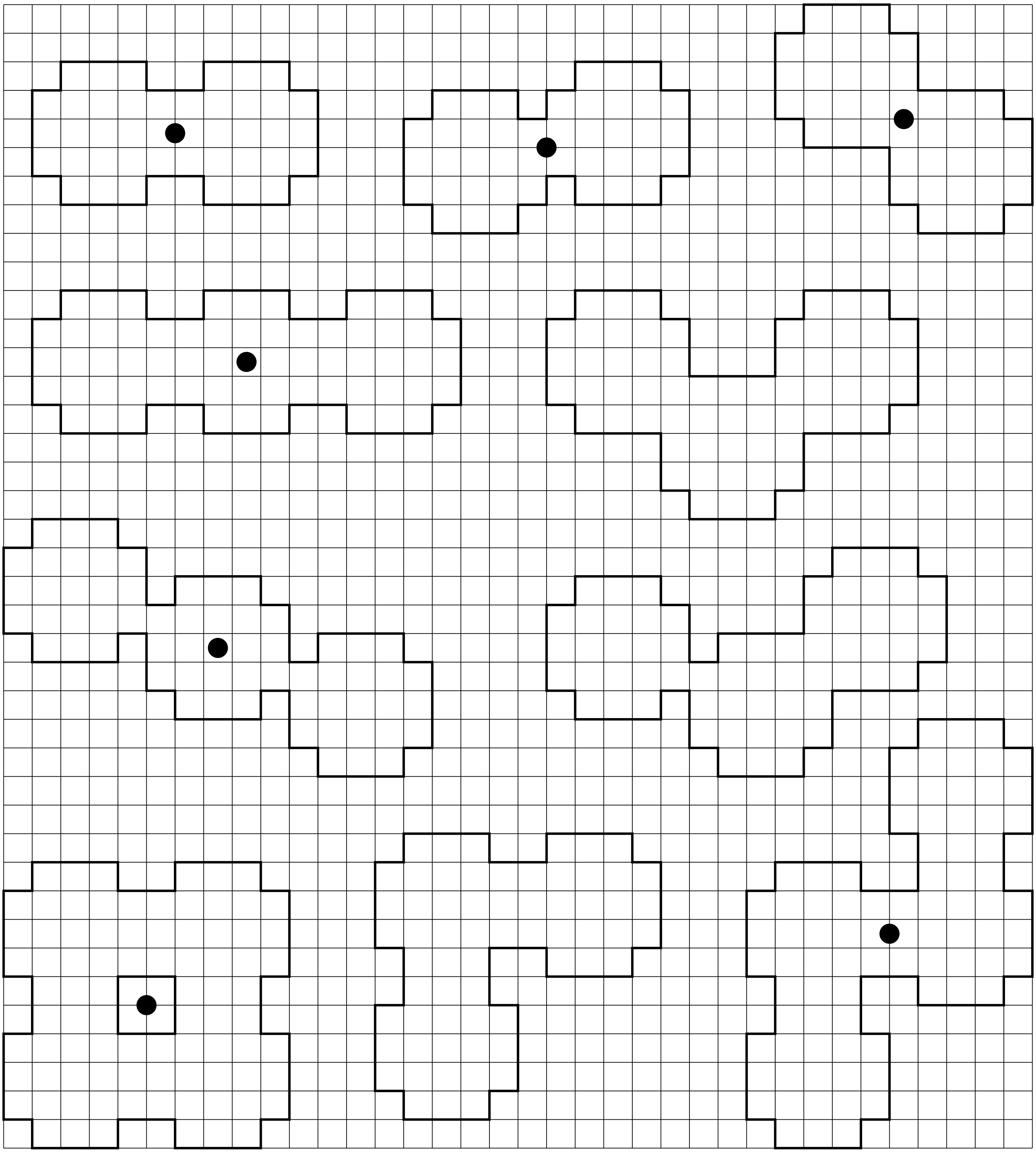
En assemblant plusieurs modèles, on a obtenu diverses figures. Dessine leurs axes de symétrie quand ils existent.



C18 : symétrie centrale et modèle (Solution)

IREM de Lyon

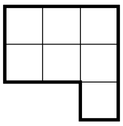
En assemblant plusieurs modèles, on a obtenu diverses figures. Dessine leur centre de symétrie quand il existe.



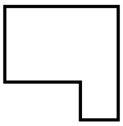
C18 : assemblages (Solution)

Il peut y avoir d'autres solutions !

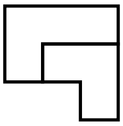
Construis les figures données en utilisant des combinaisons différentes de pièces.



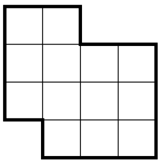
E



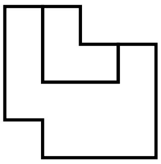
B et **I**



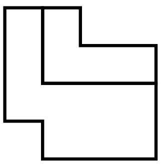
....



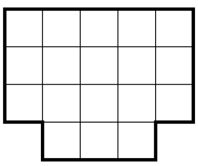
A et **B**



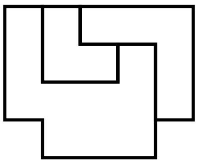
F et **I**



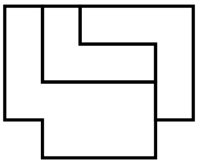
....



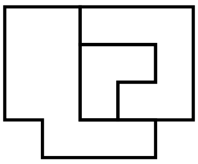
A, **B** et **D**



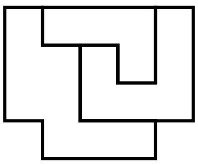
D, **F** et **I**



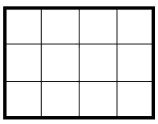
B, **F** et **G**



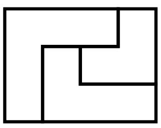
C, **H** et **I**



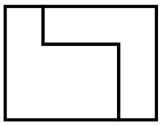
....



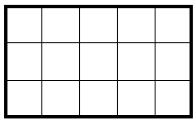
B, **D** et **I**



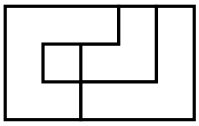
D et **E**



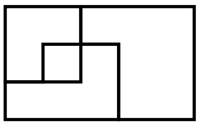
....



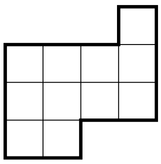
B, **D** et **G**



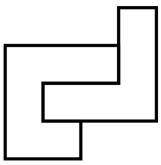
B, **E** et **I**



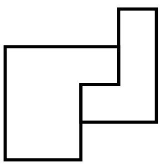
....



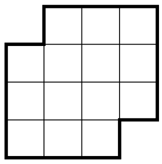
D et **G**



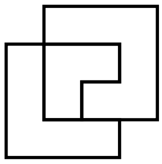
E et **I**



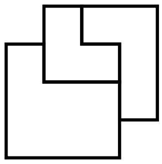
....



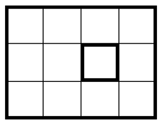
B, **D** et **G**



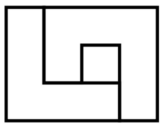
B, **E** et **I**



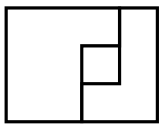
....



D et **G**

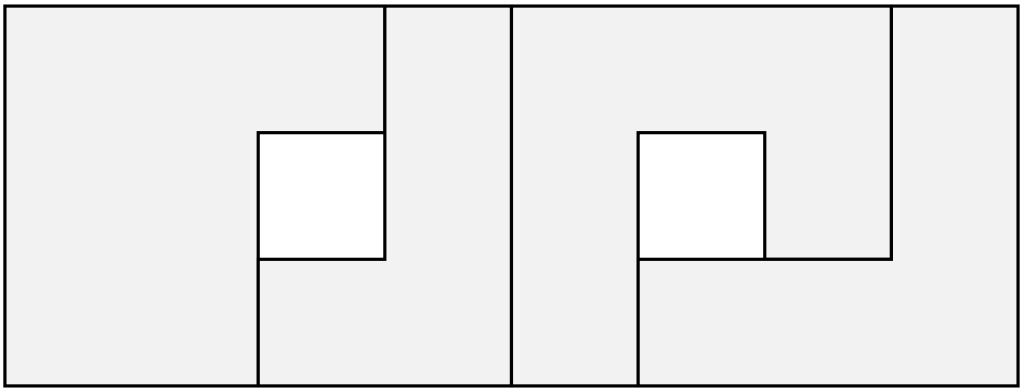


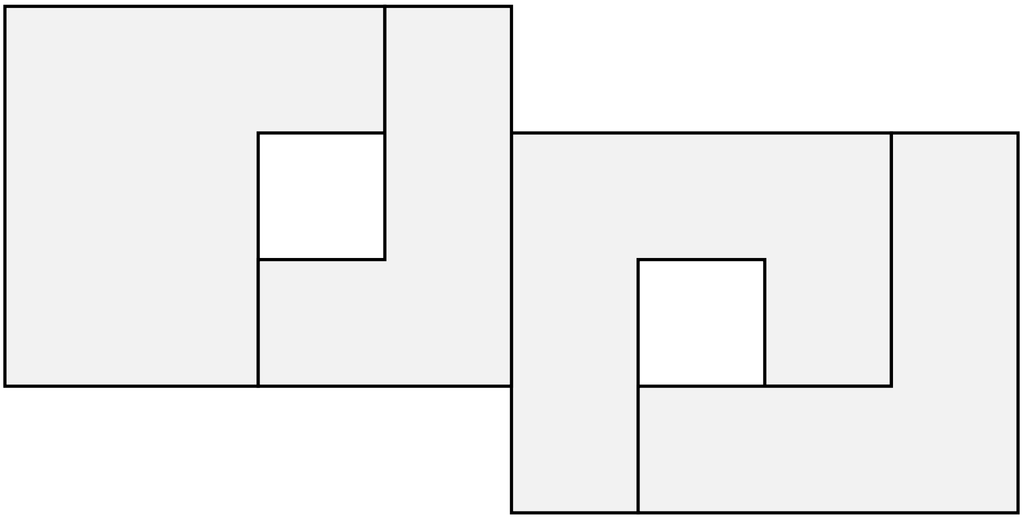
E et **I**

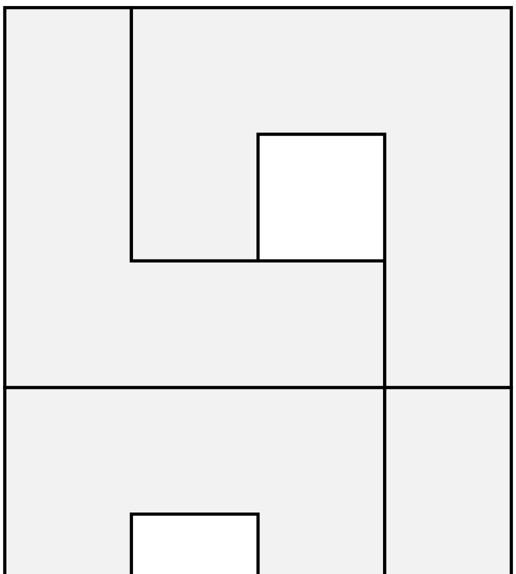


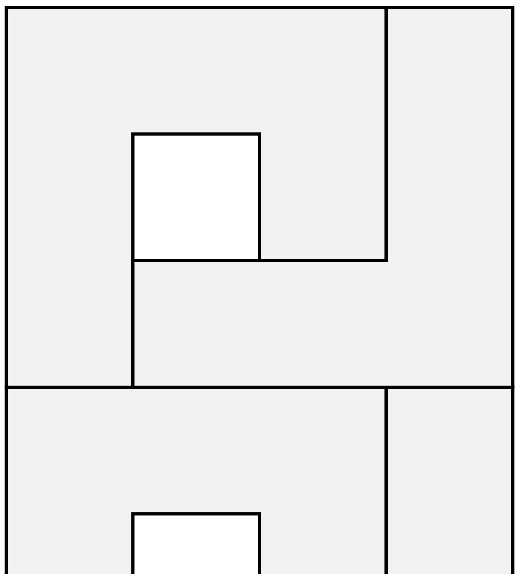
Les plateaux de l'énoncé permettent d'utiliser les pièces données en page 103.

C18 : assemblage « GIDE (Des solutions) »







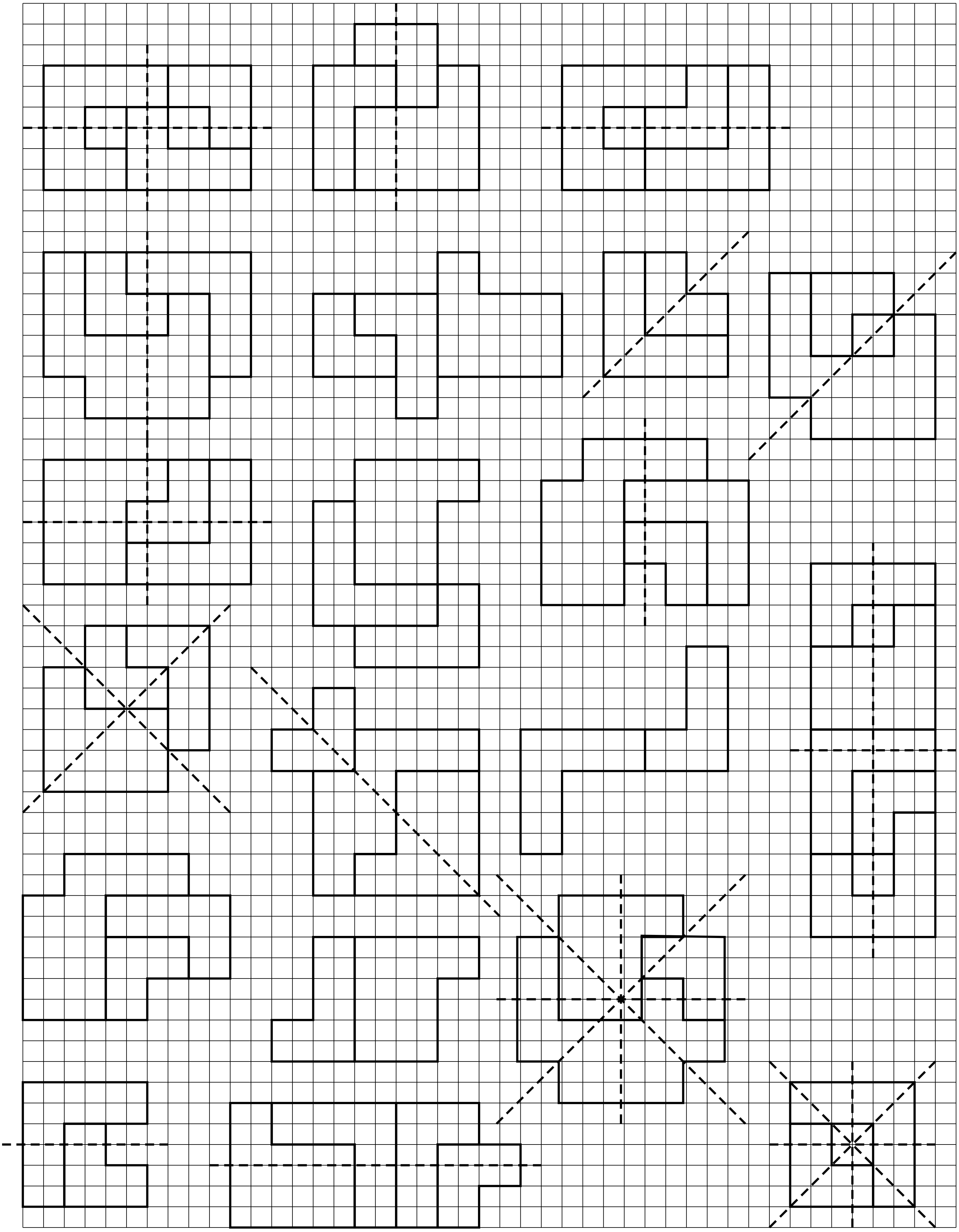


Les plateaux permettent d'utiliser les pièces données en page 103.

