Mémo sur les structures

I. Groupes, sous groupes

Définition : G un ensemble et * un loi interne. (G,*) est un groupe si et seulement si

1) G n'est pas vide

2) chaque élément de G est inversible

On appelle groupe commutatif ou abélien les groupes munis d'une loi commutative.

Définition : Soit (G,*) un groupe et H une partie de G.
H est un sous groupe de G $\Leftrightarrow$ (H,*) est un groupe
H est un sous groupe de (G,*) $\Leftrightarrow$ $H \subset G$, $H \neq \emptyset$ et $\forall (x,y) \in H^2$ $x*y^{-1} \in H$

Définitions : (G,*) et (H,#) deux groupes d'éléments neutre e_G et e_H, f une application de G dans H.
On dit que f est un morphisme de groupe $\Leftrightarrow$ $\forall (x,y) \in G^2$ $f(x*y) = f(x)\#f(y)$

Propriétés : **Ker f = {$x \in G$, $f(x) = e_H$} est un sous groupe de G**
Im f = {$y \in H$, $\exists x \in G$ $y = f(x)$} est un sous groupe de H
$f(e_G) = e_H$
f est injective $\Leftrightarrow$ ker f = {e_G}

II. Anneaux, idéaux

Définition : Soit A un ensemble muni de deux lois internes notées en général + et .

On dit que (A,+, .)est un anneau si et seulement si :

1) (A,+) est un groupe commutatif d'élément neutre 0_A
2) . est distributive à droite et à gauche sur +
3) La loi . admet un neutre différent de 0_A noté 1_A

Si de plus la loi . est commutative on dit que l'anneau est commutatif ou abélien.

Définition : Soit I une partie de A.

On dit que I est un idéal à gauche (à droite) de A $\Leftrightarrow$ (I,+) est un sous groupe de A

$\forall a \in A$ $\forall x \in I$ $ax \in I$ ($xa \in I$)

Un idéal à gauche et à droite de A est appelé idéal bilatère de A ou idéal de A

Définition : Soit (A,+,.) un anneau et I un idéal de A

I est principal à gauche $\Leftrightarrow$ $\exists a \in A$ tel que I = A.a ($\forall x \in I$ $\exists y \in A$, x = y.a)

I est principal à droite $\Leftrightarrow$ $\exists a \in A$ tel que I = a.A ($\forall x \in I$ $\exists y \in A$, x = a.y)

Un idéal principal à droite et à gauche est dit principal (si A est commutatif par exemple)

Autrement dit un idéal principal est un idéal engendré par un élément a de A

Définition: Un anneau intègre dont tous les anneaux sont principaux est dit principal.

Définition : Soient (A,+,.) et (B,+,.) deux anneaux (pas forcément munis des même lois) et f une application de A dans B

f est un morphisme d'anneau $\Leftrightarrow$ $f(1_A) = 1_B$ et $\forall$ $(x,y) \in A^2$ $f(x+y) = f(x) + f(y)$
$f(x.y) = f(x).f(y)$

Remarque : Le noyau de f est une partie de A qui n'est pas un sous anneau de A.

Propriété : f un morphisme d'anneau de A dans B

Ker f = $f^{-1}\{0_B\}$ est un idéal de A

III. Corps, Espace Vectoriel, Algèbre

Définition : Soit IK un ensemble munis de deux lois internes + et .

IK est un corps $\Leftrightarrow$ (IK ,+,.) est un anneau

$O_{IK} \neq 1_{IK}$

$\forall$ $x \in$ IK $\backslash\{0\}$ x est inversible pour .

Autrement dit IK est un groupe pour les deux lois.

Définition : IK un corps, on appelle IK espace vectoriel (ou IK ev) tout ensemble E muni d'une loi interne notée + et d'une loi externe de $K \times E \rightarrow E$ telles que

1) (E,+) est un groupe abélien
2) $\forall$ $(k,l) \in K^2$ $\forall$ $x \in E$ $(k + l)x = kx + lx$
3) $\forall$ $k \in K$ $\forall$ $(x,y) \in E^2$ $k(x + y) = kx + ky$
4) $\forall$ $(k,l) \in K^2$ $\forall$ $x \in E$ $k(lx) = (kl)x$
5) $\forall$ $x \in E$ $1x = x$

Les éléments de E sont appelés des vecteurs, ceux de K des scalaires

Définition : Soit K un corps commutatif. On dit que A est une K algèbre $\Leftrightarrow$
1) A est un K ev
2) Il existe une troisième loi, interne sur A, notée $\times$, telle que
   1. $(A,+,\times)$ est un anneau ie $\times$ est distributive sur +
   2. $\forall$ $k \in K$ $\forall$ $(x,y) \in A^2$ $k(x\times y) = (kx)\times y$

Exemple : K[X] muni de l'addition et du produit de convolution est une K algèbre
L(E) muni de l'addition et de la composition est une K algèbre
$M_n(K)$ muni de l'addition et du produit matriciel est une K algèbre

Définition : On appelle morphisme d'algèbre une application linéaire pour les deux lois internes.

Exemples : π_f : $P \rightarrow p(f)$ où $f \in L(E)$ est un morphisme d'algèbre
π_M : $P \rightarrow p(M)$ où $M \in M_n(K)$ est un morphisme d'algèbre