Séries de Fourier

Exercice 1 : développement en série de Fourier

Soit $f : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$ la fonction 2π-périodique définie sur $[0, 2\pi[$ par $f(t) = \begin{cases} \dfrac{\pi - t}{2} & \text{si } t \in]0, 2\pi[, \\ 0 & \text{si } t = 0. \end{cases}$

1. Montrer que f est égale à la somme de sa série de Fourier.
2. Écrire la série de Fourier de f puis calculer la valeur de la somme $\mathrm{S} = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Exercice 2 : égalité des coefficients de Fourier de fonctions continues

On note E l'espace vectoriel des fonctions continues 2π-périodiques de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$ et on considère l'application de $\Phi : \mathrm{E} \to \mathbf{C}^{\mathbf{Z}}$, qui à f dans E associe la suite $(c_n(f))$ des coefficients de Fourier exponentiels de f.

1. Montrer que Φ est injective.
2. Montrer que $\operatorname{Im}\Phi \subset \ell^2$ (où ℓ^2 désigne l'espace des suites indexées par $\mathbf{Z}$ de carré sommable).
3. En utilisant la fonction f de l'exercice 1 montrer que $\operatorname{Im}\Phi$ n'est pas égal à ℓ^2. $\operatorname{Im}\Phi$ est-il dense dans ℓ^2 ?

Exercice 3 : une fonction Hölderienne

Soit f la fonction 2π-périodique paire définie sur $[0, \pi]$ par $f(t) = \sqrt{t}$ et (a_n) la suite de ses coefficients de Fourier.

1. Montrer que $a_n = \mathrm{O}(1/n^{\frac{3}{2}})$ quand $n \to +\infty$. (Intégrer par parties).
2. Montrer que f est la somme de sa série de Fourier.

Exercice 4 : théorème de Féjer

Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ une fonction 2π-périodique et continue dont on désigne par $c_n(f)$ les coefficients de Fourier exponentiels. Pour tout $n \in \mathbf{N}$ et pour $t \in \mathbf{R}$, on pose :

$$\mathrm{S}_n(f)(t) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)\, \mathrm{e}^{ikt} \quad \text{et} \quad \sigma_n(f)(t) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{S}_k(f)(t).$$

Il s'agit, dans cet exercice, de montrer le théorème de Fejèr : la suite de fonctions $(\sigma_n(f))_{n \in \mathbf{N}}$ converge uniformément sur $\mathbf{R}$ vers f.

On définit le noyau de Dirichlet et le noyau de Fejèr respectivement par :

$$\forall t \in \mathbf{R}, \qquad \mathrm{D}_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} \mathrm{e}^{ikt} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{F}_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{D}_k(t).$$

1. Vérifier que $\forall t \in \mathbf{R} \setminus 2\pi\mathbf{Z}$, $\mathrm{D}_n(t) = \dfrac{\sin(n + \frac{1}{2})t}{\sin \frac{t}{2}}$ et $\mathrm{F}_n(t) = \dfrac{1}{n} \dfrac{\sin^2 \frac{nt}{2}}{\sin^2 \frac{t}{2}}$, que $\forall t \in 2\pi\mathbf{Z}$, $\mathrm{D}_n(t) = 2n + 1$ et $\mathrm{F}_n(t) = n$.
2. Montrer que $\forall t \in \mathbf{R}$, $\mathrm{S}_n(f)(t) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t - s)\mathrm{D}_n(s)\, \mathrm{d}s$ et $\sigma_n(f)(t) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t - s)\mathrm{F}_n(s)\, \mathrm{d}s$.
3. Montrer que f est uniformément continue sur $\mathbf{R}$.
4. Établir alors le théorème de Fejèr.
5. En déduire le théorème d'approximation de Weierstrass : *toute fonction continue 2π-périodique est limite uniforme de polynômes trigonométriques.*

Exercice 5 : inégalité de Wirtinger

Dans cet exercice, on utilisera les coefficients de Fourier exponentiels.

1. Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ une fonction T-périodique, continue et de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux vérifiant $\displaystyle\int_0^{\mathrm{T}} f(t)\ \mathrm{d}t = 0$.
   (a) Montrer l'inégalité de Wirtinger : $\displaystyle\int_0^{\mathrm{T}} |f(t)|^2\ \mathrm{d}t \leq \frac{\mathrm{T}^2}{4\pi^2}\int_0^{\mathrm{T}} |f'(t)|^2\ \ \mathrm{d}t.$
   (b) Montrer qu'il y a égalité, dans l'inégalité de Wirtinger, si et seulement si, il existe des nombres complexes a et b tels que :
   $$f(t) = a\cos\frac{2\pi}{\mathrm{T}}t + b\sin\frac{2\pi}{\mathrm{T}}t.$$
2. Soit $f : [0, \mathrm{T}] \to \mathbf{C}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ telle que $f(0) = f(\mathrm{T}) = 0$. Montrer l'inégalité de Poincaré :
   $$\int_0^{\mathrm{T}} |f(t)|^2\ \ \mathrm{d}t \leq \frac{\mathrm{T}^2}{\pi^2}\int_0^{\mathrm{T}} |f'(t)|^2\ \ \mathrm{d}t.$$

Exercice 6 : inégalité isopérimétrique

On souhaite établir l'inégalité isopérimétrique : pour une courbe fermée Γ simple, de classe $\mathscr{C}^1$ et n'ayant que des points réguliers, si on désigne par L sa longueur et par A l'aire du domaine qu'elle délimite, alors :

$$4\pi\mathrm{A} \leqslant \mathrm{L}^2 \tag{1}$$

l'égalité n'ayant lieu que lorsque Γ est un cercle.