Par ailleurs, les quatre plateaux admettent un ou deux axes de symétrie ou un centre de symétrie.

C18 : symétrie axiale (Solution)

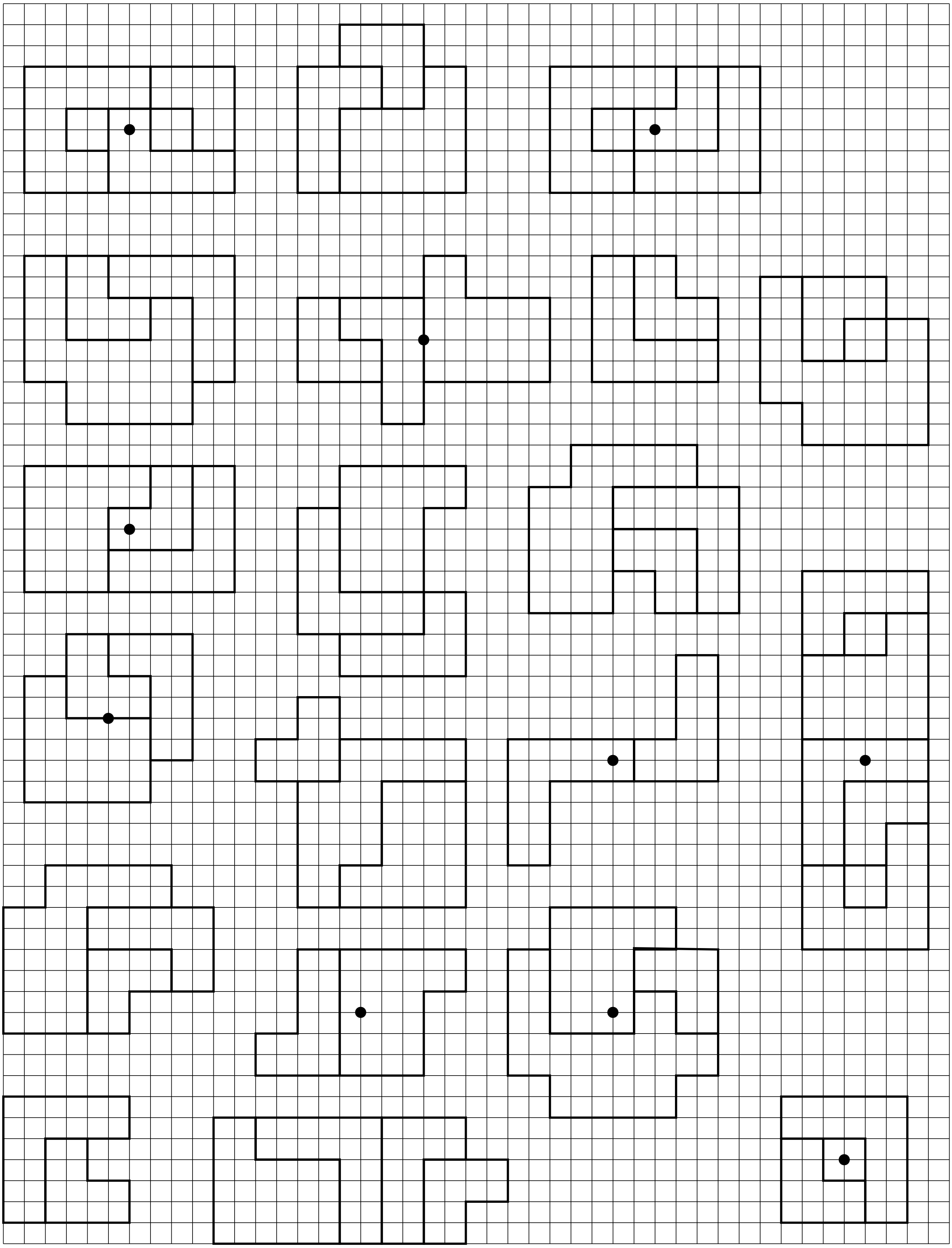
En assemblant certaines pièces, on a obtenu diverses figures. Dessine leur(s) axes de symétrie quand ils existent.



C18 : symétrie centrale (Solution)

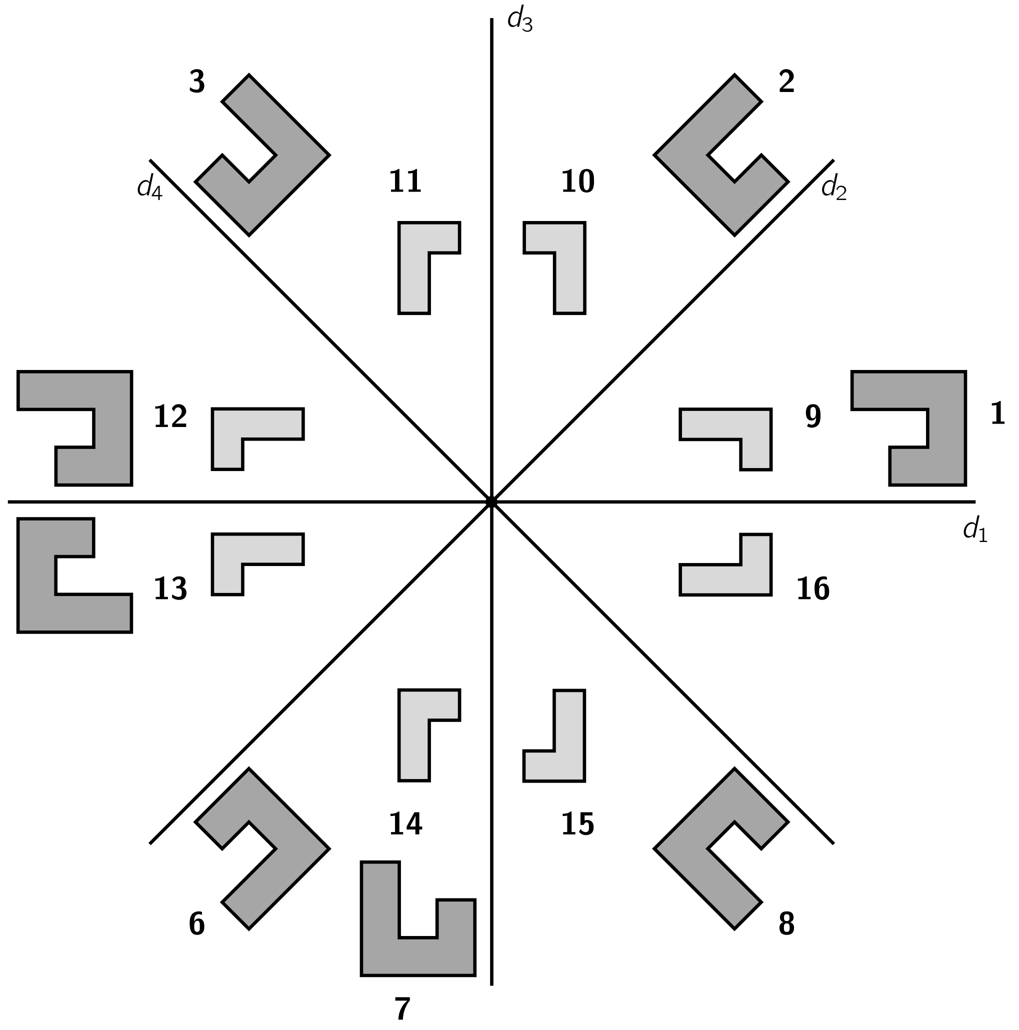
IREM de Lyon

En assemblant certaines pièces, on a obtenu diverses figures. Dessine leur centre de symétrie quand il existe.



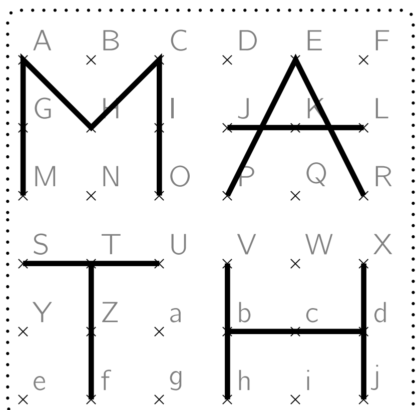
C18 : symétrie axiale et Vrai/Faux (1) (Solution)

IREM de Lyon



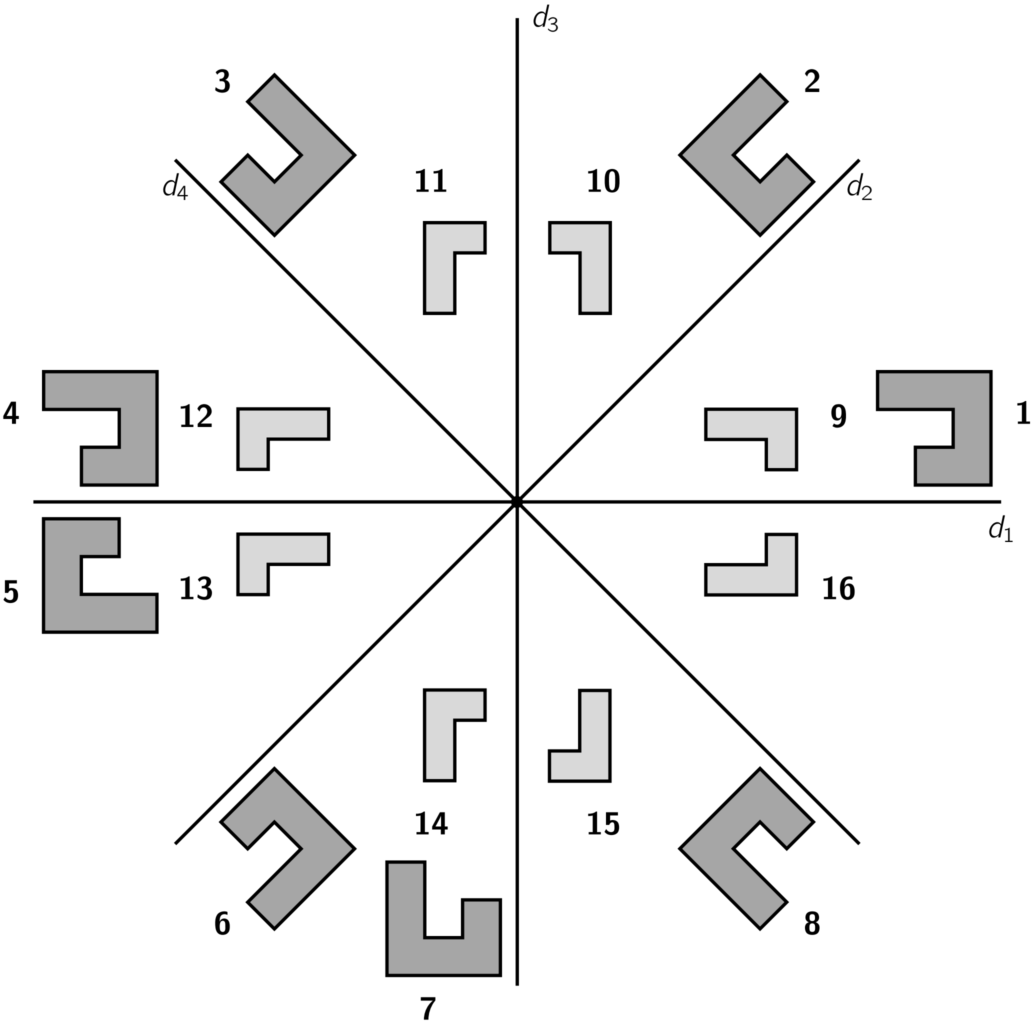
Si tu penses que la première phrase ci-dessous est vraie, trace dans le cadre de droite le segment [A M] ; si tu penses qu'elle est fausse, trace le segment [A N]. Et ainsi de suite.

	Vrai	Faux
9 est l'image de **16** dans la symétrie axiale d'axe d_1 .	[A M]	
11 est l'image de **10** dans la symétrie axiale d'axe d_3 .	[A H]	
3 est l'image de **8** dans la symétrie axiale d'axe d_4 .		[X j]
6 est l'image de **8** dans la symétrie axiale d'axe d_3 .	[C O]	
12 est l'image de **15** dans la symétrie axiale d'axe d_2 .	[S U]	
14 est l'image de **15** dans la symétrie axiale d'axe d_3 .		[T f]
12 est l'image de **11** dans la symétrie axiale d'axe d_4 .	[E R]	
13 est l'image de **12** dans la symétrie axiale d'axe d_1 .		[V h]
6 est l'image de **3** dans la symétrie axiale d'axe d_1 .	[C H]	
4 est l'image de **5** dans la symétrie axiale d'axe d_1 .		[b d]
10 est l'image de **12** dans la symétrie axiale d'axe d_4 .		[J L]
1 est l'image de **7** dans la symétrie axiale d'axe d_4 .	[E P]	



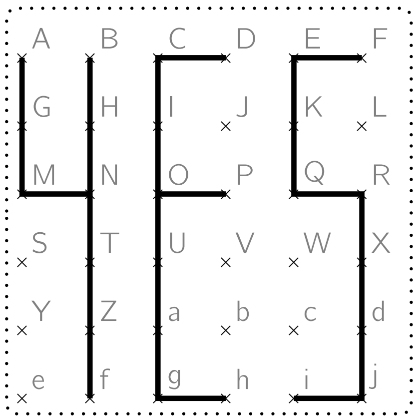
C18 : symétrie axiale et Vrai/Faux (2) (Solution)

IREM de Lyon



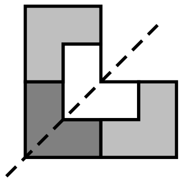
Si tu penses que la première phrase ci-dessous est vraie, trace dans le cadre de droite le segment [A M] ; si tu penses qu'elle est fausse, trace le segment [A N]. Et ainsi de suite.

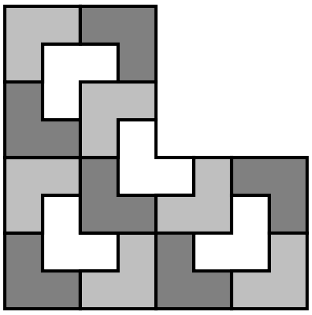
	Vrai	Faux
9 est l'image de **16** dans la symétrie axiale d'axe d_1 .	[A M]	
11 est l'image de **10** dans la symétrie axiale d'axe d_3 .	[E Q]	
3 est l'image de **8** dans la symétrie axiale d'axe d_4 .		[g h]
6 est l'image de **8** dans la symétrie axiale d'axe d_3 .	[R j]	
12 est l'image de **15** dans la symétrie axiale d'axe d_2 .	[C g]	
14 est l'image de **15** dans la symétrie axiale d'axe d_3 .		[C D]
12 est l'image de **11** dans la symétrie axiale d'axe d_4 .	[E F]	
13 est l'image de **12** dans la symétrie axiale d'axe d_1 .		[O P]
6 est l'image de **3** dans la symétrie axiale d'axe d_1 .	[B f]	
4 est l'image de **5** dans la symétrie axiale d'axe d_1 .		[i j]
10 est l'image de **12** dans la symétrie axiale d'axe d_4 .		[M N]
1 est l'image de **7** dans la symétrie axiale d'axe d_4 .	[Q R]	

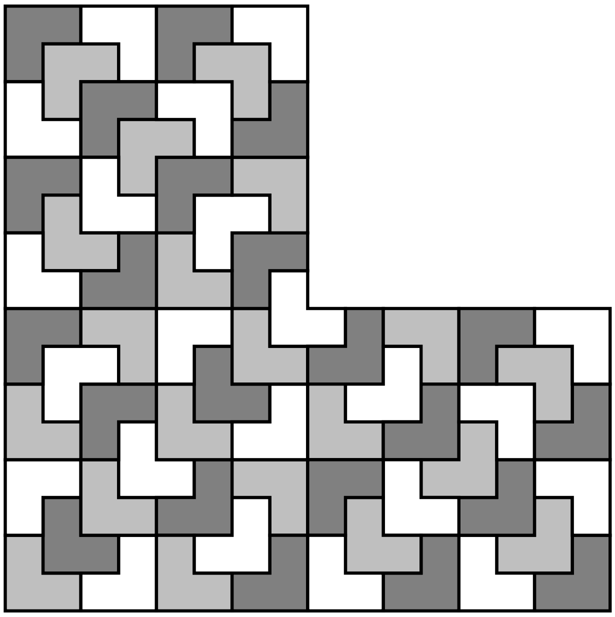


C18 : agrandissement et coloriage (Solution)

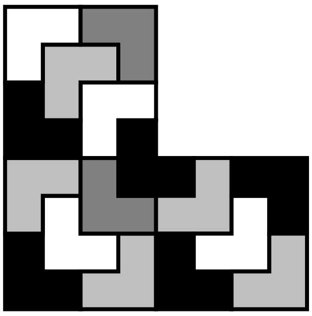
Voici des solutions avec des coloriages symétriques.

