Correction du devoir du 30 juin 2012

I **Préliminaire**

1. On vérifie que $\forall (v,w) \in \mathcal{L}(E)^2$, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$: $\varphi_u(\lambda v + w) = \lambda \varphi_u(v) + \varphi_u(w)$
2. Les homothéties commutent avec tous les endomorphismes donc $\varphi_{\lambda id_E} = 0_{\mathcal{L}(E)}$
3. u et id_E appartiennent au noyau de φ_u. Si les deux applications sont indépendantes alors $\dim(\ker(\varphi_u)) \geqslant 2$ sinon u est une homothétie et alors $\dim(\ker(\varphi_u)) = \dim(\mathcal{L}(E)) = n^2 \geqslant 4$

II **Etude d'un exemple**

1. $\chi_u(X) = (2-X)(3-X)-12 = X^2-5X-6 = (X+1)(X-6)$ Le polynôme caractéristique étant scindé à racine simple, u est diagonalisable.
2. Une colonne C_i de Δ correspond aux coordonnées de $\varphi_u(\theta_i)$ dans la base C. On calcule $A.M_i - M_i.A$ qui donne les coordonnées dans (M_1, M_2, M_3, M_4) donc dans C. Ainsi :

$$A.M_1 - M_1.A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = 0M_1 - 3M_2 + 4M_3 + 0M_4$$

$$A.M_2 - M_2.A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = -4M_1 - M_2 + 0M_3 + 4M_4$$

$$A.M_3 - M_2.A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = 3M_1 + 0M_2 + M_3 - 3M_4$$

$$A.M_4 - M_4.A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} = 0M_1 + 3M_2 - 4M_3 + 0M_4$$

$$\Delta = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 3 & 0 \\ -3 & -1 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 4 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Le calcul du polynôme caractéristique donne $\chi_{\varphi_u}(X) = X^2(X-7)(X+7)$ Les valeurs propres de φ_u sont $\{0, 7, -7\}$. 7 et -7 sont associées à des espaces propres de dimension 1. 0 est associée à un espace propre de dimension au moins 2 d'après la question I3, et d'au plus 2 selon le polynôme caractéristique. La multiplicité algébrique et géométrique de chaque valeur propre est identique donc φ_u est diagonalisable et $\dim(\ker(\varphi_u)) = 2$.
4. On cherche v tel que $\varphi_u(v) = 7v$ en résolvant le système $(\Delta - 7I_4)V = 0$ où V représente les coordonnées de v dans C. On trouve $V = \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{4}{3} \\ \frac{3}{4} \\ 1 \end{pmatrix} t \quad t \in \mathbb{C}$ Autrement dit, le sous espace propre associé à 7 est engendré par l'endomorphisme défini dans C par $\begin{pmatrix} -1 & \frac{3}{4} \\ -\frac{4}{3} & 1 \end{pmatrix}$

III **Etude du cas où u est diagonalisable**

1. Soit λ_k la valeur propre associée à ϵ_k On a $u(\epsilon_k) = \lambda_k \epsilon_k$ et $\forall (i,j,k) \in [\![1,n]\!]^3$, $\varphi_u(v_{ij}(\epsilon_k)) = u \circ v_{ij}(\epsilon_k) - v_{ij} \circ u(\epsilon_k)$ D'où

$$\text{si } k \neq i \quad v_{ij}(\epsilon_k) = 0 \text{ et } \varphi_u(v_{ij}(\epsilon_k)) = u(v_{ij}(\epsilon_k)) - v_{ij}(u(\epsilon_k)) = u(0) - \lambda_k v_{ij}(\epsilon_k) = 0$$

$$\text{si } k = i \quad \varphi_u(v_{ij}(\epsilon_i)) = u(v_{ij}(\epsilon_i)) - v_{ij}(u(\epsilon_i)) = u(\epsilon_j) - v_{ij}(\lambda_i \epsilon_i) = (\lambda_j - \lambda_i) v_{ij}(\epsilon_i)$$

v_{ij} est bien un vecteur propre de φ_u associé à la valeur propre $\lambda_j - \lambda_i$

2. Il y a n^2 endomorphismes v_{ij}. Montrons qu'ils sont libres : Soient $(\mu_{ij})_{1 \leqslant \substack{i \\ j} \leqslant n} \in \mathbb{C}$ tels que $\sum\limits_{1 \leqslant \substack{i \\ j} \leqslant n} \mu_{ij} v_{ij} = 0$ alors $\forall k \in [\![1,n]\!]$ $\sum\limits_{1 \leqslant \substack{i \\ j} \leqslant n} \mu_{ij} v_{ij}(\epsilon_k) = 0$ soit $\sum\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} \mu_{kj} \epsilon_j = 0$ comme (ϵ_i) est une base, on a $\forall (k,j) \in [\![1,n]\!]^2$ $\mu_{kj} = 0$ et les n^2 endomorphismes de $\mathcal{L}(E)$ sont libres. Ils forment donc une base de vecteurs propres de φ_u qui est diagonalisable.

