Université Claude Bernard–Lyon I
Agrégation interne de Mathématiques : Géométrie
Année 2011–2012

# Géométrie affine

Nombre de ces exercices ont été tirés du livre *Géométrie* de Michèle Audin (Espaces 34 et Belin), dont l'usage est chaudement recommandé.
On fixe un espace affine $\mathcal{E}$ dirigé par un espace vectoriel $E$ sur un corps $\mathbb{K}$.

## I Espaces affines, sous-espaces affines

### 1° Truismes

**a)** Les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu.
**b)** Par deux points (distincts) il passe une et une seule droite.
**c)** Une partie de $\mathcal{E}$ est un espace affine si et seulement si elle contient toutes les droites passant par deux de ses points.

**2°** Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{D}_1, \dots, \mathcal{D}_n$ des droites de $\mathcal{E}$. Supposons que deux quelconques de ces droites se coupent (pour tout $i, j$, $\mathcal{D}_i \cap \mathcal{D}_j \neq \emptyset$). Montrer qu'elles sont toutes contenues dans un plan.

**3°** On suppose que $\mathcal{E}$ est de dimension 3 et on choisit un repère affine.
**a)** Donner une équation cartésienne du plan passant par $A(1,0,1)$ et dont la direction est engendrée par les vecteurs $u(0,2,1)$ et $v(1,-1,0)$.
**b)** Donner une équation du plan parallèle au précédent et passant par $B(0,1,0)$.
**c)** Donner une équation du plan parallèle au précédent et passant par le milieu de $[AB]$.

**4°** (Même contexte qu'au précédent.)
**a)** A quelle condition les systèmes

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} a'_1x + b'_1y + c'_1z = 0 \\ a'_2x + b'_2y + c'_2z = 0 \end{cases}$$

décrivent-ils des droites vectorielles de $E$ ? la même droite de $E$ ?
**b)** A quelle condition les systèmes

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} a'_1x + b'_1y + c'_1z = d'_1 \\ a'_2x + b'_2y + c'_2z = d'_2 \end{cases}$$

décrivent-ils des droites vectorielles de $\mathcal{E}$ ? la même droite de $\mathcal{E}$ ?

## II Barycentres

### 1° Back to basics

**a)** On donne un entier $n \in \mathbb{N}^*$, des scalaires $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ et des points $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{E}$. Expliquer et justifier la notation $a_1A_1 + \cdots + a_nA_n$. (Quelle contrainte doit-on imposer aux $a_i$ pour que la notation ait un sens ?)
**b)** Qu'entend-on par "associativité du barycentre" ?

### 2° Coordonnées barycentriques

**a)** Supposons que $(A_0, \dots, A_n)$ soit un repère affine de $\mathcal{E}$. Montrer que tout point $M \in \mathcal{E}$ s'écrit comme barycentre des $A_i$ affecté de coefficients convenables. Ces coefficients ne sont pas uniques : comparer deux familles de coefficients. Une telle famille est appelée coordonnées barycentriques de $M$.

**b)** A quelle condition une $(n+1)$-famille de scalaires forme-t-elle les coordonnées barycentriques d'un point ? Il faut $n+1$ coefficients pour décrire un point dans un espace de dimension $n$ : n'est-ce pas étonnant ?
**c)** On suppose que $\dim \mathcal{E} = 2$ et on fixe un repère affine $(A, B, C)$ (ou, ce qui revient au même, un triangle non aplati $ABC$). On note $(a, b, c)$ des coordonnées barycentriques d'un point $M$ dans ce repère. Quel est le lieu des points $M$ tels que $a = 0$ ? tels que $b + c = 0$ ?
**d) Truc utile.** Soit $a, b, c$ trois réels tels non nuls, dont la somme (resp. la somme de deux d'entre eux) n'est pas nulle. Soit $M$ un point tel que
(i) $\overrightarrow{AM}$ soit colinéaire à $b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC}$,
(ii) $\overrightarrow{BM}$ soit colinéaire à $a\overrightarrow{BA} + c\overrightarrow{BC}$,
(iii) $\overrightarrow{CM}$ soit colinéaire à $a\overrightarrow{CA} + b\overrightarrow{CB}$.
Montrer que les coordonnées barycentriques de $M$ sont proportionnelles à $(a, b, c)$.
**e) Variante utile aussi.** Soit $M$ un point du plan, tel que $(AM)$ et $(BC)$ se coupent en $A'$, On suppose que les coordonnées barycentriques de $A'$ dans le repère $(B, C)$ de la droite $(BC)$ sont proportionnelles à $(b, c)$, *etc.* (faire une permutation circulaire). Montrer que les coordonnées barycentriques de $M$ dans $(A, B, C)$ sont proportionnelles à $(a, b, c)$.
Quelle condition sur $(a, b, c)$ l'hypothèse de l'existence de $A'$, $B'$ et $C'$ impose-t-elle ?
**f) Exemple : incursion dans le monde euclidien.** On suppose que $E$ est muni d'un produit scalaire euclidien. On note $I$ le centre du cercle inscrit et $O$ le centre du cercle circonscrit à $ABC$. Constater que $\overrightarrow{AI}$ est colinéaire à $b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC}$ (où on a noté $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$), et en déduire les coordonnées barycentriques de $I$. Déterminer les coordonnées barycentriques de l'intersection de $(AO)$ et $(BC)$ dans le repère $(B, C)$, et en déduire celles de $O$ dans $(A, B, C)$.