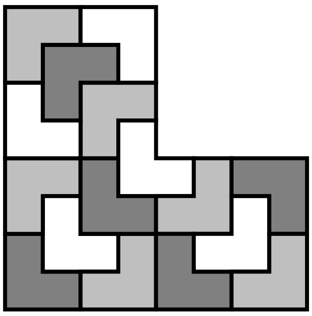


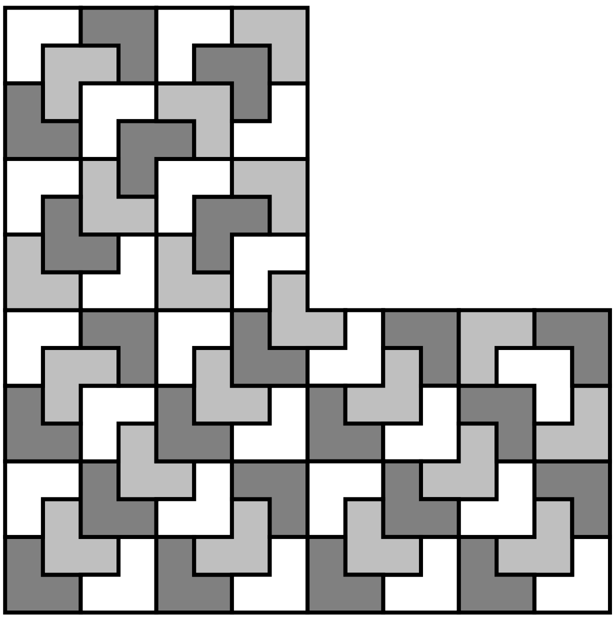




Voici des productions de coloriages non symétriques, faites par des élèves de CE2, CM1 et CM2, extraites de l'article « Symétrique ou non symétrique ? », François Drouin, *Le Petit Vert*, n° 135, Septembre 2018.
L'une des productions a quatre couleurs.

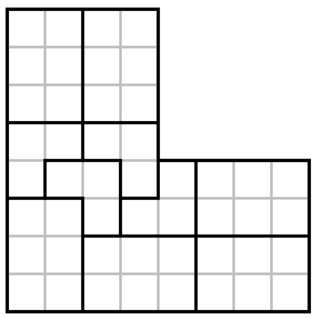






Remarques.

- Un dessin à l'échelle 2 s'obtient par exemple en le recouvrant par quatre dessins à l'échelle 1 ; un dessin à l'échelle 4 s'obtient par exemple en le recouvrant par quatre dessins à l'échelle 2 ; etc. De façon générale, un dessin à l'échelle $(2\,n)$ s'obtient par exemple en le recouvrant par quatre dessins à l'échelle n. Il y a d'autres possibilités !
- Dans le début de solution ci-contre, il y a six rectangles de dimensions 3×2. Or chacun d'eux peut être recouvert de deux façons différentes par deux L. Donc la solution n'est pas unique.



			336
15	206	115	336
212	112	12	336
109	18	209	336
336	336	336	336

15	quinze	6
206	deux-cent-six	11
115	cent-quinze	10
212	deux-cent-douze	13
112	cent-douze	9
12	douze	5
109	cent-neuf	8
18	dix-huit	7
209	deux-cent-neuf	12

			27
6	11	10	27
13	9	5	27
8	7	12	27
27	27	27	27

. . . .

75	266	175
272	172	72
169	78	269

$S = 516$

14	19	18
21	17	13
16	15	20

$S' = 51$

95	286	195
292	192	92
189	98	289

$S = 576$

17	22	21
24	20	16
19	18	23

$S' = 60$

(Source : `http://villemin.gerard.free.fr/Wwwgvmm/CarreMag/Alphamag.htm`)

203	2	104
4	103	202
102	204	3

$S = 309$

13	4	10
6	9	12
8	14	5

$S' = 27$

107	9	208
209	108	7
8	207	109

$S = 324$

8	4	12
12	8	4
4	12	8

$S' = 24$

(Source : `http://www.recreomath.qc.ca/dict_alphamagique_carre.htm`)

. . . .

Un carré alphagéomagique

twenty-five	two	eighteen
eight	fifteen	twenty-two
twelve	twenty-eight	five

25	2	18
5	15	22
12	28	5

$S = 45$

10	3	8
5	7	9
6	11	4

$S' = 21$

2. Une formule possible est **=B2+B3+B4+B5** .
Une autre formule possible est **=SOMME(B2:B5)** .
Cette somme vaut 34.

3. Une formule possible est **=B2+C2+D2+E2** .
Une autre formule possible est **=SOMME(B2:E2)** .

4. En cellule **F6**, une formule possible est **=B2+C3+D4+E5** .
En cellule **F1**, une formule possible est **=B5+C4+D3+E2** .

5. Les quatre sommes des lignes horizontales, les quatre sommes des lignes verticales et les deux sommes des lignes diagonales sont constantes (et égales à 34).

6. Une formule possible est **=B2+B3+C2+C3** .
On constate que les neuf sommes sont égales (à 34).

7. On saisit respectivement les formules **=B2+D4** , **=C3+E5** , **=B5+D3** et **=C4+E2** .
Les quatre sommes sont constantes, et égales à 17.
17 est la moitié de 34. (Ce résultat se généralise.)

8. On saisit les formules correspondantes suivantes : **=B2+C5+D4+E3**, **=E2+B3+C4+D5**, **=E5+B4+C3+D2**, **=B5+C2+D3+E4**, **=B3+C2+D5+E4** et **=B4+C5+D2+E3**

9. La toile donne de nombreux exemples !

On peut quand même signaler le carré magique, plus « historique », appelé « Chautisa Yantra » (8) dans la ville de Khajuraho, en Inde, caractérisé comme le plus ancien carré magique d'ordre 4 (puisqu'il daterait du onzième siècle). Sur le temple où il est gravé, il est accompagné d'une phrase souhaitant la victoire à un prince...

7	12	1	14
2	13	8	11
16	3	10	5
9	6	15	4

Et aussi le carré magique d'Al-Būnī, du treizième siècle :

8	11	14	1
13	2	7	12
3	16	9	6
10	5	4	15

Remarque. Lee Sallows a utilisé le carré magique normal plus-que-parfait numéroté 34 dans sa galerie.

1	14	7	12
15	4	9	6
10	5	16	3
8	11	2	13

(8). Le mot « chautisa » signifie 34 en hindi.

C46 : des égalités et du calcul algébrique (Solution)

IREM de Lyon

1. Des premiers résultats

Les trois premières sommes sont toujours égales à 34 et les deux dernières sommes, toujours égales à 0.

2. Les preuves !

- Les égalités (3) et (4) traduisent le fait que la somme des quatre nombres dans une ligne vaut 34 ; les égalités (3) et (4) traduisent le fait que la somme des quatre nombres dans une diagonale vaut 34.

  $(a+f+k+q)+(e+f+g+h)+(i+j+k+l)+(m+j+g+d)=34+34+34+34$.
  Donc $a+e+i+m+(f+k)+(f+g)+(j+k)+(j+g)+q+l+h+d=4\times 34$.
  Or $a+e+i+m=34$, $q+l+h+d=34$ et $(f+k)+(f+g)+(j+k)+(j+g)=2\,(f+g+k+l)$.
  Donc $34+2\,(f+g+j+k)+34=4\times 34$.
  Donc $2\,(f+g+j+k)=4\times 34-34-34$. Donc $2\,(f+g+j+k)=2\times 34$.
  Par conséquent, $f+g+j+k=34$.

- $(a+f+k+q)+(m+j+g+d)=34+34$ d'après (1) et (4).
  Donc $a+d+m+q+f+k+j+g=34+34$.
  Or $f+g+j+k=34$ d'après (5).
  Par conséquent, $a+d+m+q=34$.

- Les égalités (7) et (8) traduisent le fait que la somme des quatre nombres dans une colonne vaut 34.

  $b+f+j+n+c+g+k+p=34+34$.
  Donc $b+c+n+p+f+j+g+k=34+34$.
  Or $f+j+g+k=34$ d'après (7).
  Par conséquent, $b+c+n+p=34$.

- L'égalité (10) traduit le fait que la somme des quatre nombres dans une ligne vaut 34.

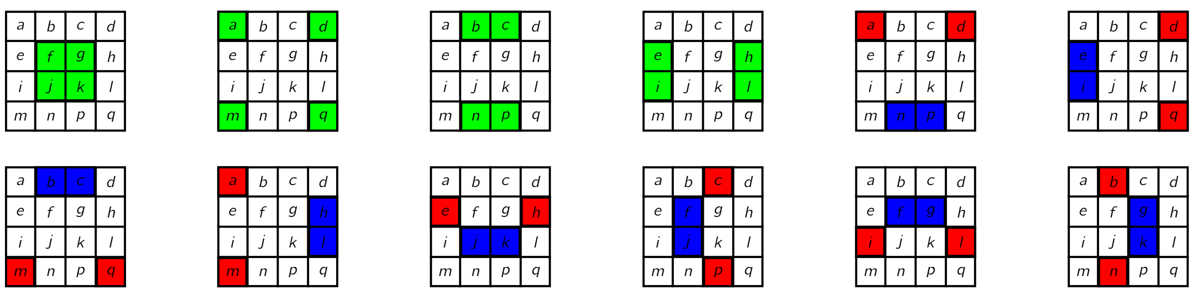
  $(a+b+c+d)-(b+c+n+p)=34-34$.
  Donc $a+b+c+d-b-c-n-p=0$.
  Donc $a+d-n-p=0$.
  Par conséquent, $a+d=n+p$.

- $(b+c+n+p)-(b+f+j+n)=34-34$.
  Donc $b+c+n+p-b-f-j-n=0$.
  Donc $c+p-f-j=0$.
  Par conséquent, $c+p=f+j$.

3. D'autres égalités

semblables à (9) :	• $e+h+i+l=34$		
semblables à (11) :	• $d+q=e+i$	• $m+q=b+c$	• $a+m=h+l$
semblables à (12) :	• $e+h=j+k$	• $i+l=f+g$	• $b+n=g+k$

Bilan en images



(Les couleurs rouge et bleu traduisent des égalités dites « égalités chapeaux ».)

C46 : calcul littéral (Solution)

IREM de Lyon

1	14	7	12
15	4	9	6
10	5	16	3
8	11	2	13

Carré lié à C34

4	5	10	15
14	11	8	1
7	2	13	12
9	16	3	6

Carré lié à C46

C46 : calcul littéral (Solution)

IREM de Lyon

1	14	7	12
15	4	9	6
10	5	16	3
8	11	2	13

Carré lié à C34

4	5	10	15
14	11	8	1
7	2	13	12
9	16	3	6

Carré lié à C46

C46 : calcul littéral (Solution)

IREM de Lyon

1	14	7	12
15	4	9	6
10	5	16	3
8	11	2	13

Carré lié à C34

4	5	10	15
14	11	8	1
7	2	13	12
9	16	3	6

Carré lié à C46

C46 : calcul littéral (Solution)

IREM de Lyon

1	14	7	12
15	4	9	6
10	5	16	3
8	11	2	13

Carré lié à C34

4	5	10	15
14	11	8	1
7	2	13	12
9	16	3	6

Carré lié à C46

1. **Des booléens**

a.
- K[3][1] est le nombre situé à l'intersection de la ligne 1 et de la colonne 3 du carré. C'est 16, et non 1. La valeur est donc `False`.
- `K[2][0] + K[0][2]` = 7 + 10 = 17. La valeur est donc `True`.
- La valeur de `K[3][0] == 9` est `True` et la valeur de `K[0][3] == 15` est `True`. Donc la valeur est `True`.
- La valeur de `K[0][0] == 4` est `True`, la valeur de `K[1][1] == 11` est `True` et la valeur de `K[3][3] == 6` est `False` (puisque `K[3][3]` = 13). Il y a au moins une valeur `False` parmi les trois valeurs donc la valeur est `False`.

b.
- `K[0][0] + K[0][3] + K[3][3] + K[3][0]` = 4 + 15 + 6 + 9 = 34. La fonction retourne `True`.
- `K[1][0] + K[0][1]` = 14 + 5 =19, et non 17. La fonction retourne `False`.

2. **Le carré est-il magique ?**

a. La somme des entiers de 1 à 16 est égale à $1+2+3+\cdots+16$ $(= 16 \times 17 \div 2) = 136$.
Puisque les entiers de 1 à 16 sont utilisés, et qu'ils sont répartis sur quatre lignes ayant la même somme S, on en déduit que S est égal à $136 \div 4 = 34$.

b.
- Test sur une ligne :

```
def L(K,i) :
    return K[i][0] + K[i][1] + K[i][2] + K[i][3] == 34
```

La saisie de `L(K,0)` retourne `True`, ce qui indique que la somme des quatre nombres dans la ligne 0 est bien égale à la constante 34.

Remarque. On peut aussi saisir :

```
def L(K,i) :
    test = (K[i][0] + K[i][1] + K[i][2] + K[i][3] == 34)
    return test
```

- Test sur l'ensemble des lignes :

```
def En_ligne(K) :
    return L(K,0) and L(K,1) and L(K,2) and L(K,3)
```

La saisie de `En_ligne(K)` retourne `True`, ce qui indique que la somme des quatre nombres sur chaque ligne est bien égale à la constante 34.

Remarque. Le programme ci-dessous donne le même résultat :

```
def En_ligne(K):
    for i in range(4):
        if not L(K,i) :
            return False
    return True
```

Remarque. Des élèves, ayant du mal avec les booléens, mais intéressés par l'activité, ont proposé la démarche suivante (et fait de même pour les colonnes et les diagonales).

```
h0 = K[0][0] + K[0][1] + K[0][2] + K[0][3]
h1 = K[1][0] + K[1][1] + K[1][2] + K[1][3]
h2 = K[2][0] + K[2][1] + K[2][2] + K[2][3]
h3 = K[3][0] + K[3][1] + K[3][2] + K[3][3]
```

```
if h0 == 34 :
    print("La somme dans la ligne 0 est 34.")
if h1 == 34 :
    print("La somme dans la ligne 1 est 34.")
if h2 == 34 :
    print("La somme dans la ligne 2 est 34.")
if h3 == 34 :
    print("La somme dans la ligne 3 est 34.")
if h0 == 34 and h1 == 34 and h2 == 34 and h3 == 34 :
    print("La somme dans chacune des quatre lignes est 34.")
```

Remarque. Des élèves, maîtrisant la boucle `for`, ont proposé la démarche suivante (adaptée aux colonnes et aux diagonales) (9) :

```
def L(K,i) :
    som_ligne = 0
    for m in range(3) :
        som_ligne = som_ligne + K[i][m]
    test = (som_ligne == 34)
    return test
```

c. *Test sur les colonnes*

- Test sur une colonne :

```
def C(K,j) :
    return(K[0][j] + K[1][j] + K[2][j] + K[3][j] == 34)
```

La saisie de `C(K,0)` retourne `True`, ce qui indique que la somme des quatre nombres dans la colonne 0 est bien égale à la constante 34.

