**Préparation à l'agrégation interne de mathématiques - Année 2011**
**Correctif et remarques sur la séance du 14 septembre 2011**

Voici un rectificatif et un corrigé détaillé de l'exercice sur les projecteurs et les symétries (fiche du 13 juillet 2011).
Noter que la démonstration des équivalences est allongée par le niveau (élevé ici) de détail (implication et réciproque traitées séparément).

**Exercice 2.12.** ***Homothéties - Projecteurs - Symétries.***
*Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (sur un corps de caractéristique différente de 2).*

1. *Un endomorphisme $h$ de $E$ est appelé* homothétie *s'il existe un scalaire $\lambda$ tel que $h = \lambda id$ dans $\mathcal{L}(E)$.*
   *Montrer que $h$ est une homothétie si et seulement si, pour tout $v$ dans $E$, la famille $(v, h(v))$ est liée.*
2. *Un endomorphisme $p$ de $E$ est appelé* projecteur *s'il vérifie $p^2 (= p \circ p) = p$ dans $\mathcal{L}(E)$.*
   (a) *Donner un exemple de projecteur sur $\mathbb{R}^2$, sur $\mathbb{R}^3$.*
   (b) *Démontrer que $p$ est un projecteur si et seulement si $\cancel{E = \ker p \oplus \operatorname{im} p}$ $E = \ker p \oplus \ker(p - id)$.*
   $\boxed{(b')}$ *Montrer que $p$ est un projecteur si et seulement si $\operatorname{im} p = \ker(p - id)$.*

*MAIS b) et b') NE SIGNIFIENT PAS QUE «p est un projecteur si et seulement si $E = \ker p \oplus \operatorname{im} p$».*

   (c) *Vérifier que chacune des formules*

$$p(f)(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \qquad et \qquad q(f)(x) = f(0) + (f(1 - f(0))x$$

   *définissent des projecteurs $p$ et $q$ sur $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.*
3. *Un endomorphisme $s$ de $E$ est appellé* symétrie *s'il vérifie $s^2 (= s \circ s) = id$ dans $\mathcal{L}(E)$.*
   (a) *Démontrer que $s$ est une symétrie si et seulement si l'endomorphisme $p = \frac{1}{2}(s + id)$ est un projecteur.*
   (b) *Démontrer que $s$ est une symétrie si et seulement si $E = \ker(s + id) \oplus \ker(s - id)$.*

Correction.

1. – Si $h = \lambda id$, alors la famille $(v, h(v))$ est liée car $\lambda v - 1.h(v) = 0$.
   – Réciproquement supposons que toutes les familles $(v, h(v))$ sont liées. Si $v$ et $v'$ sont deux vecteurs, alors $h(v) = \lambda v$ et $h(v') = \lambda' v'$ avec $\lambda$ et $\lambda'$ deux scalaires (éventuellement nuls, dépendant à priori des vecteurs). On veut montrer que $\lambda = \lambda'$ ce qui est évident si $v$ et $v'$ sont colinéaires. Si la famille $(v, v')$ est libre, la relation $\lambda v + \lambda' v' = h(v + v') = \lambda''(v + v') = \lambda'' v + \lambda'' v'$ montre que $\lambda = \lambda'' = \lambda'$.
2. (a) Projections orthogonales ou non sur un plan, une droite.
   (b) – Si $E = \ker p \oplus \ker(p - id)$, la relation $p^2 = p$ se vérifie simplement : tout vecteur $v$ de $E$ se décompose (de manière unique) sous la forme $v = x + y$ avec $x \in \ker p$ et $y \in \ker(p - id)$ donc

$$p(v) = p(x + y) = p(x) + p(y) = 0 + y = y \quad \text{et} \quad p^2(v) = p(p(v)) = p(y) = y = p(v).$$

   – Réciproquement, si $p^2 = p$, la décomposition $v = \underbrace{(v - p(v))}_{x} + \underbrace{p(v)}_{y}$ vérifie alors

$$p(x) = p(v - p(v)) = p(v) - p^2(v) = 0 \quad \text{et} \quad p(y) = p(p(v)) = p(v) = y$$

   c'est-à-dire $x \in \ker p$ et $y \in \ker(p - id)$. Donc $E = \ker p \oplus \ker(p - id)$ (la somme est directe car $\ker p \cap \ker(p - id) = \{0\}$).

$\boxed{\text{(b')}}$ L'inclusion $\ker(p - id) \subseteq \operatorname{im} p$ est vérifiée pour tout endomorphisme.