**3°** **Critères d'alignement dans le plan**

**a) En fonction des coordonnées usuelles.**
Dans un repère $(O, i, j)$, les points $M(x, y)$, $M'(x', y')$ et $M''(x'', y'')$ sont alignés si, et seulement si

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \end{pmatrix} = 0.$$

**b) En fonction des coordonnées barycentriques.**
Dans un repère affine $(A, B, C)$, les points $M$, $M'$, $M''$ admettant respectivement pour coordonnées barycentriques $(a, b, c)$, $(a', b', c')$, et $(a'', b'', c'')$, sont alignés si, et seulement si

$$\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} = 0.$$

(Indication : le déterminant s'annule SSI une ligne est combinaison linéaire des deux autres.)

**4°** **Equations de droites en coordonnées barycentriques**

On fixe un repère affine $(A, B, C)$ d'un plan affine.
**a)** Etant donné deux points $D$ et $E$, vérifier que la droite $(DE)$ a une équation de la forme $ua + vb + wc = 0$, où $u, v, w$ sont des réels fixés dont la somme n'est pas nulle, et $(a, b, c)$ sont des coordonnées barycentriques du "point courant" $M$.
**b)** Inversement, on donne trois réels $u, v, w$ dont la somme n'est pas nulle, et on cherche à caractériser l'ensemble $\mathcal{D}$ des points $M$ admettant pour coordonnées barycentriques $(a, b, c)$ tels que $ua + vb + wc = 0$.

Vérifier qu'un des trois nombres $u, v, w$ est différent des deux autres. En déduire que $\mathcal{D}$ intersecte au moins deux des droites $(AB)$, $(BC)$, $(CA)$ et que chaque intersection non vide est un point. Montrer alors que $\mathcal{D}$ est la droite passant par ces deux points.
**c) Théorème de Menelaüs.** Soit $A' \in (BC)$, $B' \in (AC)$ et $C' \in (AB)$ trois points. On les suppose alignés. Calculer les coordonnées barycentriques de $A'$ en fonction des coefficients $u, v, w$ d'une équation en coordonnées barycentriques de la droite qui les contient. Calculer $\overline{A'B}/\overline{A'C}$ en ces termes. En déduire un sens du théorème de Menelaüs. Prouver ensuite la réciproque.
**d) Pinceau de droites.** On donne deux triplets $(u, v, w)$ et $(u', v', w')$ de réels dont la somme n'est pas nulle. Caractériser les droites d'équation

$$(\lambda u + \lambda' u')a + (\lambda v + \lambda' v')b + (\lambda w + \lambda' w')c = 0,$$

lorsque $(\lambda, \lambda')$ parcourt $\mathbb{R}^2 \setminus X$, où $X$ est un "zone interdite" que l'on précisera.

## III Applications affines

### 1° Trois caractérisations (et demie)

**a)** Soit $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ une application. Montrer qu'il est équivalent de dire :
(i) $f$ conserve les barycentres de deux points ;
(i') $f$ conserve les barycentres d'un nombre fini de points ;
(ii) il existe une application linéaire $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ telle que

$$\forall M, N \in \mathcal{E}, \quad \overrightarrow{f(M)f(N)} = \varphi\left(\overrightarrow{MN}\right);$$

(ii') il existe une application linéaire $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ et un point $A \in \mathcal{E}$ fixé tels que

$$\forall N \in \mathcal{E}, \quad f(N) = f(A) + \varphi\left(\overrightarrow{AN}\right);$$

(iii) il existe un repère [1] $(O, e_1, \ldots, e_n)$, une matrice $(a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$ et un vecteur $(b_i)_{i=1,\ldots,n} \in \mathbb{K}^n$ tels que pour $M \in \mathcal{E}$ ayant coordonnées $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, son image $f(M)$ ait pour coordonnées

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n + b_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n + b_2 \\ \cdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n + b_n \end{pmatrix};$$

(iii') *idem* que (iii) en remplaçant "il existe" par "pour tout".
**b)** Généraliser aux applications affines entre espaces différents.

### 2° Un calcul concret

On se place dans un plan affine muni d'un repère.
**a)** Déterminer l'expression d'une application affine qui transforme le parallélogramme délimité par les droites $y = 2x + 1$, $y = 2x + 3$, $x = 3y$ et $x = 3y + 4$ en le "carré" [2] de sommets $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$ et $(1, 1)$.
**b)** Peut-on transformer n'importe quel quadrilatère en un "carré" par une application affine ?