- Test sur l'ensemble des colonnes :

```
def En_colonne(K) :
    return C(K,0) and C(K,1) and C(K,2) and C(K,3)
```

La saisie de `En_colonne(K)` retourne `True`, ce qui indique que la somme des quatre nombres sur chaque colonne est bien égale à la constante 34.

d. Test sur les diagonales

- Test sur la diagonale montante

```
def Dm(K) :
    return(K[3][0] + K[2][1] + K[1][2] + K[0][3] == 34)
```

La saisie de `diagm(K)` retourne `True`, ce qui indique que la somme des quatre nombres sur la diagonale montante est bien égale à la constante 34.

- Test sur la diagonale descendante

```
def Dd(K) :
    return(K[0][0] + K[1][1] + K[2][2] + K[3][3] == 34)
```

- Test sur l'ensemble des deux diagonales

```
def En_diagonale(K) :
    return Dm(K) and Dd(K))
```

La saisie de `En_diagonale(K)` retourne `True`, ce qui indique que la somme des quatre nombres sur chacune des deux diagonales est bien égale à la constante 34.

(9). Il leur a fallu trouver que, pour la diagonale descendante, on a `i = j` et que, pour la diagonale montante, on a `j = 3 − i`.

e. Bilan

On crée enfin la fonction `magique(K)` pour savoir si les trois conditions (somme en ligne, en colonne et en diagonale) sont respectées.

```
def magique(K) :
    return En_ligne(K) and En_colonne(K) and En_diagonale(K)
```

La saisie de `magique(K)` retourne `True`, que les trois conditions sont bien respectées, c'est-à-dire que ce carré est donc magique (de constante magique 34).

Remarque. Si le carré n'est pas normal, on peut créer la fonction `constante(K)` ci-contre, qui permet de calculer la constante magique à obtenir (en utilisant la division avec quotient entier (//), pour éviter les problèmes dans les tests d'égalité). Il suffit alors de remplacer plus haut 34 par `constante(K)` pour vérifier si le carré est magique.

```
def constante(K):
    c = 0
    for i in range(4):
        for j in range(4):
            c = c + K[i][j]
    c = c//4
    return c
```

3. D'autres propriétés de ce carré magique

a. Les nombres d'un carré 2×2 sont de la forme

K[i][j]	K[i][j+1]
K[i+1][j]	K[i+1][j+1]

, avec $0 \leqslant$ `i`, `j` $\leqslant 2$.

```
def carre22(K) :
    test = True
    for u in range(3) :
        for v in range(3):
            test = test and K[i][j] + K[i][j+1] + K[i+1][j] + K[i+1][j+1] == 34
    return test
```

Remarque. On trouve de même que la somme des quatre nombres aux sommets de tous les carrés 3×3 et 4×4 vaut aussi 34.

b. `K[0][0] + K[2][2]` = 4 + 13 = 17
`K[1][1] + K[3][3]` = 11 + 6 = 17
`K[3][0] + K[1][2]` = 9 + 8 = 17
`K[2][1] + K[0][3]` = 2 + 15 = 17

Remarque. Les résultats précédents impliquent qu'il y a quatre autres couples de cases distantes de 2 sur des segments parallèles aux diagonales :

`K[0][1] + K[2][3]` = 5 + 12 = 17
`K[1][0] + K[3][2]` = 14 + 3 = 17
`K[2][0] + K[0][2]` = 7 + 10 = 17
`K[3][1] + K[1][3]` = 16 + 1 = 17

Conséquence. On retrouve toutes les propriétés illustrées en page 207 et énoncées en page 208.

4. Les 86 dispositions

a. Les 86 quadruplets

Les seize nombres de 0 à 15 sont écrits de gauche à droite puis de haut en bas. Il y a quatre lignes (qui commencent par 0, 4, 8 et 12) : pour connaître le rang `i` de la ligne (compris entre 0 et 3) où se trouve `R(n)`, on calcule le quotient entier de `n` par 4. Cette ligne connue, pour connaître le rang `j` de la colonne (compris entre 0 et 3) où se trouve `R(n)`, on calcule le reste de la division euclidienne de `n` par 4. Ainsi, `R(n)` est le nombre `K[n//4][n%4]`.
D'où les fonctions `R(n)` et `quatre(K)` permettant de répondre à la question :

```
def R(n):
    return K[n//4][n%4]
def quatre(K):
    n = 0
    for a in range(13):
        for b in range(a + 1, 14):
            for c in range(b + 1, 15):
                for d in range(c + 1, 16):
                    if R(a) + R(b) + R(c) + R(d) == 34:
                        n = n + 1
                        print(n, R(a), R(b), R(c), R(d))
```

L'exécution de ce programme donne 86 sommes, dont les premières sont données ci-dessous.

(1, 4, 5, 10, 15)	(3, 4, 5, 13, 12)	(5, 4, 10, 14, 6)	(7, 4, 10, 8, 12)
(2, 4, 5, 14, 11)	(4, 4, 5, 9, 16)	(6, 4, 10, 11, 9)	(8, 4, 10, 7, 13)

On déduit que tout carré normal d'ordre 4 admet 86 façons d'obtenir la somme magique 34.
Mais ce n'est parce qu'un carré admet ces 86 façons qu'il est magique ! Pour s'en convaincre facilement, il suffit de penser au carré rempli de gauche à droite puis de haut en bas par les nombres de 1 à 16, dans l'ordre croissant.
De plus, d'un carré à un autre, celles-ci ne seront pas disposées de la même façon. (C'est pour cela que l'on parle dans la littéature sur ce thème de carré magique *plus-que-parfait*, *diabolique*, *panmagique*, etc.)

Remarque. On peut vérifier qu'il y a 86 possibilités d'obtenir 34 comme somme de quatre nombres en remplaçant en remplaçant `return K[n//4][n%4]` par `return n` dans la définition de `R(n)`. L'exécution de ce programme donne 86 sommes, dont les premières sont données ci-dessous.

(1, 1, 2, 15, 16)	(3, 1, 4, 13, 16)	(5, 1, 5, 12, 16)	(7, 1, 6, 11, 16)
(2, 1, 3, 14, 16)	(4, 1, 4, 14, 15)	(6, 1, 5, 13, 15)	(8, 1, 6, 12, 15)

b. Leur disposition

On introduit pour cela une liste `pos` (10), remplie initialement par seize 0.

```
pos = [0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0]
n = 0
for a in range(13):
    for b in range(a + 1, 14):
        for c in range(b + 1, 15):
            for d in range(c + 1, 16):
                if R(a) + R(b) + R(c) + R(d) == 34:
                    n = n + 1
                    pos[a], pos[b], pos[c], pos[d] = 1, 1, 1, 1
                    print(" ")
                    print(n)
                    for p in range(4) :
                        print(pos[4*p], pos[4*p+1], pos[4*p+2], pos[4*p+3])
                    pos[a], pos[b], pos[c], pos[d] = 0, 0, 0, 0
```

On trouvera une représentation imagée en page 207.

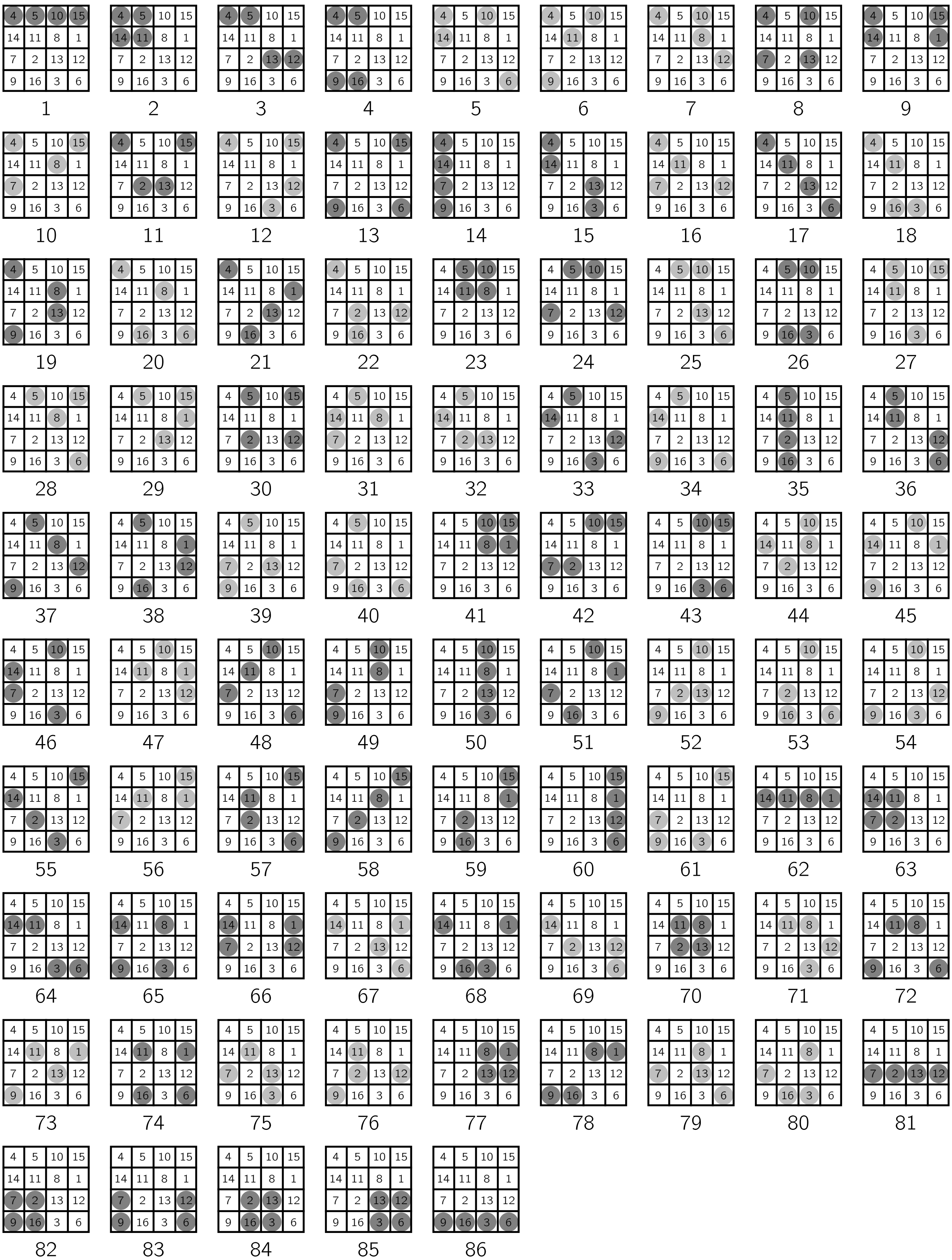
5. Avec d'autres carrés

Les six carrés sont magiques.
Le carré magique C 34 est plus-que-parfait.

(10). pos pour « position », car il s'agit de savoir où vont être placés les 0 et les 1.

C46 : quatre-vingt-six possibilités de somme 34 (Solution)

IREM de Lyon



Les (cinquante-deux) dispositions où les quatre nombres sont sur des disques colorés en gris sont communes à tous les carrés plus-que-parfaits. Les (trente-quatre) dispositions où les quatre nombres sont sur des disques colorés en gris clair complètent les précédentes et sont liées au carré géomagique C46.

Cinquante-deux dispositions géométriques particulières donnant la somme 34

Les nombres donnés repèrent la figure donnée en page 207.

Les deux carrés sont « plus-que-parfaits » et « diaboliques » (voir les définition en page 8). Ils ont dont les mêmes propriétés mais les dispositions des nombres dont la somme vaut 34 diffèrent ; celles de la page 207 sont liées au carré géomagique C46.

Il y a 86 configurations pour trouver une somme égale à 34. Parmi celles-ci, 52 sont des configurations géométriques liées au fait que le carré soit diabolique (et, de façon équivalente, que le carré soit plus-que-parfait, puisque l'ordre vaut 4).

- en ligne : **1**, **62**, **81** et **86**
- en colonne : **14**, **35**, **50** et **60**
- en diagonale : **17** et **58**
- dans tout carré 2×2 : **2**, **23**, **41**, **63**, **70**, **77**, **82**, **84** et **85**
- dans tout carré 3×3 : **8**, **30**, **65** et **74**
- dans tout carré 4×4 : **13**
- sur les six pandiagonales (appelées aussi « diagonales brisées ») : **21**, **33**, **37**, **48**, **51** et **55**
- « en domino » : **3**, **4**, **9**, **15**, **26**, **36**, **42**, **43**, **49**, **59**, **64**, **66**, **78** et **83**
- « en chapeau » : **11**, **19**, **24**, **38**, **46**, **57**, **68** et **72**

Certains résultats ont été démontrés en page 201 et d'autres résultats s'y trouvent.

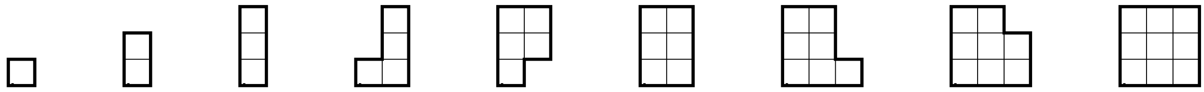
(Les autres configurations n'ont pas été retenues dans l'abondante littérature des carrés magiques.)

C57 : construction (Solution)

IREM de Lyon

Dans cette activité, tu vas construire le carré magique qui te permettra d'obtenir le carré géomagique C57 !

Tu disposes des neuf pièces suivantes :



1. Les aires des pièces, de gauche à droite, sont égales à 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9.

2. $1+2+3+4+5+6+7+8+9=45$

3. Les sommes en ligne sont toutes égales. Il y a trois lignes et la somme totale est égale à 45. Donc la somme des trois nombres d'une ligne, d'une colonne ou d'une diagonale vaut $45 \div 3 = 15$.

4. Il y a huit possibilités :

$1+5+9=15$ $\quad$ $2+4+9=15$ $\quad$ $2+6+7=15$ $\quad$ $3+5+7=15$

$1+6+8=15$ $\quad$ $2+5+8=15$ $\quad$ $3+4+8=15$ $\quad$ $4+5+6=15$

5. Tableau des occurrences :

Nombre	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Effectif	2	3	2	3	4	3	2	3	2

6. **a.** Elle va être utilisée quatre fois : une sur la diagonale « montante », une sur la diagonale « descendante », une sur la colonne du milieu et une sur la ligne du milieu.
Dans le tableau, seul le nombre 5 apparaît quatre fois. Le nombre au centre du carré est donc 5.

b. Elle va être utilisée trois fois : pour la case en haut à gauche, une fois sur une diagonale « descendante », une sur la colonne de gauche et une sur la ligne du haut.
Dans le tableau, les nombres 2, 4, 6 et 8 apparaissent quatre fois et seront dans les coins.

c. Elle va être utilisée trois fois : une fois en ligne et une fois en colonne.
Dans le tableau, les nombres 1, 3, 7 et 9 apparaissent deux fois et seront dans les milieux.

7. **a.** On écrit le nombre 5 (voir ci-dessous).

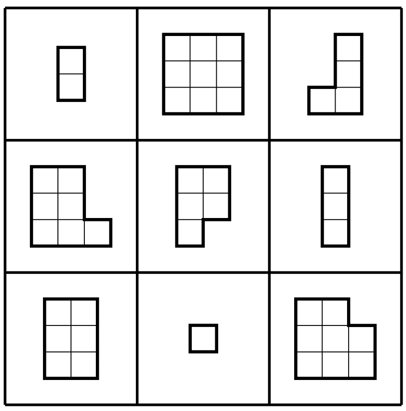
b. On écrit, par exemple, en haut à gauche, le nombre 2.
En bas à droite, on écrit donc le nombre 8.

c. On écrit, par exemple, 4 dans la case en haut à droite et 6 dans la case en bas à gauche.

d. On finit de compléter le tableau.

