Préparation à l'écrit de l'agrégation interne-Analyse.

Durée : 3 heures.

Il sera tenu compte de la clarté et de la concision de la rédaction.

Dans ce problème, on se propose d'étudier les polynômes de Tchebychev dans le but de trouver une approximation de la fonction exponentielle par des polynômes, meilleure que l'approximation par les sommes partielles de la série définissant e^x.

Dans tout le problème, on désignera par $\mathbf{P}_n$ l'espace vectoriel réel des polynômes de degré inférieur ou égal à n, à coefficients réels ($n \in \mathbb{N}$). On conviendra des abus de notation suivants :

- Un polynôme et la fonction qu'il définit sur un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point seront désignés de la même façon. Les mots "polynôme" et "fonction polynôme" auront donc le même sens.
- $\mathbf{P}_n$ représentera aussi bien les polynômes de degré inférieur ou égal à n que les fonctions polynômes associées sur un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point.

On désignera par $\tilde{\mathbf{P}}_n$ le sous-ensemble de $\mathbf{P}_n$ constitué des polynômes unitaires de degré exactement n. On rappelle qu'un polynôme est dit *unitaire* si le coefficient du terme de plus haut degré est 1.

Dans tout le problème, I désignera l'intervalle $[-1, 1]$. L'ensemble des fonctions continues sur I sera noté $\mathcal{C}(I)$. Enfin, on rappelle les deux notations suivantes :

$$\mathbb{N}^* = \{n \in \mathbb{N} : n \neq 0\} \quad \text{et} \quad \mathbb{R}_+^* = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\} = \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}.$$

Les parties II et III sont indépendantes mais en revanche, elles dépendent toutes les deux de la partie I.

Partie I.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On appelle n-ème polynôme de Tchebychev le polynôme dont la fonction polynômiale associée est définie sur I par :

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), \qquad (x \in I).$$

1. Montrer la relation de récurrence

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), \qquad (n \geq 1, x \in I).$$

En déduire que T_n est une fonction polynôme et que le degré de T_n est n.

2. Calculer le coefficient de plus haut degré de T_n. Calculer $T_n(1)$ et $T_n(-1)$.

3. Démontrer que la famille $\{T_0, T_1, \dots, T_n\}$ est une base de l'espace vectoriel $\mathbf{P}_n$.

4. Determiner les racines du polynôme T_n et montrer qu'elles sont toutes réelles et appartiennent à I.

5. Montrer que la fonction T_n atteint sur I ses extremums en $n+1$ points que l'on déterminera.

6. Démontrer la relation

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{q} (-1)^k \binom{n}{2k} x^{n-2k}(1-x^2)^k,$$

où q désigne la partie entière de $n/2$.

Partie II.

A.

1. Soit $f \in \mathcal{C}(I)$. Montrer que l'intégrale

$$\int_{-1}^{1} f(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

a un sens.

2. Montrer que l'application

$$(f,g) \longmapsto \langle f,g \rangle_2 = \int_{-1}^{1} f(x)g(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

est un produit scalaire sur $\mathcal{C}(I)$. (On rappelle à cet effet que $(f,g) \longmapsto \langle f,g \rangle_2$ est un produit scalaire sur l'espace vectoriel réel $\mathcal{C}(I)$ si c'est une forme biliniéaire symétrique sur $\mathcal{C}(I)$ vérifiant :

(i) pour tout f appartenant à $\mathcal{C}(I)$, $\langle f,f \rangle_2 \geq 0$;

(ii) $\langle f,f \rangle_2 = 0$ est équivalent à $f = 0$).

On munit dorénavant $\mathcal{C}(I)$ de la norme euclidienne associée que l'on notera $\|f\|_2 = \sqrt{\langle f,f \rangle_2}$.

3. Calculer pour $(n,m) \in \mathbb{N}^2$, $\langle T_n, T_m \rangle_2$ et en déduire un système orthonormal de polynômes $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$, obtenu simplement à partir de $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

B.

On se propose détudier l'équation différentielle :

$$(1-x^2)f''(x) - xf'(x) + \omega^2 f(x) = 0, \tag{1}$$

où $\omega \in \mathbb{N}$.

1. Soit Φ l'application qui, à f deux fois dérivables sur $]-1,1[$, associe $\Phi(f) = F$, tel que $F(x) = (1-x^2)f''(x) - xf'(x)$ pour $x \in I$. Montrer que Φ est linéaire. Résoudre sur l'intervalle $]-1,1[$ l'équation differentielle

$$(1-x^2)f''(x) - xf'(x) = 0.$$

   En déduire le noyau de Φ.

2. Montrer que si f et g sont deux fois continûment dérivables sur I, alors

$$\langle \Phi(f), g \rangle_2 = \langle f, \Phi(g) \rangle_2.$$

3. Montrer que $\Phi(\mathbf{P}_n) \subset \mathbf{P}_n$. L'image d'un polynôme de degré n est-elle toujours un polynôme de degré n lorsque $n \in \mathbb{N}$?

4. Démontrer que si $n \geq 1$ et $P \in \mathbf{P}_n$, alors

$$\Phi(P) + n^2 P \in \mathbf{P}_{n-1}.$$

   Montrer que si, de plus P vérifie

$$\int_{-1}^{1} P(x)x^s \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 0, \qquad (s \in \{0, 1, \ldots, n-1\}),$$

   alors il en est de même de $\Phi(P) + \lambda P$, pour tout réel λ. En déduire que $\Phi(P) + n^2 P = 0$.