### 3° Fabrication d'une application affine

Montrer que l'on caractérise une application affine et une seule par la donnée, au choix,
– de l'image d'un point $O$ et d'une application linéaire $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ ;
– de l'image d'un repère affine.

1. C'est-à-dire, $O$ est un point de $\mathcal{E}$ et $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de $E$.
2. Pourquoi les guillemets ?

**4°** **Deux applications affines dans $\mathbb{R}^2$**

Considérons les applications suivantes :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} -x-1 \\ -y-1 \end{pmatrix} \end{array}, \qquad g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x \\ 2x-y-1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

**a)** Quels sont les points fixes de $f$ ? de $g$ ? de $f$ et $g$ ?
**b)** Effectuer une translation de repère qui vous paraît appropriée compte-tenu de a).
**c)** Caractériser $f$ et $g$ : nature, éléments "caractéristiques",...
**d)** Que pensez-vous du groupe engendré par $f$ et $g$ (dans les bijections de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$) ?

**5°** **Dans le plan complexe**

On munit $\mathbb{C}$ de sa structure affine canonique sur $\mathbb{R}^2$. Quelle est l'expression d'une application affine $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ?

**6°** **Dévissage du groupe affine**

On note $\mathrm{Aff}(\mathcal{E})$ le groupe des bijections affines de $\mathcal{E}$ sur lui-même, $\mathrm{T}$ le groupe des translations (applications de la forme $\tau_u : M \mapsto M + u$ pour $u \in E$), $\mathrm{GL}(E)$ le groupe des automorphismes linéaires de $E$ (applications linéaires inversibles de $E$ sur $E$).
**a)** On fixe un point $O \in \mathcal{E}$ et on note

$$\mathrm{Aff}_O(\mathcal{E}) = \{f \in \mathrm{Aff}(\mathcal{E}),\ f(O) = O\}.$$

Vérifier que $\mathrm{Aff}_O(\mathcal{E})$ est un sous-groupe de $\mathrm{Aff}(\mathcal{E})$. Vérifier que pour $g \in \mathrm{Aff}(\mathcal{E})$, l'application [3] $f \mapsto gfg^{-1}$ définit un isomorphisme de $\mathrm{Aff}_O(\mathcal{E})$ sur $\mathrm{Aff}_{g(O)}(\mathcal{E})$. Montrer qu'on définit un isomorphisme de $\mathrm{Aff}_O(\mathcal{E})$ sur $\mathrm{GL}(E)$ en associant l'application linéaire sous-jacente à une application affine.
**b)** Montrer que pour $u \in E$, $f \in \mathrm{Aff}_O(\mathcal{E})$ et $\varphi$ l'application linéaire associée à $f$, on a [4] :

$$f \circ \tau_u \circ f^{-1} = \tau_{\varphi(u)}.$$

**c)** Montrer que tout élément de $\mathrm{Aff}(\mathcal{E})$ s'écrit de façon unique comme produit d'un élément de $\mathrm{T}$ et d'un élément de $\mathrm{Aff}_O(\mathcal{E})$ (dans l'ordre que l'on voudra).
On résume les propriétés ci-dessus par la notation : $\mathrm{Aff}(\mathcal{E}) \simeq \mathrm{T} \rtimes \mathrm{GL}(E)$.

## IV Convexité

Ici, le corps de base est le corps $\mathbb{R}$ des réels. On fixe un espace affine $\mathcal{E}$. Rappelons qu'une partie $\mathcal{C}$ de $\mathcal{E}$ est convexe si

$$\forall A, B \in \mathcal{C}, \quad [AB] \subset \mathcal{C},$$

où $[AB]$ est le segment d'extrêmités $A$ et $B$.

**1°** **Truismes**

Est-ce que l'ensemble vide est convexe ? Une boule pour n'importe quelle distance provenant d'une norme est convexe. Un sous-espace affine est convexe. Toute intersection de convexes est convexe.

**2°** **Enveloppe convexe**

Soit $X$ une partie de $\mathcal{E}$. On note $\mathrm{Conv}(X)$ l'intersection de toutes les parties convexes de $\mathcal{E}$ qui contiennent $X$.

3. "Principe de conjugaison..."
4. "Principe de conjugaison..."

**a)** Vérifier que $\mathrm{Conv}(X)$ n'est pas vide, est convexe, et c'est la plus petite partie convexe contenant $X$. On l'appelle enveloppe convexe de $X$.
**b)** Montrer que $\mathrm{Conv}(X)$ est l'ensemble des barycentres à coefficients positifs des points de $X$.
**c) Théorème de Carathéodory.** On note $d$ la dimension de $\mathcal{E}$ (supposée finie). Montrer que l'enveloppe convexe de $X$ est l'ensemble des barycentres à coefficients tous positifs de $d+1$ points de $X$.

**3°** Les zéros de la dérivée d'un polynôme complexe sont dans l'enveloppe convexe des zéros du polynôme. (Indication : décomposer $P'/P$ en éléments simples.)