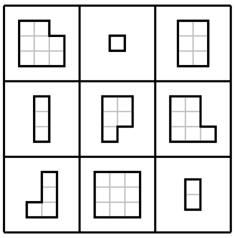
8. Le tableau des pièces est donné ci-dessous à droite.

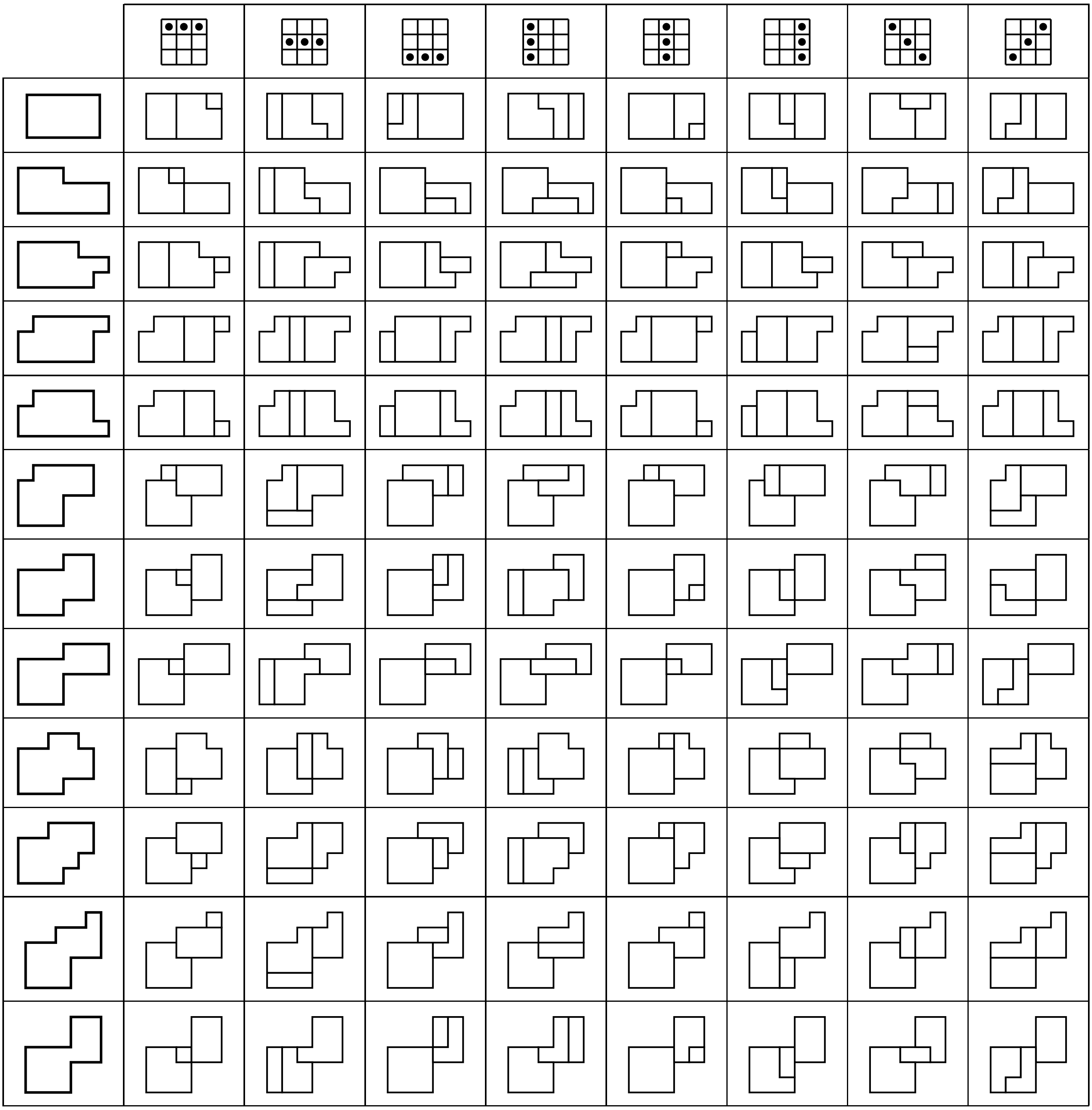
2	9	4
7	5	3
6	1	8



Remarque. Aux rotations et retournements près, la solution est unique.

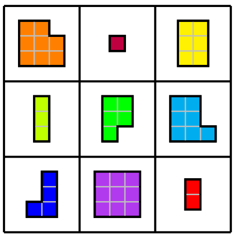
C57 : défi des quatre-vingt-seize plateaux (Solution)

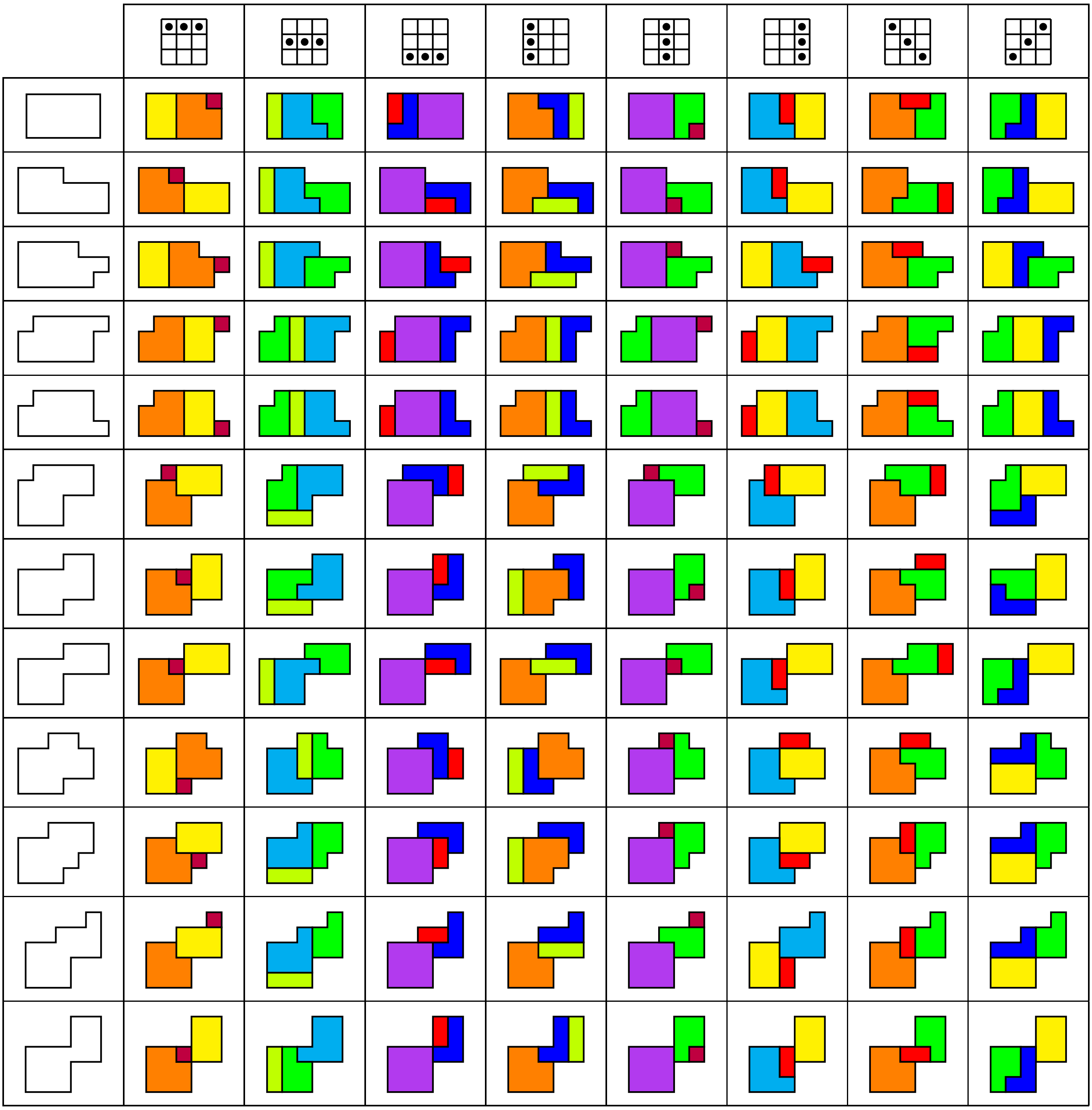




C57 : défi des quatre-vingt-seize plateaux (Solution en couleurs)

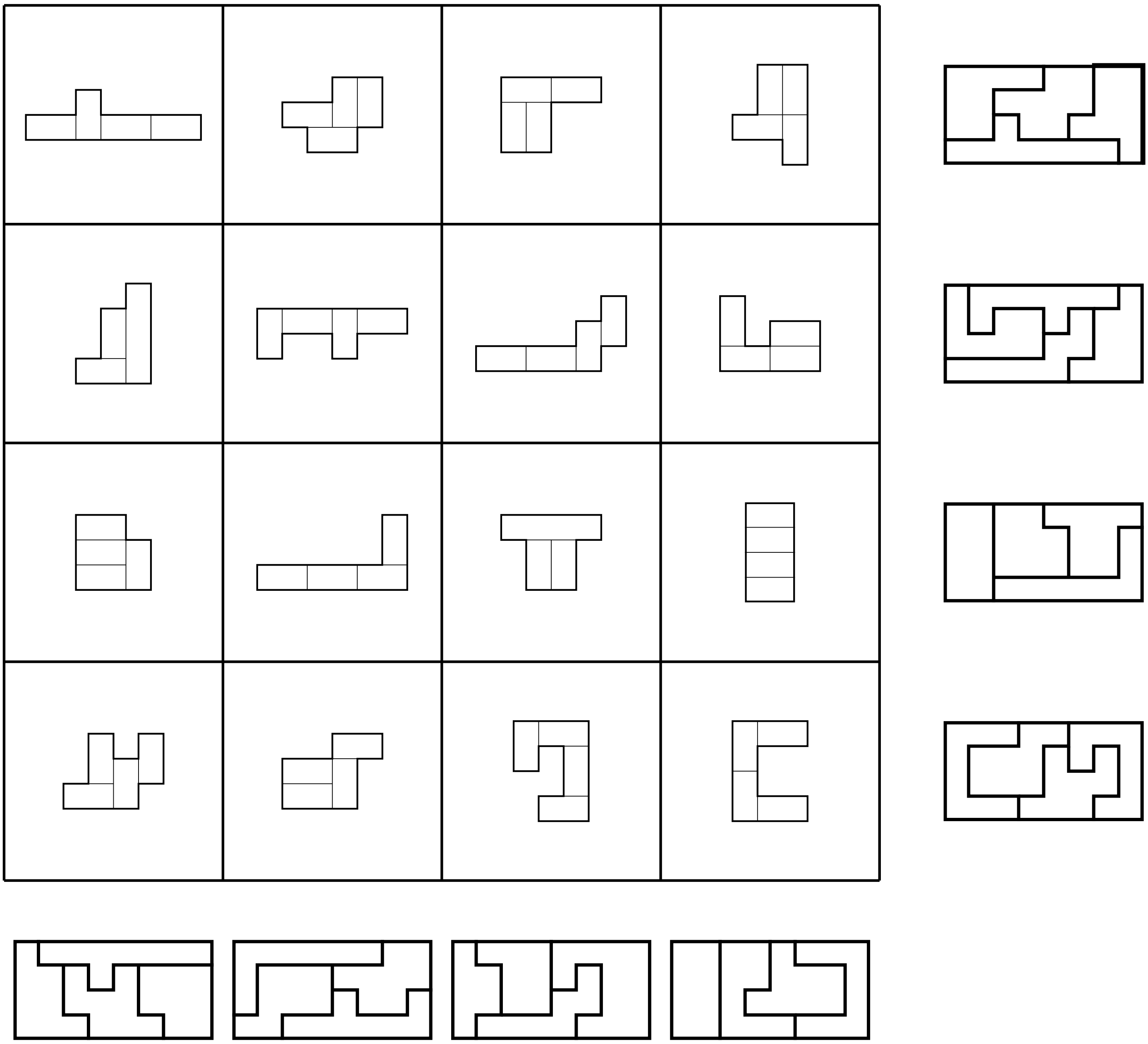
IREM de Lyon





Carré géomagique C62 (Solution)

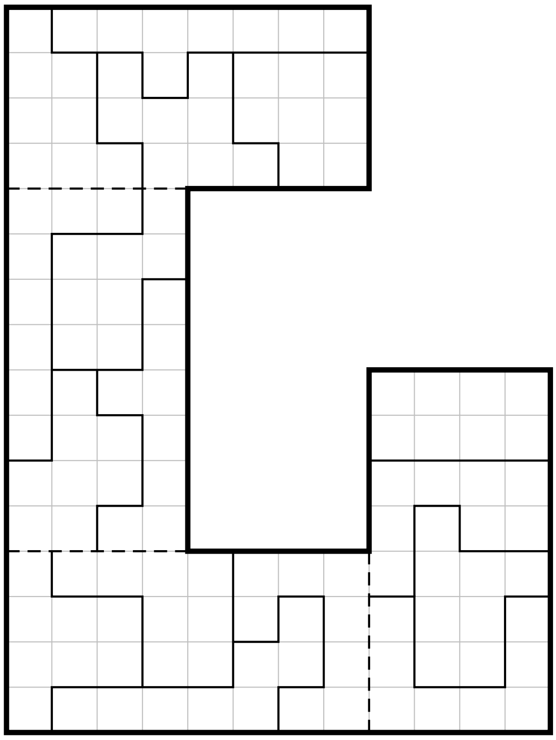
IREM de Lyon

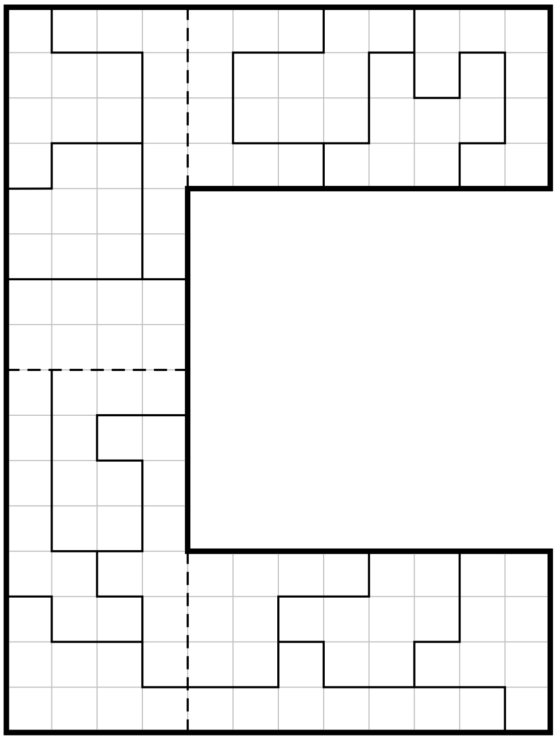


C62 : agrandissement et ensemble de tuiles auto-tuilées (Solution) IREM de Lyon

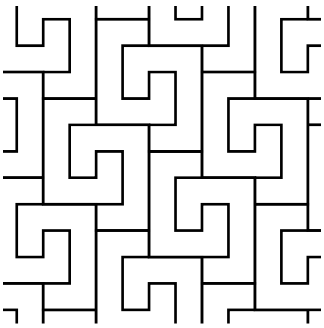
Une condition nécessaire et suffisante pour placer les seize pièces est d'utiliser soit les quatre modèles recouverts en ligne soit les quatre modèles recouverts en colonne.

Cette condition prise, les solutions ne sont donc pas uniques : la position de chacun des quatre modèles recouverts est à la liberté de l'élève !





Remarque. La pièce de gauche permet de paver le plan, comme le montre la figure ci-contre. Par conséquent, les différentes productions des élèves peuvent décorer un mur de classe par un pavage collaboratif. Éventuellement, les élèves choisiront des couleurs communes aux pièces.