3. a) u est diagonalisable donc E est somme directe des $V(\lambda_i)$ d'où $n_1 + \ldots + n_r = n$

   b) $v_{ij} \in \ker(\varphi_u) \iff \lambda_i = \lambda_j$ Autrement dit $\exists\, 1 \leqslant k \leqslant r$, $\lambda_i = \lambda_k$ et $\lambda_j = \lambda_k$ Il y a donc, pour chaque λ_k, n_k choix pour i et autant pour j soit n_k^2 pour v_{ij}. Au final $\dim \ker(\varphi_u) = n_1^2 + \ldots + n_r^2$. Le théorème du rang, permet de trouver

$$rg(\varphi_u) = n^2 - (n_1^2 + \ldots + n_r^2) = (n_1 + \ldots + n_r)^2 - (n_1^2 + \ldots + n_r^2) = 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} n_i n_j$$

IV Etude du cas où φ_u est diagonalisable

1) a) On peut compléter x non nul par $e_2, \ldots e_n$ une base de E et construire un endomorphisme w défini par $w(x) = y$ et $\forall\, 2 \leqslant i \leqslant n$, $w(e_i) = 0$

b) φ_u étant diagonalisable, il existe une base $(v_k)_{1 \leqslant k \leqslant n^2}$ de $\mathcal{L}(E)$ constituée de vecteurs propres de φ_u. $\forall y \in E \quad \exists w \in \mathcal{L}(E)$ tel que $y = w(x)$ On décompose w sur la base des $(v_k)_{1 \leqslant k \leqslant n^2}$: $w = \sum\limits_{1 \leqslant k \leqslant n^2} a_k v_k$ et $y = w(x) = \sum\limits_{1 \leqslant k \leqslant n^2} a_k v_k(x)$ La famille des $(v_k(x))_{1 \leqslant k \leqslant n^2}$ est donc une famille génératrice de E de dimension n. On peut donc en extraire une sous famille libre de n vecteurs c'est à dire une base.

2) Puisque E est un espace vectoriel complexe, il existe au moins un vecteur propre non nul x associé à la valeur propre λ. Pour tout k soit λ_k la valeur propre associée à v_k. De $\varphi_u(v_k) = u \circ v_k - v_k \circ u = \lambda_k v_k$ soit $u \circ v_k = \lambda_k v_k + v_k \circ u$, on en déduit que $u\big(v_k(x)\big) = \lambda_k v_k(x) + v_k(u(x)) = \lambda_k v_k(x) + v_k(\lambda x) = (\lambda_k + \lambda) v_k(x)$ Donc $v_k(x)$ est un vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda + \lambda_k$

3) $(\leftarrow)$ c'est la question I.2

$(\rightarrow)$ Si $\varphi_u = 0_{\mathcal{L}(E)}$ alors φ_u est diagonalisable et sa seule valeur propre est 0. D'après ce qui précède, u est diagonalisable avec une unique valeur propre λ donc u est bien une homothétie.

V Une propriété des vecteurs propres de φ_u

1. a) v^k est une vecteur propre associé à la valeur propre $k\lambda$ Raisonnons par récurrence : c'est vrai pour $n = 0$ puisque $\varphi_u(id_E) = 0$ et

$$\begin{aligned} \varphi_u(v^{k+1}) &= u \circ v^{k+1} - v^{k+1} \circ u \\ &= (u \circ v^k) \circ v - (v^k \circ u) \circ v + v^k \circ (u \circ v) - v^k \circ (v \circ u) \\ &= (u \circ v^k - v^k \circ u) \circ v + v^k \circ (u \circ v - v \circ u) \\ &= \varphi_u(v^k) \circ v + v^k \circ \varphi_u(v) \end{aligned}$$

En utilisant l'hypothèse de récurrence on a

$$\varphi_u(v^{k+1}) = (k\lambda v^k) \circ v + v^k \circ (\lambda v) = k\lambda v^{k+1} + \lambda v^{k+1} = (k+1)\lambda v^{k+1}$$

$\forall k \in \mathbb{N}$, v^k est un vecteur propre de φ_u associée à la valeur propre $k\lambda$

b) Comme $\lambda \neq 0$, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ $k\lambda \neq 0$ Si v n'est pas nilpotente alors φ_u admet une infinité de valeur propre distinctes alors que E est de dimension finie et $\mathcal{L}(E)$ aussi. Donc, $\exists k,\ v^k = 0$. De plus φ_u admet au plus n^2 valeurs propres donc l'indice N de v est tel que $N \leqslant n^2$.
En fait, le polynôme minimal de v est $X^N = 0$ et le polynôme caractéristique est $X^n = 0$ on a de plus $N \leqslant n$.