   Indication : on pourra calculer $\|\Phi(P) + n^2 P\|_2$.

5. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Phi(T_n) + n^2 T_n = 0$. Soit Φ_n la restriction de Φ à $\mathbf{P}_n$. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de Φ_n. En déduire que Φ_n est diagonalisable.

6. Dans cette question, on suppose que $\omega \in \mathbb{N}^*$. Donner une solution particulière sur I de l'équation différentielle (1).

   Montrer que la fonction $x \longmapsto \sin(\omega \arccos x)$ est aussi solution de (1) sur $]-1,1[$. En déduire l'ensemble des solutions de (1) sur l'intervalle $]-1,1[$.

Partie III.

On considère l'application qui à $f \in \mathcal{C}(I)$ associe

$$\|f\|_\infty = \sup_{t \in I} |f(t)|.$$

On admet que cette application est une norme sur l'espace vectoriel $\mathcal{C}(I)$. Dans cette partie III, on suppose que $\mathcal{C}(I)$ est muni de cette norme. On désignera par $\tilde{T}_n$ le polynôme $\dfrac{1}{2^{n-1}} T_n$, $n \geq 1$, et on posera $\tilde{T}_0 = T_0$.

A.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\|\tilde{T}_n\|_\infty = 2^{-(n-1)}$.
2. Montrer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, qu'il n'existe pas de polynômes $Q \in \tilde{\mathbf{P}}_n$ tels que $\|Q\|_\infty < 2^{-(n-1)}$.

   Indication : on regardera le nombre de racines du polynôme $\tilde{T}_n - Q$ dans I.
3. En déduire que
$$\inf_{Q \in \tilde{\mathbf{P}}_n} \|Q\|_\infty = \frac{1}{2^{n-1}}$$
   et que cette borne inférieure est atteinte pour un certain polynôme de $\tilde{\mathbf{P}}_n$.

B.

1. Etant donnés $(n+1)$ points distincts de I, $x_0, x_1, \ldots, x_n$, et $f \in \mathcal{C}(I)$, montrer qu'il existe un et un seul polynôme P_n appartenant à $\mathbf{P}_n$ vérifiant les conditions
$$P_n(x_k) = f(x_k), \qquad k \in \{0, 1, \ldots, n\}.$$
   Indication : on pourra par exemple interpréter ces conditions sous forme d'un système linéaire et montrer que la matrice (ou l'endomorphisme) associé à ce système est inversible.

   Le polynôme P_n s'appelle le polynôme d'interpolation relatif à f et aux points $\{x_k\}_{0 \leq k \leq n}$.
2. Soit f une fonction $(n+1)$ fois continûment dérivable sur I et soit P_n son polynôme d'interpolation relatif aux points $\{x_k\}_{0 \leq k \leq n}$.

   a. Soit $x \notin \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ fixé. On considère la fonction définie sur I par
$$\psi(t) = f(t) - P_n(t) - A(t - x_0)(t - x_1) \ldots (t - x_n), \qquad (t \in I),$$
   où A est une constante telle que $\psi(x) = 0$. Montrer qu'il existe $\xi \in]-1, 1[$ tel que $\psi^{(n+1)}(\xi) = 0$.

   b. En déduire que, si $\pi(x) = (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_n)$, alors, pour tout $x \in [-1, 1]$, il existe $\xi \in]-1, 1[$ tel que
$$f(x) - P_n(x) = \pi(x) \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}.$$

c. En déduire que

$$\|f - P_n\|_\infty \leq \frac{1}{(n+1)!}\|f^{(n+1)}\|_\infty \|\pi\|_\infty.$$

3. Soit f une fonction indéfiniment dérivable sur I. Montrer, en utilisant la partie III. A. que l'on peut trouver une suite de polynômes d'interpolation P_n tels que l'on ait la matjoration suivante :

$$\|f - P_n\|_\infty \leq \frac{\|f^{(n+1)}\|_\infty}{(n+1)!2^n}.$$

En déduire une condition suffisante sur une fonction f, indéfiniment dérivable sur I, pour que f soit la limite uniforme dans $\mathcal{C}(I)$ d'une suite de polynômes d'interpolation.

4. On se propose de montrer que la fonction exponentielle

$$f : x \longmapsto f(x) = e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$$

est "mieux approchée" par les polynômes d'interpolation P_n de la question III.B. 3 que par les sommes partielles de la série

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}.$$

a. Montrer que

$$\frac{1}{e(n+1)!2^n} \leq \|f - P_n\|_\infty \leq \frac{e}{(n+1)!2^n}.$$

b. Montrer que

$$\|f - S_n\|_\infty = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!}.$$

En déduire l'inégalité

$$\frac{1}{(n+1)!} < \|f - S_n\|_\infty \leq \frac{n+2}{n+1}\frac{1}{(n+1)!}.$$

c. Comparer l'ordre de grandeur de

$$\|f - P_n\|_\infty \quad \text{et de} \quad \|f - S_n\|_\infty,$$

lorsque n tend vers $+\infty$.