Compléments

Présentation du « Saute-grenouille »

Cette activité, « Saute-grenouille », s'inspire énormément du jeu où l'enfant relie des points numérotés dans l'ordre croissant ; un dessin lui apparaît alors à la fin. L'une des contraintes de construction ici a été de minimiser le nombre de lignes brisées constituant le dessin solution.

Dans une même liste associée à une ligne brisée, les énoncés ont le même codage.

Ici, les numéros associés aux points ne sont pas directement données mais sont des solutions à trouver.

Les deux activités, prévues pour un élève seul, permettent ici de travailler la notion d'aire et de périmètre, et, essentiellement, la proportionnalité.

Il y a plus de points que nécessaire dans chaque activité. C'est voulu. En effet, il est intéressant (voire pertinent) de travailler avec la plausibilité d'une erreur. Il est important de laisser, dans cet esprit, des solutions fausses que l'élève validera (pour une raison ou une autre) ; son erreur apparaîtra au vu de son dessin final. De plus, l'erreur plausible à un item peut être la réponse correcte d'un autre item !

Dans le Saute-grenouille de la page 59, l'élève va devoir tracer trois lignes brisées (une première correspond à la liste ♡, une deuxième correspond à la liste ♣ et une troisième correspond à la liste ♢).

Pour la première liste :

- il détermine la première valeur demandée dans l'item (qui est 9) ;
- il cherche le point associé à cette valeur : c'est le point de départ de la ligne brisée ;
- il détermine la deuxième valeur demandée dans l'item (qui est 100) ;
- il cherche le point associé à cette valeur : il le relie (à la règle) au premier point ;
- il détermine la troisième valeur demandée dans l'item (qui est 50) ;
- il cherche le point associé à cette valeur : il le relie (à la règle) au deuxième point ;
- la liste ♡ est terminée : la première ligne brisée est terminée.

L'élève fait de même pour les deux lignes brisées suivantes.

S'il n'a pas fait d'erreur, il obtient le dessin d'un oiseau.

Note. L'idée originale de cette activité se trouve dans *JEUX-École 2*, Brochure nº 200, APMEP, 2013.

Présentation du « Périmaire »

Le jeu consiste à empiler des cartes par égalités d'aires et de périmètres.

Le jeu se joue à deux joueurs ou à deux équipes de deux joueurs.

Principe et but
À tour de rôle, le joueur (ou l'équipe de joueurs) empile ses cartes sur la table, sachant que toute carte empilée doit représenter une figure de même aire *ou* de même périmètre que la figure de la carte du dessous.
Le but du jeu est d'être le premier à se défaire de ses cartes.

Déroulement d'une partie
- Les joueurs se partagent les cartes au hasard et de façon équitable.
  Variante : Lors de la distribution en début de partie, on peut choisir de limiter le nombre de cartes en main, celles non distribuées constituant la pioche.
- Le joueur désigné pour débuter la partie, retire de son jeu la carte de son choix et la pose, face visible, sur la table.
- Le joueur suivant doit poser sur la carte précédente une carte de son jeu.
- Un joueur qui ne peut pas jouer passe son tour (ou pioche si la variante exposée auparavant a été choisie).
- Si un joueur commet une erreur, il doit reprendre sa carte et passer son tour. De plus, l'adversaire qui a remarqué la faute choisit et lui donne l'une de ses propres cartes.
- Si un joueur pose une carte représentant une figure de même aire *et* de même périmètre, il rejoue !

Score
Chaque joueur compte ses cartes en fin de partie et marque autant de points qu'il a de cartes. Au bout de plusieurs parties, le vainqueur est celui qui totalise le plus petit nombre de points.

Carte
Sur chaque carte est indiqué le nom de la ou des pièces utilisées, coloriées en blanc sur le damier grisé.
Lorsque deux ou trois pièces sont utilisées, on considèrera que le résultat est leur ensemble connexe : l'aire de la pièce obtenue est la somme des aires des pièces utilisées et le périmètre est celui de la pièce obtenue (et non pas la somme des périmètres.)

Note. L'idée de ce jeu provient du jeu « Périmaire » du groupe Jeux2Maths de l'IREM de Caen-Normandie.

P \ *A*	6	8	10	14	16	18	24
20						**BC**	
18					**BH**		
14					**AD, CE, HI**	**CI, DE, DG, EI**	
12			**B**	**AB, AE, CF, GH**	**AI, CG, DF, EG, FI**	**BE, GI**	**ADG, CEG**
10		**C**	**D, I**	**AC, AG, EF, EH**			
8	**A, H**	**E, G**					
6	**F**						

Présentation de la « MosaColla »

Cette activité est proposée en groupe de quatre élèves.

« MosaColla » est l'acronyme de « Mosaïque collaborative » : le résultat final est un dessin (sous forme pixelisée) composé de toutes les grilles coloriées réalisées par les élèves, chacun d'eux ayant une grille.

Le travail se déroule en cinq temps d'inégales durées :

Présentation L'enseignant affiche au tableau le plan de montage et un exemple de grille déjà partiellement noircie. Il explique le principe du noircissement, l'orientation de la grille et distribue une fiche par élève contenant les neuf phrases et une petite grille de synthèse.

Recherche Chacune des phrases est vraie ou fausse. Sur sa grille, l'élève écrit en bout de chaque phrase si elle vraie ou fausse. Si la phrase est fausse, il colorie en noir la case correspondante de la grille (donnée par le codage en début de la ligne) au bas de la fiche ; si elle est vraie, il la laisse blanche.

Coloriage L'élève reporte les résultats de sa grille de synthèse sur une grille vierge à noircir.

Collage L'élève découpe cette seconde grille puis la colle au bon emplacement (repéré par le nom de la grille) et dans le bon sens sur le plateau de jeu.

Bilan et correction Une fois le dessin obtenu, le travail de correction commence. Tous les élèves participent car le début de chaque phrase est commun à tous : la validation par l'enseignant (ou, mieux, par un autre élève) d'une réponse donnée est alors un moment d'échanges riches. Chaque élève entoure la bonne réponse sur sa propre fiche, qu'il collera ensuite dans son cahier.

Note. Une MosaColla est ici formée de quatre éléments. Il faut donner une seule fiche par élève. L'enseignant collera sur le plateau la ou les grilles solutions des fiches qui resteraient éventuellement après distribution.

Note. L'esprit de l'activité est d'obtenir un résultat collectif à partir de travaux individuels. Par conséquent, l'élève fait seul sa grille qu'il vient coller ensuite sur le plateau (en respectant le sens. . .). Le fait de participer à la MosaColla amène la plupart du temps une grande application et un grand soin de la part des élèves !

Note. L'enseignant peut prévoir une planche de grilles à colorier supplémentaire pour rattraper les erreurs de transcription ou de sens de collage (même si les élèves montrent beaucoup d'application !).

Note. Le plateau et les grilles sont à découper et à distribuer aux élèves ; celles-ci ont une orientation sur le fond des cases, conservée après découpe des coordonnées (A, B, C, 1, 2, 3).

Note. L'idée originale de cette activité se trouve dans *JEUX 10*, Brochure n° 1 007, APMEP, 2015.

Présentation du « Photomathon »

IREM de Lyon

Principe

Un photomathon propose, ici, une activité géométrique sous forme d'un puzzle à reconstituer.

Un photomathon est utilisé par un seul élève.

Préparation

En haut de la page, se trouvent côte à côte un carré (lui-même divisé en neuf carrés) dans lequel se trouvent des figures géométriques (une pièce ou un morceau d'un carré géomagique) et un carré représentant un animal : coller sur un carton fin de chaque côté les deux carrés.

Découper alors les neuf pièces : chacune a, au recto, une pièce ou un morceau d'un carré géomagique et, au verso, un morceau de l'image de l'animal.

En bas de la page, se trouve le plateau de jeu, un carré divisé ici en neuf carrés, contenant chacun une valeur numérique ou une pièce du carré magique. Coller ce plateau sur un carton ; l'activité est prête.

Déroulement

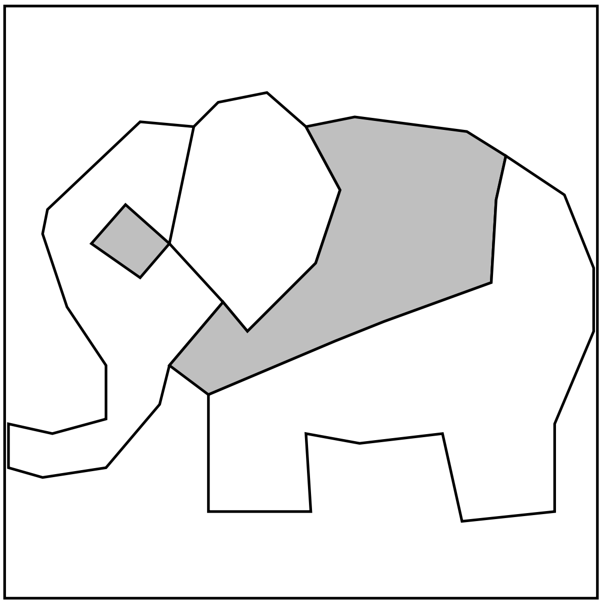
- L'élève prend l'une des neuf pièces de jeu et résout l'énoncé associé (calcul de l'aire ou recherche de la pièce manquante).
- L'élève pose ensuite cette pièce sur le plateau de jeu : il y a un carré correspondant à cette solution. L'élève veille à bien faire correspondre les pointillés, pour bien orienter la pièce de jeu, en laissant cachée la face où est le morceau du puzzle représentant l'animal.
- Une fois sa recherche terminée, l'élève retourne une par une les neuf pièces de jeu et fait apparaître un morceau du puzzle.
  Si l'élève n'a pas fait d'erreur, la tête d'un animal apparaîtra !

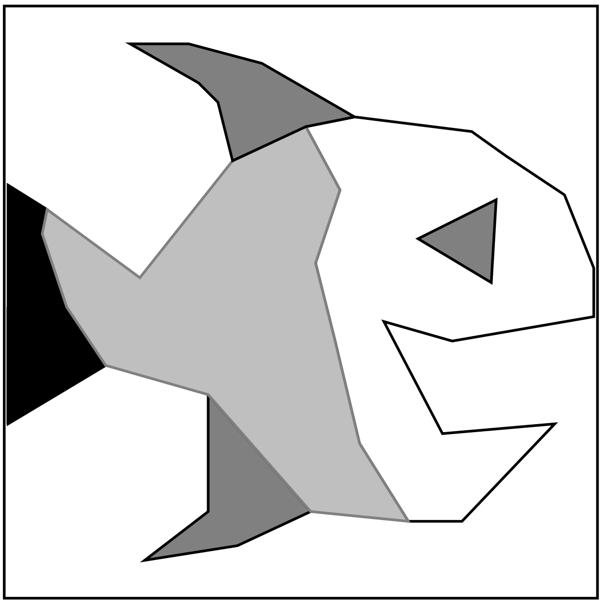
Note. Le plateau de jeu et les pièces peuvent être rangés dans un boîtier de CD.

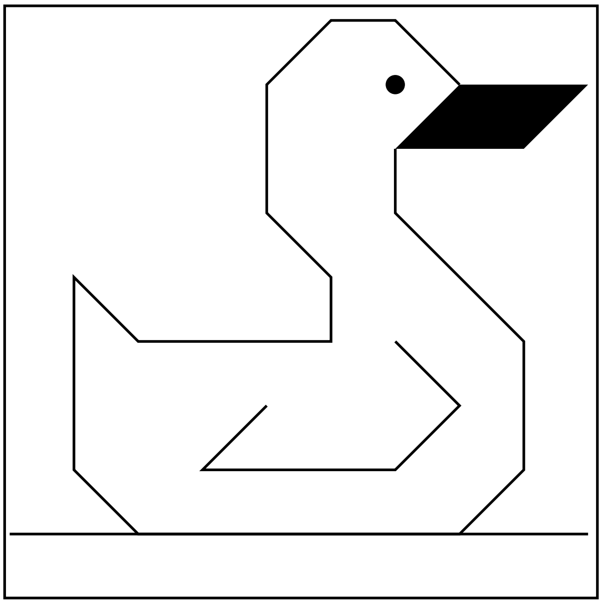
Note. L'idée originale de cette activité se trouve dans *JEUX 7*, Brochure n° 169, APMEP, 2005.

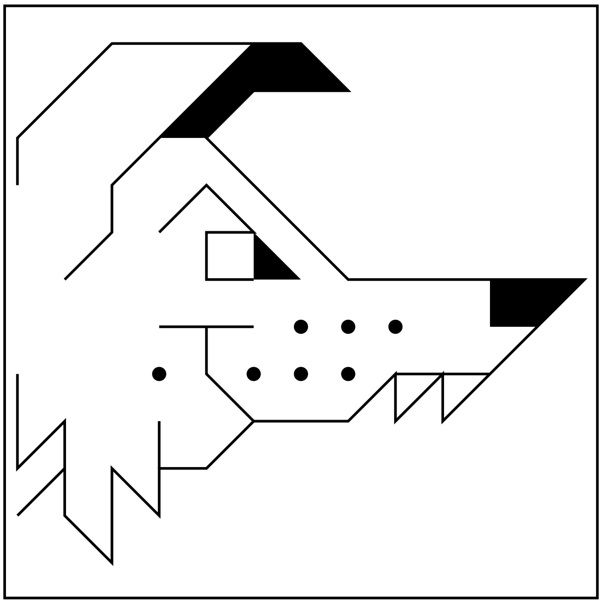
Note. Les dessins de l'éléphant et du poisson ci-après sont tirés de *JEUX-ÉCOLE*, Brochure n° 187, APMEP, 2009. Tous les dessins originaux des autres animaux ont été publiés dans diverses revues de l'IREM de Paris.

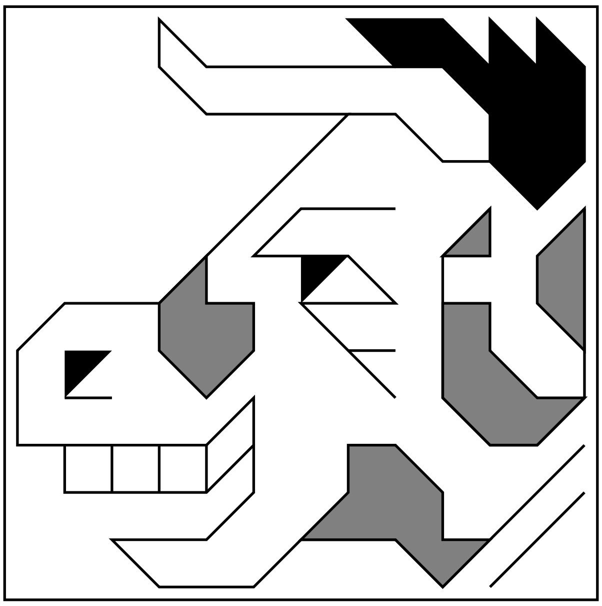
Note. L'enseignant pourra évidemment choisir d'autres illustrations !

