Agrégation interne de mathématiques. Université Claude Bernard Lyon 1

# Feuille N$^o$ 1. Diagonalisation

*Extrait adapté de l'épreuve d'agrégation externe Math-Géné 2011.*

Matrices à coefficients dans un corps $\mathbb{K}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
1. a) Pour quels $(a, b, c)$ de $\mathbb{K}^3$ la matrice

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

est-elle diagonalisable sur $\mathbb{K}$ ?
b) Trouver deux matrices de $M_2(\mathbb{K})$ non semblables sur $\mathbb{K}$ et ayant même polynôme caractéristique.
c) Soient $M$ et $M'$ deux éléments de $M_n(\mathbb{K})$ diagonalisables sur $\mathbb{K}$ et telles que leurs polynômes caractéristiques $\chi_M$ et $\chi_{M'}$ sont égaux. Montrer que $M$ et $M'$ sont semblables sur $\mathbb{K}$.
2. Soit $P = X^n - a_{n-1}X^{n-1} - \ldots - a_0$ un polynôme unitaire de degré $n$, $n \geq 2$, sur $\mathbb{K}$. On considère sa matrice compagnon $C(P)$ dans $M_{n+1}(\mathbb{K})$ donnée par

$$C(P) = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & \ldots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & & \vdots & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & a_{n-2} \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

a) Montrer que : $\chi_{C(P)} = P$.
b) Si $\lambda$ est dans $\mathbb{K}$, montrer que le rang de $C(P) - \lambda I_n$ est supérieur ou égal $n-1$ ($I_n$ désignant la matrice identité de $M_n(\mathbb{K})$).
(c) Montrer l'équivalence entre les trois assertions suivantes :
(i) le polynôme $P$ est scindé sur $\mathbb{K}$ à racines simples,
(ii) toutes les matrices de $M_n(\mathbb{K})$ ayant $P$ comme polynôme caractéristique sont diagonalisables sur $\mathbb{K}$,
(iii) $C(P)$ est diagonalisable sur $\mathbb{K}$.
3. Soient $r$ et $s$ dans $\mathbb{N}^*$ , $A$ dans $M_r(\mathbb{K})$, $A'$ dans $M_s(\mathbb{K})$,

$$M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A' \end{pmatrix}.$$

Montrer que $M$ est diagonalisable sur $\mathbb{K}$ si et seulement si $A$ et $A'$ sont diagonalisables sur $\mathbb{K}$.