A cette fin, on utilise un paramétrage normal de Γ : $t \mapsto (x(t), y(t))$ ($\forall t \in [0, \mathrm{L}]$, $x'^2(t) + y'^2(t) = 1$) que l'on considère comme périodique de période L (Γ est fermée) et la formule donnant l'aire : $\mathrm{A} = \displaystyle\int_0^{\mathrm{L}} x(t)y'(t)\ \mathrm{d}t$.

1. En écrivant $\mathrm{L} = \displaystyle\int_0^{\mathrm{L}} \left(x'^2(t) + y'^2(t)\right)\ \mathrm{d}t$, montrer que :
   $$\mathrm{L}^2 - 4\pi\mathrm{A} = \mathrm{L}\left(\int_0^{\mathrm{L}} \left(x'^2(t) - \frac{4\pi^2}{\mathrm{L}^2}x^2(t)\right)\ \ \mathrm{d}t + \int_0^{\mathrm{L}} \left(y'(t) - \frac{2\pi}{\mathrm{L}}x(t)\right)^2\ \mathrm{d}t\right).$$
2. Établir (1) en utilisant l'inégalité de Wirtinger en supposant, d'abord, que $\displaystyle\int_0^{\mathrm{L}} x(t)\ \mathrm{d}t = 0$.
3. Conclure.

Exercice 7 : formule sommatoire de Poisson

Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ telle que $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} x^n\ f^{(m)}(x) = 0$, pour tout couple (n, m) d'entiers naturels et soit φ la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par :

$$\varphi(x) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} f(x + 2k\pi).$$

1. Justifier l'existence de φ.
2. Montrer que φ est 2π-périodique et de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$.
3. Calculer les coefficients de Fourier de φ.
4. Pour $n \in \mathbf{Z}$, on pose $\hat{f}(n) = \displaystyle\int_{\mathbf{R}} f(t)\mathrm{e}^{-int}\ \mathrm{d}t$.
   (a) Justifier l'existence des $\hat{f}(n)$.
   (b) Établir, pour tout réel x, la formule : $\varphi(x) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\sum_{k\in\mathbf{Z}} \hat{f}(n)\mathrm{e}^{inx}$.

Exercice 8 : un exemple de série de Fourier divergente en un point (extrait d'une épreuve CCP)

On considère la suite de fonctions (f_n) définies sur l'intervalle $[0,\pi]$ pour tout entier naturel non nul n par :

$$f_n(x) = \frac{1}{n^2}\sin\left[\left(2^{n^3}+1\right)\frac{x}{2}\right].$$

1. Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur $[0,\pi]$.

   On définit alors la fonction f paire, continue, de période 2π sur $\mathbf{R}$ et telle que pour tout réel $x \in [0,\pi]$,

   $$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x).$$

2. Pour p, q et k entiers naturels on pose : $\mathrm{I}_{p,k} = \int_0^\pi \cos(pt)\sin\left(\frac{2k+1}{2}t\right)\mathrm{d}t$ et $\mathrm{T}_{q,k} = \sum_{p=0}^{q} \mathrm{I}_{p,k}$.

   (a) Calculer, pour p et k entiers naturels, l'intégrale $\mathrm{I}_{p,k}$.

   (b) Pour q et k entiers naturels, déterminer un réel positif c_k tel que $\mathrm{T}_{q,k} = c_k + \sum_{j=k-q}^{k+q} \frac{1}{2j+1}$; en déduire que, pour tout couple (q,k) d'entiers naturels, $\mathrm{T}_{q,k} \geqslant 0$.

   (c) Déterminer, pour N au voisinage de $+\infty$, un équivalent simple de $\sum_{k=0}^{\mathrm{N}} \frac{1}{2k+1}$.

   (d) En déduire que, pour k au voisinage de $+\infty$, $\mathrm{T}_{k,k} \sim \frac{1}{2}\ln k$.

3. Montrer que, pour p entier naturel non nul, $a_p(f) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\mathrm{I}_{p,2^{n^3-1}}$.

4. Montrer que, pour p entier naturel non nul, $\mathrm{S}_{2^{p^3-1}}(f)(0) \geqslant \frac{-a_0(f)}{2} + \frac{2}{\pi p^2}\mathrm{T}_{2^{p^3-1},2^{p^3-1}}$ où $\mathrm{S}_n(f)$ est la somme partielle de Fourier d'ordre n de f. (Remarquer que $\frac{a_0}{2} + \sum_{i=1}^{\mathrm{N}} a_i = -\frac{a_0}{2} + \sum_{i=1}^{\mathrm{N}} a_i$).

5. Conclure que la suite $(\mathrm{S}_n(f)(0))$ diverge.