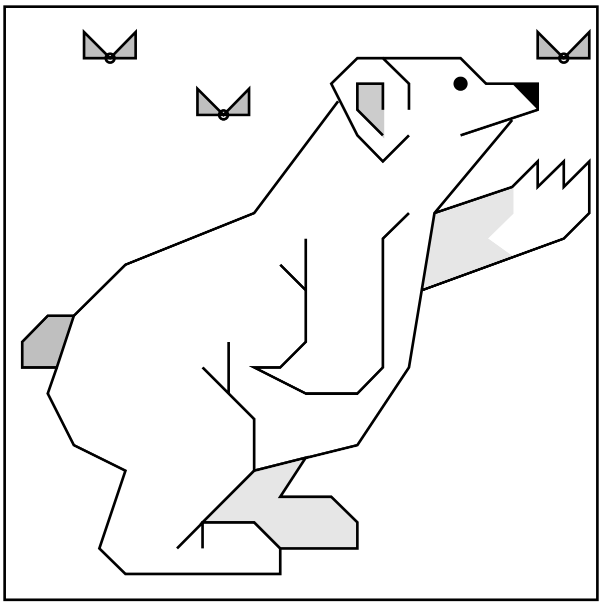


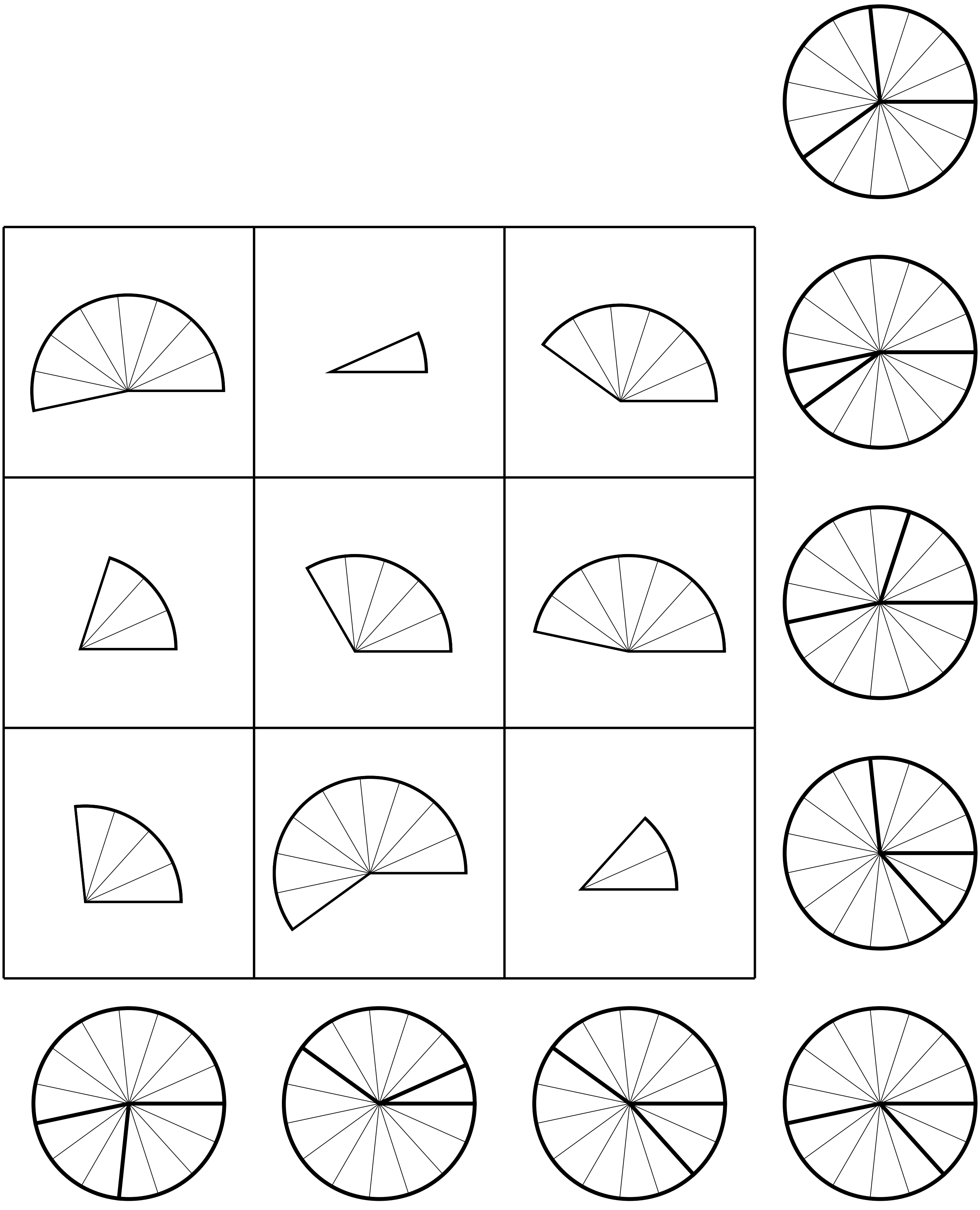












Source : `http://www.geomagicsquares.com/intro.php`

Additions et soustractions géométriques — IREM de Lyon

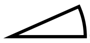
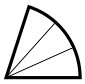
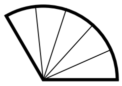
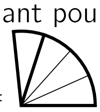
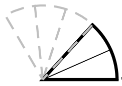
Principe

Le mathématicien Édouard Lucas (1842 – 1891) a établi que tout carré magique d'ordre 3 s'écrit sous la forme le tableau ci-contre. (Ce carré a pour somme magique $3\,c$.)

$c+a$	$c-a-b$	$c+b$
$c-a+b$	c	$c+a-b$
$c-b$	$c+a+b$	$c-a$

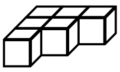
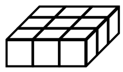
Lee Sallows a transposé ces opérations algébriques dans le cadre géométrique.
c est interprété comme une surface sur laquelle on ajoute ou on retranche les surfaces a et b suivant qu'il y a le signe « $+$ » ou « $-$ » devant la lettre.

Exemple 1 : le carré géomagique normal circulaire de la page 220

En prenant pour a, b et c les surfaces respectives ,  et , on a, par exemple :
$c+a=$  et $c-b=$ .
On retrouve ainsi toutes les surfaces du carré de la page 220.

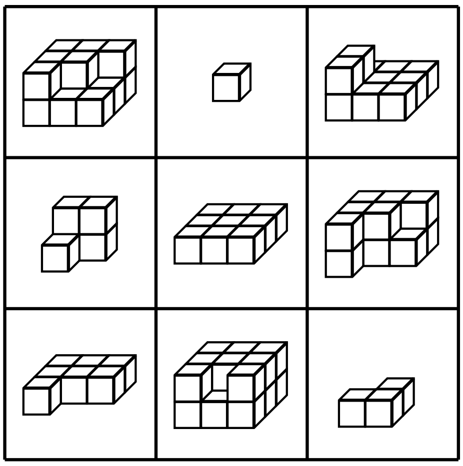
Exemple 2 : le carré géomagique n° 52

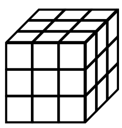
En combinant à la fois le cube de Lucas et les trois pièces a, b et c suivantes

a  b  c 

de volumes respectifs 6, 2 et 9, Lee Sallows construit (grâce à un apport d'Aad van de Wetering) les neuf pièces distinctes ci-dessous dont les volumes sont donnés dans le tableau ci-contre :

15	1	11
5	9	13
7	17	3



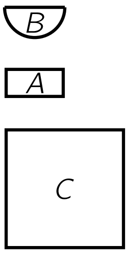


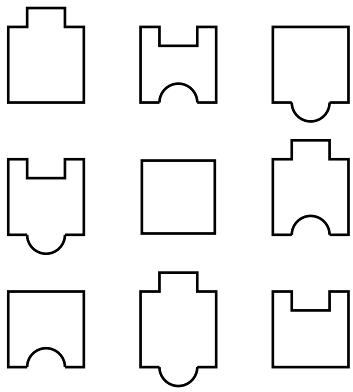
Le modèle est un cube puisque chacune des huit sommes est égale à $27=3^3$.
De plus, les neuf volumes constituent la suite des neuf premiers nombres entiers impairs de 1 à 17 dont la somme vaut $1+3+\cdots+17=81=3\times3^3$: les neuf pièces du carré donnent trois cubes (pour les trois lignes) et trois cubes (en colonne).

Ce carré géomagique se trouve sur `https://www.geomagicsquares.com/gallery.php?page=52`, sous le nom « GeoMagie3D ».

Contre-exemple : impossibilité possible !

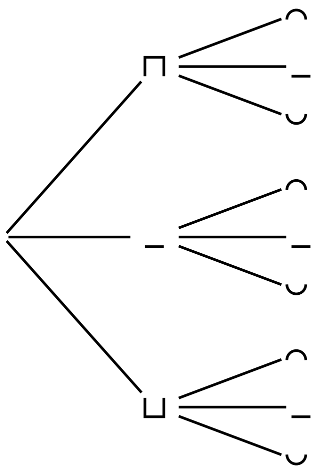
Le carré C-02 a été obtenu (page 49) par aditions et soustractions géométriques basées sur le carré de Lucas. Par exemple, avec les trois formes A, B et C ci-dessous à gauche, on peut construire, en plaçant A et B sur deux côtés opposés, les neuf pièces ci-dessous à droite mais on ne pourra réaliser que six des huit alignements (les deux impossibles sont ceux liés aux trois pièces des deuxièmes ligne et colonne).

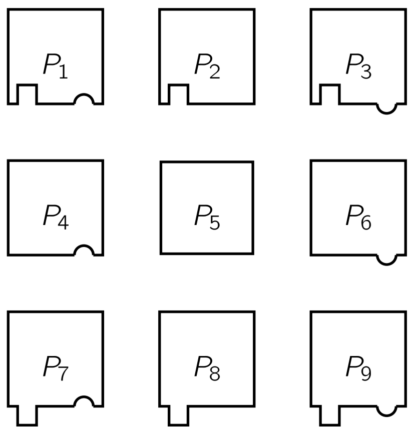




Remarque : recherche des neuf pièces du carré C-02

À partir du « grand » carré, on peut ajouter ou ôter un carré, ajouter ou ôter un demi-disque ou laisser tel quel.
Pour le carré comme pour le demi-disque, il y a pour chacun trois possibilités.
Il y a donc $3^2 = 9$ pièces différentes possibles.
On peut les trouver de façon méthodique :





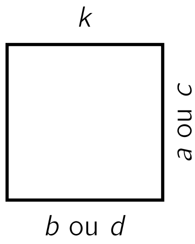
Un autre carré magique et le carré géomagique n° 22

Le carré géomagique que Lee Sallows a réf́rencé n° 22 utilise le carré magique ci-dessous :

$k+a+b$	$k-a+d$	$k-c-d$	$k-b+c$
$k+a-b$	$k-a-d$	$k-c+d$	$k+b+c$
$k-a-b$	$k+a-d$	$k+c+d$	$k+b-c$
$k-a+b$	$k+a+d$	$k+c-d$	$k-b-c$

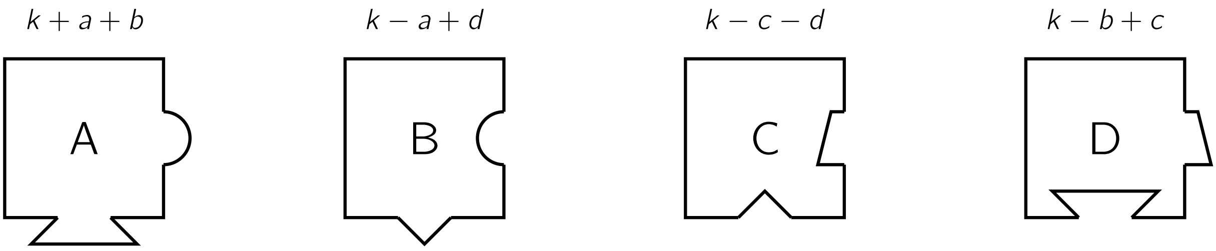
Ce carré est un carré plus-que-parfait et diabolique (voir les définitions page 8 et ses cinquante-deux configurations géométriques page 208).

On va prendre pour surface k un carré et les quatre surfaces a, b, c et d ci-dessous.

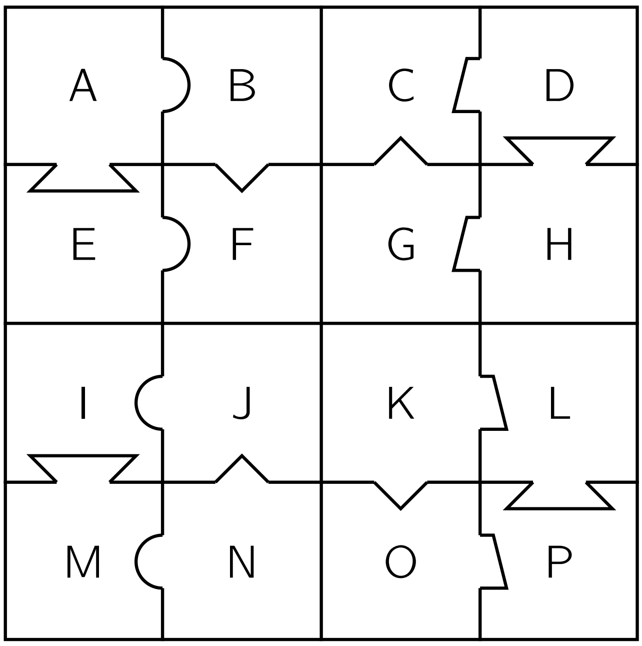


Sur deux des quatre côtés du carré k, on va retrancher ou ajouter les surfaces a, b, c et d tel que le montre la figure ci-contre.

On peut alors construire les quatre surfaces associées à la première ligne du carré, que Lee Sallows appelle A, B, C et D :



La construction des pièces permet d'obtenir seize pièces différentes (11).
Avec ces pièces réversibles, on peut recouvrir un carré.



Lee Sallows propose comme modèle un carré qui puisse être recouvert par quatre pièces. Il propose vingt recouvrements possibles :

ABCD	ADMP	AFKP	BCNO	BFJN	CHIN	DHLP	EHIL	IJKL	JKMP
ADFG	AEIM	BCEH	BELO	CGKO	DGJM	EFGH	FGJK	ILNO	MNOP

Par ailleurs, Lee Sallows appelle carré géomagique « auto-imbriqué » ce carré géomagique. En effet, les seize pièces, distinctes, ne sont plus séparées les unes des autres dans les seize cases du carré, mais s'emboîtent de manière à paver une surface carrée.

On trouve ce carré géomagique à la page : `https://www.geomagicsquares.com/gallery.php?page=22` .

(11). Ceci n'est pas forcément le cas pour un carré magique numérique : en prenant $k = 4$, $a = 2$, $b = -3$, $c = 0$ et $d = 1$, les valeurs $k + a + b$, $k - a + d$ et $k - c - d$ de la première ligne sont toutes les trois égales à 3.