- Si $p$ est un projecteur, l'inclusion contraire est vérifiée car tout élément $v = p(x)$ de $\operatorname{im} p$ vérifie alors $(p - id)(v) = p(v) - v = p^2(x) - p(x) = 0$.
- Réciproquement, si $\ker(p - id) = \operatorname{im} p$ alors, pour tout $v$ de $E$, on a $p(v) \in \operatorname{im} p = \ker(p - id)$ donc $(p - id)(p(v)) = 0$ c'est-à-dire $p^2(v) = p(v)$.

(c) Ces deux formules correspondent à des décompositions en somme directe de $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ étudiées précédemment :

- l'application définie par $p(f)(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}$ associe à une fonction $f$ sa «composante paire»
- la fonction $q(f)$ est l'unique fonction affine prenant les mêmes valeurs que $f$ en 0 et en 1.

3. (a) Puisque tout endomorphisme $s$ commute avec $id$, on a $(s + id)^2 = s^2 + 2s + id$.
   - Si $s^2 = id$, alors $p = \frac{1}{2}(s + id)$ vérifie

$$p^2 = \left(\frac{1}{2}(s + id)\right)^2 = \frac{1}{4}(s^2 + 2s + id) = \frac{1}{4}(id + 2s + id) = \frac{1}{2}(s + id) = p.$$

   - Si $p = \frac{1}{2}(s + id)$ est un projecteur, alors $p^2 = p$ donc $\frac{1}{4}(s^2 + 2s + id) = \frac{1}{2}(s + id)$ d'où $s^2 + 2s + id = 2(s + id)$ qui se simplifie en $s^2 = id$.

   (b) La relation $p = \frac{1}{2}(s+id)$ implique (quels que soient les endomorphismes $s$ et $p$) les égalités $\ker p = \ker(s + id)$ et $\ker(p - id) = \ker(s - id)$.
   - Si $s$ est une symétrie, alors $p = \frac{1}{2}(s+id)$ est un projecteur donc $E = \ker p \oplus \ker(p-id) = \ker(s + id) \oplus \ker(s - id)$.
   - Réciproquement, si $E = \ker(s + id) \oplus \ker(s - id)$, alors $E = \ker p \oplus \ker(p - id)$ donc $p$ est un projecteur.

# 1 Commutativité d'endomorphismes en dimension finie

**Exercice 1.1.** *1. – Une homothétie commute avec tout endomorphisme : $f(\lambda x) = \lambda f(x)$.*

*– Réciproquement, si $A = (a_{ij})_{ij}$ est la matrice d'un endomorphisme $f$ de $E$ dans une base quelconque, on a, pour tous $i \neq j$*

$$A\delta_{ij} = \delta_{ij}A \Longleftrightarrow \begin{cases} a_{ii} = a_{jj} \\ a_{ki} = 0 \quad si \quad k \neq i \\ a_{jk} = 0 \quad si \quad k \neq j \end{cases}$$

*Donc, la commutativité avec toutes les matrices $\delta_{ij}$ implique que $A$ est une matrice scalaire.*

*2. – La condition est toujours suffisante.*

*– Les matrices $Id + \delta_{ij}$ sont toutes inversibles et (avec $i \neq j$ et les mêmes notations)*

$$A\,(Id + \delta_{ij}) = (Id + \delta_{ij})\,A \Longleftrightarrow A\delta_{ij} = \delta_{ij}A \Longleftrightarrow \begin{cases} a_{ii} = a_{jj} \\ a_{ki} = 0 \quad si \quad k \neq i \\ a_{jk} = 0 \quad si \quad k \neq j \end{cases}$$

**Exercice 1.2 (commutativité avec un endomorphisme diagonalisable).**
*Soit $f$ un endomorphisme diagonalisable de valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ deux à deux distinctes.*

*1. – Si $f \circ g = g \circ f$ et $v_i \in E_{\lambda_i} = \ker(f - \lambda_i Id)$, alors $f\,(g(v_i)) = g\,(f(v_i)) = g\,(\lambda_i v_i) = \lambda_i g(v_i)$ donc $g(v_i) \in E_{\lambda_i}$.*

*– L'endomorphisme $f$ étant supposé diagonalisable, on a $E = E_1 \oplus \ldots \oplus E_r$. La décomposition $v = v_1 + \ldots + v_r$ de tout vecteur qui en découle permet d'écrire*

$$\begin{aligned} & g \circ f(v) = g\,(f(v_1) + \ldots + f(v_r)) = g\,(\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_r v_r) = \lambda_1 g(v_1) + \ldots + \lambda_r g(v_r) \\ et \quad & f \circ g(v) = f \circ g(v_1 + \ldots + v_r) = f\,(g(v_1)) + \ldots + f\,(g(v_r)) \end{aligned}$$