2. a) En général, on a $\ker(v^k) \subset \ker(v^{k+1})$ et l'inégalité $\dim(\ker(v^k)) \leqslant \dim(\ker(v^{k+1}))$
En effet $\forall x \in \ker(v^k)$, $v^{k+1}(x) = v(v^k(x)) = v(0) = 0$.
Supposons qu'il existe $k < n$ tel que $\ker(v^k) = \ker(v^{k+1})$ alors $\ker(v^{k+1}) = \ker(v^{k+2})$
En effet, $\forall x \in \ker(v^{k+2})$, $v^{k+2}(x) = v^{k+1}(v(x)) = 0$ donc $v(x) \in \ker(v^{k+1}) = \ker(v^k)$
d'où $v^k(v(x) = v^{k+1}(x) = 0$ et $x \in \ker v^{k+1}$
S'il existe un tel entier k, alors $\ker(v^k) = \ker(v^{k+1}) = \ldots = \ker(v^n) = E$ et v serait nilpotent d'indice $k < n$ ce qui est contradictoire avec l'hypothèse. Chaque inégalité est donc stricte, d'où le résultat.

b) La suite des $\dim(\ker(v^k))_{1 \leqslant k \leqslant n}$ est une suite de n entiers, strictement croissante, dont le premier terme est > 0 (car v étant nilpotente n'est évidemment pas inversible) et le $n^{\text{ème}}$ est n. On en déduit $\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n \quad \dim(\ker(v^k)) = k$

c) Pour montrer que φ_u est diagonalisable, on va montrer que u l'est (cf partie III). Pour cela, on va montrer que u possède n valeurs propres distinctes. Puisque $v^{n-1} \neq 0$, il existe un vecteur (non nul) x de E, tel que $v^{n-1}(x) \neq 0$ et $\forall k \geqslant n\, v^k(x) = 0$. Montrons que $\big(x, v(x), \ldots, v^{n-1}(x)\big)$ est une base de E, c'est à dire est libre.

Soient $\lambda_0, \ldots, \lambda_{n-1}$ des complexes tels que $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \lambda_k v^k(x) = 0$ et soit i_0 le plus petit indice tel que $\lambda_{i_0} \neq 0$. Alors en composant par v^{n-1-i_0}, on obtient :

$$\begin{aligned} v^{n-1-i_0}(\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k v^k(x)) &= v^{n-1-i_0}(\sum_{k=i_0}^{n-1} \lambda_k v^k(x)) \\ &= v^{n-1}(\lambda_{i_0} x) \\ &= \lambda_{i_0} v^{n-1}(x) = 0 \end{aligned}$$

Comme $v^{n-1}(x) \neq 0$, on a $\lambda_{i_0} = 0$ soit $\forall\, 0 \leqslant k \leqslant n-1$, $\lambda_k = 0$. Les n vecteurs $\big(x, v(x), \ldots, v^{n-1}(x)\big)$ sont libres et forment donc une base $\mathcal{B}$ de E.

Décrivons maintenant la matrice de u dans cette base : soit $u(x) = \sum\limits_{i=0}^{n-1} a_i v^i(x)$. De plus, $\forall\, 0 \leqslant k \leqslant n-1 \quad \varphi_u(v^k) = u(v^k) - v^k(u) = k\lambda v^k$ D'où

$$\begin{aligned} u(v^k(x)) &= v^k(u(x)) + k\lambda v^k(x) \\ &= v^k(\sum_{i=0}^{n-1} a_i v^i(x)) + k\lambda v^k(x) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} a_i v^{k+i}(x) + k\lambda v^k(x) \\ &= \sum_{i=k}^{n-1} a_{i-k} v^i(x) + k\lambda v^k(x) \\ &= (a_0 + k\lambda) v^k(x) + \sum_{i=k+1}^{n-1} a_{i-k} v^i(x) \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)$ est de la forme $\begin{pmatrix} a_0 & 0 & \ldots & 0 \\ * & a_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ * & \ldots & * & a_{n-1} \end{pmatrix}$ où $a_k = a_0 + k\lambda$

La matrice de u est une matrice triangulaire inférieure dont tous ses éléments diagonaux sont différents. Elle possède n valeurs propres distinctes, les a_k, et est donc diagonalisable. Puisque u est diagonalisable, φ_u l'est.