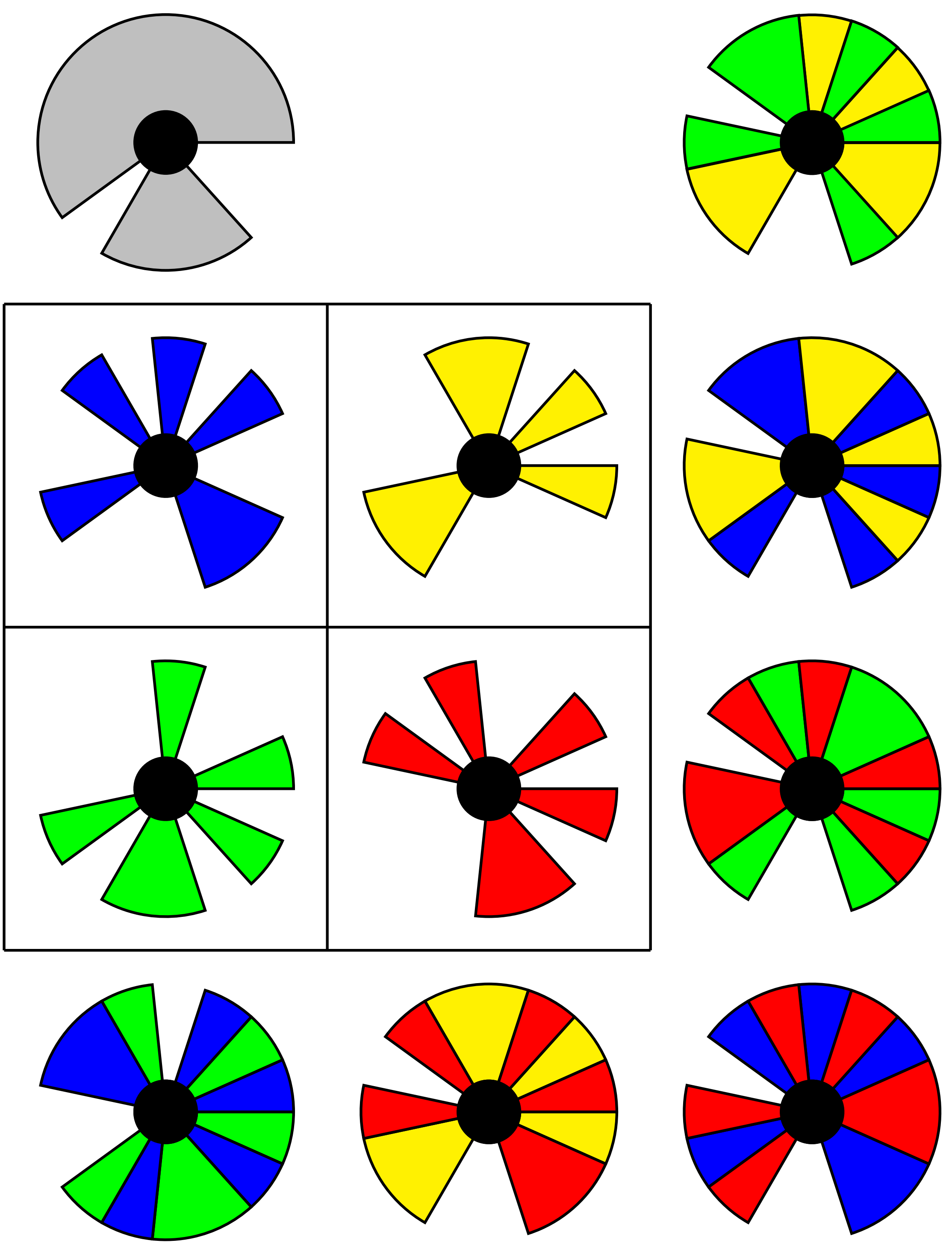
Un dernier carré magique et le carré géomagique n° 45

Lee Sallows a construit un modèle en forme d'écusson, numéroté 45 dans sa galerie.

Il a utilisé pour cela le carré magique ci-dessous :

$A+a$	$B+b$	$C+c$	$D-c$
$C-c$	$D+c$	$A+b$	$B+a$
$D+b$	$C+a$	$B-c$	$A+c$
$B+c$	$A-c$	$D+a$	$C+b$

Le résultat se lit à la page `https://www.geomagicsquares.com/gallery.php?page=45` .



Source : `http://www.geomagicsquares.com/gallery.php/`, n° 54

Lee Sallows a utilisé, des carrés normaux d'ordre 3 et des carrés normaux d'ordre 4 pour construire des carrés géomagiques.

- Avec un carré magique normal d'ordre 3 (et de somme magique 15), on trouve dans la galerie. . .
  - le carré géomagique **C2**, dont le modèle M est un carré de côté 4, avec un trou d'un carré de côté 1 à l'intérieur (c'est-à-dire non situé sur le bord) (12) , et dont les neuf formes de base sont des polyminos (13) ; si l'on ne compte pas les modèles obtenus de M par rotation ou retournement, c'est l'un des 4 370 carrés normaux qui donnent un tel modèle

    `https://www.geomagicsquares.com/gallery.php?page=2`
  - le carré géomagique **C3**, dont le modèle M est un carré de côté 4, avec un trou d'un carré de côté 1 situé sur le bord, et dont les neuf formes de base sont des polyminos ; sous les mêmes conditions, c'est l'un des 16 465 carrés normaux qui donnent un tel modèle

    `https://www.geomagicsquares.com/gallery.php?page=3`
  - le carré géomagique **C14**, dont le modèle M est un carré de côté 4, avec un trou d'un carré de côté 1 situé dans un coin, et dont les neuf formes de base sont des polyminos ; sous les mêmes conditions, c'est l'un des 27 110 carrés normaux qui donnent un tel modèle

    `https://www.geomagicsquares.com/gallery.php?page=14`
  - le carré géomagique **C19**, dont le modèle M est une variation du « triangle impossible » créé par Oscar Reutersvard in 1934 ; Lee Allows l'a appelé « Trisecting a tribar »

    `https://www.geomagicsquares.com/gallery.php?page=19`
  - le carré géomagique **C20**, dont le modèle M est en triangle, que l'on pourrait voire comme version 2D du « triangle impossible » précédent ; Lee Allows l'a appelé « Truth and Beauty »

    `https://www.geomagicsquares.com/gallery.php?page=20`
  - le carré géomagique **C57**, présenté en page 9

    `https://www.geomagicsquares.com/gallery.php?page=57`
- Avec un carré magique normal d'ordre 4 (et de somme magique 34), on trouve dans la galerie. . .
  - le carré géomagique **C32**, dont le modèle M est un carré de côté 6, avec deux trous d'un carré de côté 1 (14) (l'un est en deuxième ligne et deuxième colonne et l'autre est en cinquième ligne et cinquième colonne) ; la disposition des seize nombres est celle que l'artiste allemand Albrecht Dürer a donnée dans sa gravure « Melancolia I » en 1514 (Lee Sallows propose que son carré s'appelle, en hommage, « Melancolia II »)

    `https://www.geomagicsquares.com/gallery.php?page=32`
  - le carré géomagique **C34**, dont le modèle M est le même que celui du carré géomagique **C 32** mais les seize pièces sont des polygones (certains ont un trou d'un carré de côté 1) dont les angles entre deux côtés ont pour mesure 45°, 90° ou 135°

    `https://www.geomagicsquares.com/gallery.php?page=34`
  - le carré géomagique **C35**, dont le modèle M est un carré de côté 6, avec un trou d'un carré de côté $\sqrt{2}$ (15), placé au centre du modèle, tourné d'un angle de 45° ; le titre « Dudeney Type X », fait référence à un travail du créateur de défis H. E. Dudeney (16)

    `https://www.geomagicsquares.com/gallery.php?page=35`

---

(12). Le modèle a donc une aire égale à $4^2 - 1 = 15$, constante magique d'un carré magique d'ordre 3.

(13). Réunion connexe de carrés unitaires, les carrés se touchant au complet par un côté. En particulier, on compte cinq tétraminos ($n = 4$) différents et douze pentaminos ($n = 5$) différents, qui sont source de nombreux jeux, tant dans le commerce ou les applications (comme Tetris) que dans les groupes « Jeux » des IREM ou de l'APMEP. Solomon W. Golomb est le premier à en avoir fait une étude systématique dans son *Polyominoes*, paru en 1953.

(14). Le modèle a donc une aire égale à $6^2 - 2 \times 1 = 34$, constante magique d'un carré magique d'ordre 4.

(15). Le modèle a donc une aire égale à $6^2 - (\sqrt{2})^2 = 34$.

(16). Son travail sur les carrés magiques comprenait une classification des 880 carrés normaux en 12 types (selon la façon dont les paires de nombres complémentaires à 17 étaient disposées) ; dans son système, le carré utilisé est de type 10 (ou X).

- le carré géomagique **C36**, dont le modèle M est en forme de diamant (comme l'indique Lee Sallows) ; celui-ci l'a appelé « La pierre de Mazarin » [17]

  `https://www.geomagicsquares.com/gallery.php?page=36`

- le carré géomagique **C37**, dont le contour du modèle M troué rappelle les zelliges ou les motifs géométriques d'antan ; Lee Allows l'a appelé « Abracadabra »

  `https://www.geomagicsquares.com/gallery.php?page=37`

- le carré géomagique **C38**, dont le contour du modèle M troué rappelle les motifs géométriques d'antan ; Lee Allows l'a appelé « Opus 34 »

  `https://www.geomagicsquares.com/gallery.php?page=38`

- le carré géomagique **C46**, dont le carré magique est plus-que-parfait ; il est présenté en page 8

  `https://www.geomagicsquares.com/gallery.php?page=46`

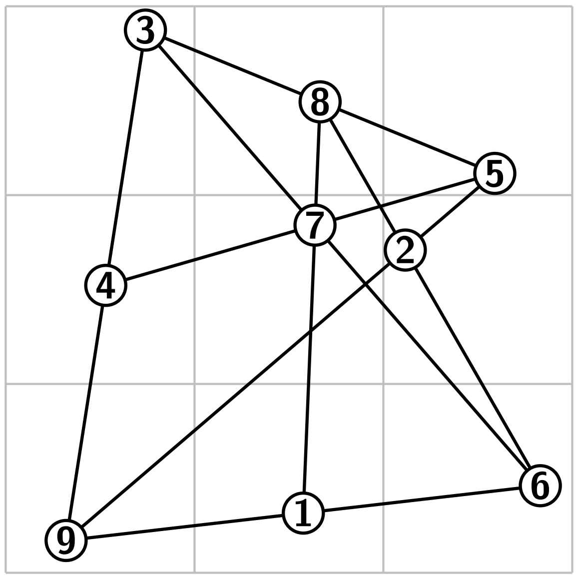
(17). La « pierre de Mazarin » est le nom d'un diamant jaune qui fait l'objet d'une enquête éponyme de Sherlock Holmes.

Bonus : un cadeau de Lee Sallows !

Lee Sallows a inventé l'énigme suivante, qui consiste à repositionner les jetons numérotés du « carré de Luò shū » (ci-contre), en plaçant toujours un jeton dans chaque case, de manière à ce qu'il y ait encore huit alignements de trois jetons, mais que, maintenant, la somme des nombres sur trois jetons alignés soit égale à 16 (et non plus à 15).

8	1	6
3	5	7
4	9	2

Voici sa solution :



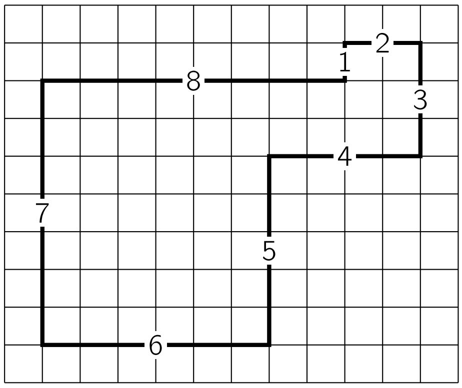
(Solution extraite de l'article « Les carrés magiques géométriques », Jean-Paul Delahaye, p. 84, *Pour la Science*, n° 428, Juin 2013)

Bonus : qui est Lee Sallows ?

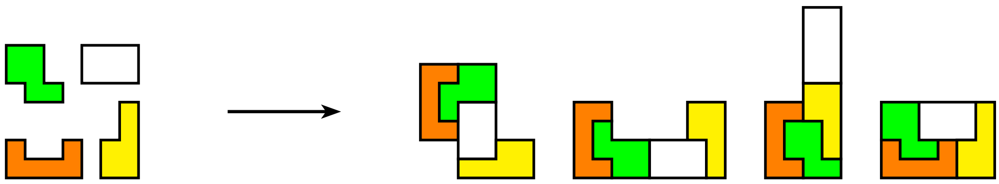
Lee Cecil Fletcher Sallows naît le 30 avril 1944 en Angleterre, et grandit au nord-est de Londres. Il fréquente l'école Dame Alice Owen's School, dont il sort sans diplôme, à 17 ans. Ses connaissances acquises par l'intérêt pour la radio à ondes courtes lui permettent de trouver un emploi de technicien dans l'industrie électronique. En 1970, il déménage à Nijmegen (Nimègue) aux Pays-Bas, où, jusqu'en 2009, il travaille comme ingénieur en électronique à la Radboud University.

Connu pour ses contributions aux mathématiques récréatives, il crée, entre autres :

- les *carrés géomagiques* (qui sont le support d'activités de cette brochure)
- les *golygones* (en 1988), polygones qui contiennent uniquement des angles droits et dont les côtés adjacents présentent des longueurs entières consécutives [18]
  `https://www.leesallows.com/index.php?page_menu=Home&pagename=Serial-sided%20Isogons`



- les *ensembles de tuiles auto-tuilantes* (en 2012) d'ordre n, qui sont des ensembles de n formes dont chacune peut être carrelé avec des répliques plus petites de l'ensemble complet des n formes (et sont une nouvelle généralisation des rep-tuiles)
  `https://www.leesallows.com/index.php?page_menu=Self-Tiling%20Tile%20Sets`



- les *phrases auto-référentes* ou *autogrammes* (en 1982), qui se décrivent par un inventaire de leurs propres caractères [19]

  > Only the fool would take trouble to verify that his sentence was composed of ten a's, three b's, four c's, four d's, forty-six e's, sixteen f's, four g's, thirteen h's, fifteen i's, two k's, nine l's, four m's, twenty-five n's, twenty-four o's, five p's, sixteen r's, forty-one s's, thirty-seven t's, ten u's, eight v's, eight w's, four x's, eleven y's, twenty-seven commas, twenty-three apostrophes, seven hyphens and, last but not least, a single !

De plus,

- dans « Le théorème perdu » (en 1997), il montre que chaque carré magique 3×3 est associé à un parallélogramme unique sur le plan complexe
  `https://www.leesallows.com/files/The_Lost_Theorem.pdf`
- il découvre (en 2014) un résultat auparavant inaperçu impliquant les médianes d'un triangle
  `https://www.leesallows.com/index.php?page_menu=Varia&pagename=Triangle%20Theorem`

Son site personnel est à l'adresse `https://www.leesallows.com/` .

(18). L'illustration ci-dessous de l'unique golygone d'ordre 8 se trouve aussi dans l'article « An odd journey along even roads leads to home in Golygon City », A. K. Dewdney, *Scientific American*, Juillet 1990, pp. 118–121. Ce golygone peut paver le plan.
(19). L'autogramme donné est le premier à avoir été publié, dans « Metamagical Themas », Douglas Hofstadter, *Scientific American*, Janvier 1982, pp. 12–17.

Carrés géomagiques : des activités pour la classe

Arnaud Gazagnes

232 pages

Juillet 2023

L'idée de Lee Sallows, en 2001, a été de remplacer les nombres d'un carré magique par des figures géométriques. Un *carré géomagique* d'ordre n est un donc tableau carré contenant n^2 surfaces toutes différentes, et pouvant être retournées, telles que leur réunion disjointe dans chacune des trois lignes, des trois colonnes et des deux diagonales soit constante à un même modèle M. Un exemple se trouve en page de couverture !

Dans cette brochure, huit carrés géomagiques de Lee Sallows sont des supports pour des activités en classe, et essentiellement en *cycle 4*.

Tout carré géomagique est d'abord proposé dans une phase de manipulation : le modèle M est à recouvrir.
Les neuf pièces des carrés géomagiques sont supports de diverses activités (corrigées en fin de brochure) :

- des activités sur l'*aire* et le *périmètre* (deux carrés géomagiques ont la particularité est d'utiliser des triangles équilatéraux accolés, ce qui permet un travail plus original sur ces deux notions) et, par conséquent, la *proportionnalité* et les *fractions* ;
- des activités sur les *transformations du plan* (symétries axiale et centrale, rotation, translation et pavages), à utiliser ou à caractériser ;
- des activités sur les *agrandissements* ;
- des activités sur le *calcul littéral* ou *algébrique* ;
- des activités sur *tableur* ou de *programmation* ;
- des activités de *constructions* et de *programmes de construction* ;
- une activité sur la *numération* ;
- des *activités de recherche* et des *défis*, à proposer hors du cours de mathématiques, ...

Les notions du programme sont présentes mais l'esprit ludique a été choisi autant que possible : les élèves trouveront des messages ou des dessins cachés, traverseront des labyrinthes, joueront aux dominos ou aux cartes, dessineront une mosaïque collaborative, ...

IREM de Lyon
21, avenue Claude Bernard
Bâtiment Braconnier
69 622 Villeurbanne Cedex

ISBN 978-29-0694-374-2
9 782906 943742

Prix de vente conseillé : 10 €