

Olympiades Académiques de Mathématiques

Académie de la Guadeloupe

Session 2008

Durée : 4 heures

Exercice 1 : « *Les bons nombres* » (national)

On dit qu'un nombre entier supérieur ou égal à 2 est « bon » s'il peut s'écrire comme la somme de nombres entiers naturels non nuls, distincts ou non, dont la somme des inverses est égale à 1.

On dit qu'il est « mauvais » s'il n'est pas « bon ».

Ainsi, par exemple :

$2 = 1 + 1$ et $\frac{1}{1} + \frac{1}{1} \neq 1$, donc 2 est « mauvais » (la seule décomposition possible pour 2

étant 1+1).

$3 = 1 + 2$ et $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} \neq 1$; $3 = 1 + 1 + 1$ et $\frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} \neq 1$; donc 3 est également « mauvais »

(les deux décompositions possibles pour 3 ayant été examinées).

1. Déterminer pour chacun des nombres entiers de 4 à 10 s'il est « bon » ou « mauvais ».
2. Montrer que le carré de tout nombre entier supérieur ou égal à 2 est « bon ».
3. Montrer que si n est « bon », alors $2n + 2$ et $2n + 9$ sont « bons ».
4. On admet que tous les nombres entiers de 24 à 55 sont « bons ».
Qu'en est-il de tout nombre entier supérieur ou égal à 56 ?

Exercice 2 : « *Inconnus bien connus !* » (académique)

Montrer que si l'on prend six personnes au hasard, alors de deux choses l'une : soit au moins trois d'entre elles se connaissent toutes l'une l'autre, soit on peut en trouver trois parmi elles telles qu'aucune des trois n'en connaisse une autre (des trois).

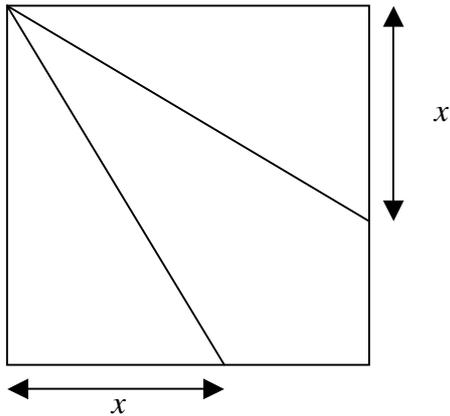
Est-ce encore vrai si on considère plus de six personnes ? Et cinq personnes ?

Exercice 3 : « *Géométrie : élémentaire !* » (académique)

Soit ABC un triangle ayant ses trois angles aigus et soit R le rayon de son cercle circonscrit. On considère D_A , D_B et D_C les disques de rayon 1 et de centres respectifs A, B et C.

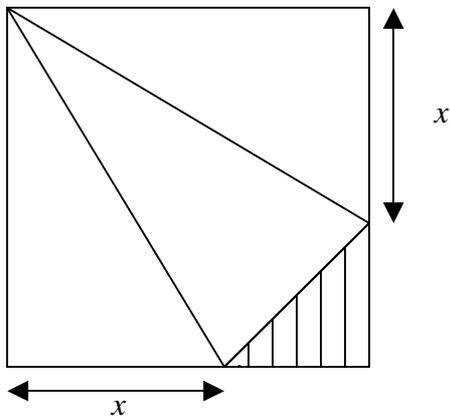
1. Montrer que si les disques D_A , D_B et D_C recouvrent le triangle ABC alors $R \leq 1$.
2. Si $R \leq 1$ montrer que tout point P intérieur au triangle ABC appartient à l'un des disques D_A , D_B ou D_C .

Exercice 4 : « Un partage équitable » (national)



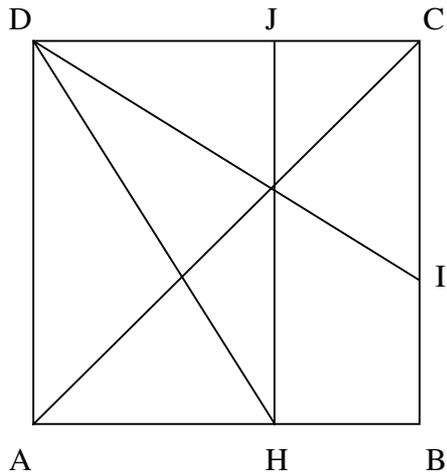
1. Léonard est géomètre. Il veut partager un carré de côté 1 en trois parties de même aire selon le schéma ci-contre.

Quelle valeur doit-il donner à x pour arriver à ses fins ?



2. Mais Léonard est aussi esthète. Ne trouvant pas élégante sa construction, il décide de supprimer la zone triangulaire hachurée. Ainsi les trois parties restantes sont triangulaires.

Peuvent-elles avoir la même aire ?



3. Et Léonard est mathématicien. Ayant réalisé grossièrement (ci-contre) la construction de la question 2, il mène du point H la perpendiculaire (HJ) à la droite (AB).

Il a l'impression que les droites (HJ), (DI) et (AC) sont concourantes.

Qu'en est-il ?