Devoir sur table

Calculatrice non autorisée.
Durée du devoir : 2h30

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ de dimension $n \leqslant 2$. Pour tout endomorphisme u de E, on désigne par φ_u l'application définie sur $\mathcal{L}(E)$ par

$$\forall v \in \mathcal{L}(E) \quad \varphi_u(v) = u \circ v - v \circ u$$

I Préliminaire

1. Vérifier que $\forall u \in \mathcal{L}(E)$, φ_u est un endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$
2. $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, déterminer $\varphi_{\lambda Id_E}$
3. Montrer que $\forall u \in \mathcal{L}(E)$, $\dim(\ker(\varphi_u)) \geqslant 2$

II Etude d'un exemple

Dans cette partie, on suppose que $n = 2$ et on désigne par $B = (e_1, e_2)$ une base de E. Soit u l'endomorphisme de E tel que $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ soit la matrice de u relativement à la base B.

1. u est-il un endomorphisme diagonalisable ?

On considère M_1, M_2, M_3 et M_4 les matrices à coefficients complexes d'ordre 2 définies par

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et on désigne par θ_1, θ_2, θ_3, θ_4 les endomorphismes de E dont les matrices relativement à la base B s'écrivent M_1, M_2, M_3, M_4. Ainsi $C = (\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4)$ est une base de $\mathcal{L}(E)$.

2. Déterminer Δ la matrice de φ_u relativement à C
3. φ_u est-il diagonalisable ? Préciser les valeurs propres non nulles de φ_u et la dimension de $\ker(\varphi_u)$.
4. Déterminer le sous-espace propre associé à la plus grand valeur propre de φ_u

III Etude du cas où u est diagonalisable

Dans cette partie on suppose que u est un endomorphisme diagonalisable de E. On désigne par $(\epsilon_j)_{1 \leqslant j \leqslant n}$ une base de E constituée des vecteurs propres de u. Pour tout[1] $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, on définit l'endomorphisme $v_{i,j}$ de E par

$$v_{i,j}(\epsilon_i) = \epsilon_j \text{ et } v_{i,j}(\epsilon_k) = 0_E \text{ si } k \neq i$$

[1] $[\![1, n]\!]$ désigne l'ensemble des entiers naturels compris entre 1 et n

1. Prouver que $v_{i,j}$ est un vecteur propre de φ_u
2. En déduire que φ_u est diagonalisable
3. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ les valeurs propres de u deux à deux distinctes et $V(\lambda_1), \dots, V(\lambda_r)$ les sous-espaces propres associés de dimensions respectives $n_1, \dots, n_r$
   a) Quelle relation vérifient $n, n_1, \dots, n_r$?
   b) Exprimer la dimension de $\ker(\varphi_u)$ et le rang de φ_u en fonction de $n_1, \dots, n_r$

IV **Etude du cas où φ_u est diagonalisable**

On suppose maintenant que φ_u est diagonalisable.

1. Soit x un vecteur donné de E, non nul.
   a) Montrer que $\forall y \in E$, $\exists w \in \mathcal{L}(E)$, $y = w(x)$
   b) Montrer qu'il existe une base de E, notée $B(x)$ telle que $B(x) = \big(v_k(x)\big)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ où $\forall k \in [\![1, n]\!]$, v_k est un vecteur propre de φ_u
2. Démontrer que u est diagonalisable
3. Monter que $\varphi_u = 0_{\mathcal{L}(E)} \iff \exists \lambda \in \mathbb{C}$, $u = \lambda Id_E$

V **Une propriété des vecteurs propres de φ_u**

Dans cette partie on suppose que φ_u admet une valeur propre non nulle $\lambda \in \mathbb{C}$ et v désigne un vecteur propre non nul de φ_u associé à λ

1. a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, v^k est un vecteur propre de φ_u et préciser la valeur propre associée.
   b) En déduire que v est un endomorphisme nilpotent. Quel est l'indice maximal de v ?
2. Dans cette question, on suppose que v est nilpotent d'indice n
   a) Montrer $\forall k \in [\![1, n-1]\!]$, $\dim(\ker(v^k)) < \dim(\ker(v^{k+1}))$.
   b) $\forall k \in [\![1, n-1]\!]$ déterminer $\dim(\ker(v^k))$.
   c) Démontrer que φ_u est diagonalisable.