Quelques inégalités

1 Inégalité de Cauchy-Schwarz.

Théorème. Soit E un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$. On note $\|\cdot\|$ la norme associée à ce produit scalaire. Pour tout couple (x, y) de vecteurs de E, on a l'inégalité :

$$|\langle x, y\rangle| \leqslant \|x\|\|y\|,$$

l'égalité ayant lieu si, et seulement si, les vecteurs x et y sont colinéaires.

1. Établir l'inégalité de Cauchy-Schwarz en observant, par exemple, que la quantité $\|\lambda x + y\|$ reste positive pour tout réel λ.
2. Écrire les inégalités qui en résultent lorsque l'on prend successivement $E = \mathbf{R}^n$, $E = \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ puis $E = \mathscr{C}([a, b], \mathbf{R})$ muni de son produit scalaire usuel.
3. Établir l'inégalité de Minkowski : pour tous n-uplets $(x_1, \ldots, x_n)$, $(y_1, \ldots, y_n)$ de $\mathbf{R}^n$

$$\left(\sum_{k=1}^{n}(x_k + y_k)^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

   Préciser les cas où l'égalité a lieu.

4. Montrer que, pour tout n-uplet $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k \leqslant \sqrt{n}\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)^{\frac{1}{2}}$. Préciser les cas où l'égalité a lieu.
5. Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, pour tout n-uplet $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ tel que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k = 1$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \geq \frac{1}{n}$.

   Préciser les cas où l'égalité a lieu.

6. Soit $\Omega = \{f \in \mathscr{C}([0, 1], \mathbf{R}) \mid f > 0\}$ et Φ définie sur Ω par $\Phi(f) = \left(\displaystyle\int_0^1 f(t)\, \mathrm{d}t\right)\left(\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{f(t)}\, \mathrm{d}t\right)$.

   Montrer que $\displaystyle\inf_{f\in\Omega} \Phi(f)$ existe et est atteint. Préciser les éléments $f \in \Omega$ en lesquels cet inf est atteint.

2 Moyennes arithmétiques, géométriques et harmoniques.

Pour tout entier $n \geq 2$ et $x_1, x_2, \ldots, x_n$ des nombres réels strictement positifs. On note respectivement

$$A_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k, \quad G_n = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} x_k}, \quad H_n = \frac{n}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}},$$

la moyennes arithmétique, géométrique et harmonique des nombres $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Soit $P(n)$ la propriété : $G_n \leqslant A_n$.

1. Montrer que $P(2)$ est vraie, puis que $P(n)$ vraie entraîne $P(2n)$ vraie.
2. Montrer que $P(n)$ vraie entraîne $P(n-1)$ vraie.
3. Conclure que $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq 2$.
4. Étudier les cas d'égalité.
5. En déduire finalement que

$$H_n \leqslant G_n \leqslant A_n$$

3 **Inégalité de Hadamard.** On munit l'espace vectoriel $\mathbf{R}^n$ de son produit scalaire et de sa norme euclidiennes canoniques, notés respectivement $\langle\ ,\ \rangle$ et $\|\cdot\|$. Montrer que si M est une matrice carrée d'ordre n à coefficients réels dont les colonnes sont $C_1, \ldots, C_n$ alors :

$$|\det M| \leqslant \prod_{i=1}^{n} \|C_i\|\,.$$

Préciser les cas d'égalité. (Indication : lorsque M est inversible, appliquer le procédé d'orthonormalisation de Schmidt aux colonnes de M).

4 **Inégalité de Hilbert.**

1. Soit p une fonction polynômiale à coefficients réels.
   (a) Établir l'égalité : $\displaystyle\int_{-1}^{1} p(x)\ \mathrm{d}x = -i \int_0^{\pi} p(\mathrm{e}^{it})\mathrm{e}^{it}\ \ \mathrm{d}t$.
   (b) En déduire l'inégalité $\displaystyle\int_0^1 p^2(x)\ \mathrm{d}x \leq \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \left|p(\mathrm{e}^{it})\right|^2\ \mathrm{d}t$.
2. En déduire l'inégalité de Hilbert : si $a_0, \ldots, a_n$ sont des nombres réels positifs alors on a

$$\sum_{0\leqslant p,q\leqslant n} \frac{a_p a_q}{p+q+1} \leqslant \pi \sum_{p=0}^{n} a_p^2.$$

5 **Inégalité de Hardy.**
Soit $f : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$ une fonction continue telle que f^2 soit intégrable.
On note g la fonction définie sur $\mathbf{R}_+$ par :

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\ \mathrm{d}t & \text{si } x > 0 \\ \\ f(0) & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

1. Montrer que g est continue sur $\mathbf{R}_+$ et que $\displaystyle\int_0^x g^2(t)\ \mathrm{d}t = 2\int_0^x f(t)g(t)\ \mathrm{d}t - xg^2(x)$.
2. En déduire que : $\displaystyle\int_0^{+\infty} g^2(t)\ \mathrm{d}t \leq 4\int_0^{+\infty} f^2(t)\ \mathrm{d}t$.

6 **Inégalité de Gronwall.** Soit c un réel, $u, v : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ deux fonctions continues vérifiant :
$\forall x \in \mathbf{R}_+,\quad u(x) \leqslant c + \displaystyle\int_0^x u(t)\,v(t)\ \mathrm{d}t$. Montrer que : $\forall x \in \mathbf{R}_+,\quad u(x) \leqslant c\exp\left(\displaystyle\int_0^x v(t)\ \mathrm{d}t\right)$.