*Si $E_{\lambda_i} = \ker(f - \lambda_i Id)$ est invariant par $g$, alors $f\,(g(v_i)) = \lambda_i g(v_i)$ d'où l'égalité des deux termes.*

*2. Conservons la notation $E = E_1 \oplus \ldots \oplus E_r$ avec $f$ diagonalisable et $f \circ g = g \circ f$. D'après ce qui précède, les restrictions $g|_{E_i}$ sont des endomorphismes. Et chacun de ces endomorphismes est diagonalisable si $g$ l'est. Argument :*

*$\boxed{\text{g est diagonalisable}} \Leftrightarrow \boxed{\text{un polynôme scindé à racines simples annule } g} \Rightarrow \boxed{\text{un polynôme scindé à racines simples annule } g|_{E_i}} \Leftrightarrow \boxed{g|_{E_i} \text{ est diagonalisable}}$*

*Donc il existe une base de vecteurs propres pour $g$.*

*3. Contre-exemple : considérer $f = Id_E$ et $g$ n'importe quel endomorphisme* ***non-diagonalisable*** *(il en existe dès que $n \geqslant 2$).*

**Exercice 1.3 (commutant d'un endomorphisme).**
*Soient $f$ un endomorphisme et $\mathcal{C}(f) = \{g : g \in \mathcal{L}(E), f \circ g = g \circ f\}$ son commutant.*

*1. L'endomorphisme $f$ commute avec lui-même, avec ses itérés ($f^2 = f \circ f$) et avec les combinaisons linéaires de ceux-ci donc avec tout élément de $\mathbb{K}[f]$. D'où l'inclusion $\mathbb{K}[f] \subseteq \mathcal{C}(f)$.*

*2. Lorsque $f = Id_E$, $\mathcal{C}(f) = \mathcal{L}(E)$ et $\mathbb{K}[f] = \mathbb{K}[Id] = \mathbb{R}.Id$ est réduit aux homothéties.*
*Lorsque $f = 0$, $\mathcal{C}(f) = \mathcal{L}(E)$ et $\mathbb{K}[f] = \mathbb{K}[0] = \mathbb{R}.Id$.*

*3. Puisque $(f - Id)^2 = 0$ (polynôme caractéristique/minimal), on a $f^2 = 2f - Id$ donc les éléments de $\mathbb{K}[f]$ sont les matrices de la forme (polynôme de degré 1) $a_1 f + a_0 Id = \begin{pmatrix} a_1 + a_0 & a_1 \\ 0 & a_1 + a_0 \end{pmatrix}$ c'est-à-dire $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$.*

*Sur la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, la condition de commutativité avec $f$ s'écrit $a = d$ et $c = 0$.*

*Donc $\mathbb{K}[f] = \mathcal{C}(f)$ est l'ensemble des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$.*

4. *Si $f$ possède $n = \dim E$ valeurs propres distinctes $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, alors $f$ est diagonalisable. D'après l'exercice précédent, si $g$ appartient à $\mathcal{C}(f)$, alors les $n$ espaces propres (de dimension 1) $E_i = \ker(f - \lambda_i Id)$ sont invariants par $g$. Donc $g$ est* ***diagonalisable dans la même base que*** *$f$ : il existe une base $\mathcal{B}$ de $E$ dans laquelle les matrices de $f$ et $g$ sont respectivement*

$$F = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \qquad et \qquad G = \begin{pmatrix} \mu_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_n \end{pmatrix}$$

*La réciproque est vraie car les deux matrices commutent.*
*Donc $\mathcal{C}(f)$ est constitué de tous les endomorphismes diagonalisables dans une même base que $f$.*
*Cette caractérisation peut être retrouvée par du calcul matriciel : dans une base adéquate, $f$ admet $F$ (ci-dessus) pour matrice et la condition $FG = GF$ se traduit (on obtient $\lambda_i g_{ji} = g_{ij}\lambda_j$ avec $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ deux à deux distincts) par le fait que $G$ est diagonale.*

*Soit $g$ appartenant à $\mathcal{C}(f)$. Puisque les $n$ valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont distinctes, il existe un polynôme $P$ (de degré au plus $n-1$) tel que $P(\lambda_i) = \mu_i$ pour tout $i = 1, \ldots, n$. On en déduit alors (avec les notations précédentes) les égalités $P(F) = G$ et $P(f) = g$ qui justifient l'inclusion $\mathcal{C}(f) \subseteq \mathbb{K}[f]$ donc l'égalité $\mathbb{K}[f] = \mathcal{C}(f)$.*