Agrégation Interne

Des exercices autour du calcul du rang, du déterminant et du polynôme caractéristique d'une matrice. Algorithme de Gauss et application aux systèmes d'équations.

Exercice 1 *Soit* $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *et* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ *Calculer* $P^{-1}\,A\,P$

Exercice 2 *Déterminer le rang des matrices suivantes :*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 3 *Soit* $n \in \mathbb{N}*$ *et* $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$*, on définit une matrice* A *par* $A_{ij} = \sin(a_i + a_j)$.

1. *Montrer que* $\mathrm{rg} A \leq 2$
2. *Calculer* $\det A$

Exercice 4 *Soit* $a \in \mathbb{R}$*. Déterminer selon la valeur de* a *le rang de* $\begin{pmatrix} 2 & a & a & a \\ a & 2 & a & a \\ a & a & 2 & a \\ a & a & a & 2 \end{pmatrix}$

Exercice 5 *Calculer le déterminant des matrices suivantes :*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+c & a+c & a+b \\ bc & ac & ab \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x & a & b & c \\ a & x & b & c \\ a & b & x & c \\ a & b & c & x \end{pmatrix}$$

Exercice 6 *On considère la matrice* M *suivante* $M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$ *où* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $M \in \mathcal{M}_{n+p}(\mathbb{K})$ *(M est définie par bloc).*
Montrer que $\det M = \det A \times \det B$

Exercice 7 *Soit* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

1. *Déterminer le polynôme caractéristique de A*
2. *En déduire que A est inversible et calculer son inverse*

Exercice 8 *Calculer A^{-1}, B^{-1}, C^{-1} par l'algorithme de Gauss-Jordan :*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -4 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Retrouver ces résultats en cherchant un polynôme annulateur de A, B, C

Exercice 9 *Calculer P_A le polynôme caractéristique de* $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \mathbb{O} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} \end{pmatrix}$

où $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$

Exercice 10 *Soit* $(m, a, b, c) \in \mathbb{R}^4$ *Résoudre le système suivant :*

$$\begin{cases} 2x + & y - & z = & a \\ x + & my + & z = & b \\ 3x + & y - & mz = & c \end{cases}$$

Exercice 11 *Soit* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

1. *Montrer que l'équation en X, $AX = B$ avec $(X, B) \in \mathcal{M}_{n,3}(\mathbb{K})$ a des solutions si et seulement si les colonnes de B sont des progressions arithmétiques (on pourra traiter d'abord le cas $n = 1$).*
2. *Résoudre* $AX = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 5 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$

Exercice 12

1. *Résoudre le système suivant avec l'algorithme de Gauss :*

$$\begin{cases} x + 2y + 3z - 2t & = & 6 \\ 2x - y - 2z - 3t & = & 8 \\ 3x + 2y - z + 2t & = & 4 \\ 2x - 3y + 2z + t & = & -8 \end{cases}$$

2. *Résoudre :*

$$\begin{cases} x + 2y + 3z - 2t & = & -4 \\ 2x - y - 2z - 3t & = & 1 \\ 3x + 2y - z + 2t & = & 6 \\ 2x - 3y + 2z + t & = & 1 \end{cases}$$

On pourra utiliser la décomposition LU de la matrice du système

Exercice 13 $\mathbb{K}$ *un corps et* n *un entier strictement positif. A toute famille de scalaires* $(x_{i,j})_{1\leqslant j<i\leqslant n}$ *on associe les matrices triangulaires inférieures* L *et* $(T_k)_{1\leqslant k\leqslant n-1}$ *définies ainsi :*

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ x_{2,1} & \ddots & \ddots & \vdots & & & & \vdots \\ x_{3,1} & x_{3,2} & 1 & 0 & & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 & & & \vdots \\ \vdots & & & x_{k+1,k} & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & & \ddots & 1 & 0 \\ x_{n,1} & \dots & \dots & x_{n,k} & \dots & \dots & x_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix} \quad T_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 & & & & \vdots \\ \vdots & & 0 & 1 & 0 & & & \vdots \\ \vdots & & 0 & x_{k+1,k} & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & x_{n,k} & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. *Prouver que* $T_k = \prod_{i=k+1}^{n} T\left(x_{i,k};i;k\right)$ *où* $T\left(x_{i,k};i;k\right) = I_n + x_{i,k}\,E_{i,k}$ *matrice de transvection*
2. *Déterminer l'inverse de* T_k *(on pourra chercher l'inverse de* $T\left(x_{i,k};i;k\right)$*).*
3. *Démontrer que* $L = T_1\,T_2\dots T_{n-1} = \prod_{k=1}^{n-1} T_k$