Agreg blanche du 24 septembre 2011.

Partie I.

1/ Rappelons que $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
et $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$.

D'où $\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2\cos a \cos b.$ (1)

Or $T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = \cos(n \arccos x + \arccos x) + \cos(n \arccos x - \arccos x)$.

En utilisant (1), on obtient $T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = 2\cos(n\arccos x)\cos(\arccos x)$.

Comme pour tout $x \in [-1,1]$, on a $\cos(\arccos x) = x$, on en déduit que :

$$T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = 2x\cos(n\arccos x) = 2x\,T_n(x).$$

On a $T_0(x) = 1$ et $T_1(x) = \cos(\arccos x) = x$.

Supposons que T_{n-1} (respectivement T_n) est un polynôme de degré $n-1$ (resp. n)

Comme $T_{n+1}(x) = 2x\,T_n(x) - T_{n-1}(x)$, on en déduit que T_{n+1} est un polynôme de degré $(n+1)$. Ainsi par récurrence, T_n est un polynôme de degré n.

2/ Notons a_n le coefficient de plus haut degré de T_n. En utilisant la relation $T_{n+1}(x) = 2x\,T_n(x) - T_{n-1}(x)$, on obtient que

$$a_{n+1} = 2a_n, \quad n \geq 1.$$

D'où $a_n = 2^{n-1}a_1$ et comme $T_1(x) = x$, on en déduit que

$$\boxed{a_n = 2^{n-1}, \quad n \geq 1}$$

On a $T_0(1) = T_1(1) = 1$. Supposons que $T_{n-1}(1) = T_n(1) = 1$.

Alors $T_{n+1}(1) = 2\,T_n(1) - T_{n-1}(1) = 1$.

Donc par récurrence, on en déduit que $\boxed{\text{pour tout } n \geq 0,\ T_n(1) = 1.}$

On $T_0(-1) = 1$ et $T_1(-1) = -1$.

Supposons que $T_{n-1}(-1) = (-1)^{n-1}$ et $T_n(-1) = (-1)^n$.

Alors $T_{n+1}(-1) = -2\,T_n(-1) - T_{n-1}(-1) = -2(-1)^n - (-1)^{n-1}$

i.e $T_{n+1}(-1) = (-1)^{n-1}(2-1) = (-1)^{n-1} = (-1)^{n+1}$.

Donc par récurrence, on en déduit que :

$$\boxed{T_n(-1) = (-1)^n \ , \ \forall n \geq 0}$$

3) Rappelons que la base canonique de $\mathbb{P}_n$ - l'espace vectoriel des polynôme de degré inférieur ou égal à n à coefficients réels, est $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$.
Notons φ l'endomorphisme de $\mathbb{P}_n$ défini sur la base canonique par

$$\varphi(x^k) = T_k \ , \quad k \geq 0.$$

La matrice de φ dans la base canonique est

$$M_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & * & & * \\ 0 & 1 & * & & * \\ \vdots & 0 & 2 & & * \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix}$$

La matrice de M_φ est triangulaire et $\det M_\varphi = \prod_{k=1}^{n} 2^k \neq 0$.

Ainsi φ est un isomorphisme et $\{T_0, T_1, \dots, T_n\}$ est une base de $\mathbb{P}_n$.

4) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$T_n(x) = 0 \iff \left(n \arccos x = \frac{\pi}{2} + k\pi \ , \text{ où } k \in \mathbb{Z} \ \underline{\text{et}} \ \arccos x \in [0, \pi]\right)$$

Donc $\arccos x = \frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}$ et $\arccos x \in [0, \pi]$.

Or $\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n} \in [0, \pi] \iff -\frac{1}{2} \leq k \leq n - 1/2$

Comme $k \in \mathbb{Z}$, cela équivaut à $0 \leq k \leq n-1$.

Par conséquent, $T_n(x) = 0 \iff x = \cos\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right)$, $0 \leq k \leq n-1$.

Les n racines de T_n sont donc

$$\boxed{x_k = \cos\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right) , \ 0 \leq k \leq n-1}$$

Remarquons qu'elles sont toutes réelles et appartiennent à $[-1, 1]$.

57 Remarquons tout d'abord que

$$-1 \leq T_n(x) \leq 1 \;, \quad \text{pour tout } x \in I = [-1,1].$$

De +, d'après la question I.27, on a $T_n(1) = 1$ et $T_n(-1) = (-1)^n$.

Donc $\underline{1 \text{ et } -1 \text{ sont deux extremums de } T_n.}$

D'autre part, si T_n admet en un point $y \in]-1,1[$ un extremum alors $T_n'(y) = 0$.

On $T_n'(x) = \dfrac{n}{\sqrt{1-x^2}} \sin(n \arccos x)$, $-1 < x < 1$

D'où
$$T_n'(y) = 0 \iff \sin(n \arccos y) = 0$$
$$\iff n \arccos y = k\pi \;, \; k \in \mathbb{Z}$$
$$\iff \arccos y = \frac{k\pi}{n} \;, \; k \in \mathbb{Z}$$

Or $\arccos y \in]0,\pi[$ pour $y \in]-1,1[$. et

$$\frac{k\pi}{n} \in]0,\pi[\iff k \in]0,n[.$$

Donc $T_n'(y) = 0 \iff y \in \left\{ \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) : 1 \leq k \leq n-1 \right\}$

On vérifie alors que
$$T_n\left(\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right) = \cos\left(n \arccos\left(\cos \frac{k\pi}{n}\right)\right)$$
$$= \cos\left(n \times \frac{k\pi}{n}\right) = \cos(k\pi) = (-1)^k.$$

Donc les points $y_k = \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)$, $1 \leq k \leq n-1$, sont bien des extremums pour T_n.

Finalement, T_n atteint sur I ses extremums en $(n+1)$ points:

$$\boxed{y_k = \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) \;, \quad 0 \leq k \leq n.}$$

$\boxed{7/}$ On a : $T_n(x) = \cos(n \arccos x) = \mathrm{Re}\left(e^{in\arccos x}\right)$

$$= \mathrm{Re}\left[\left(\cos(\arccos x) + i\sin(\arccos x)\right)\right]^n$$

Or $\cos(\arccos x) = x$ et $\sin \arccos x = (1-x^2)^{1/2}$, pour tout $x \in I$.

D'où $\quad T_n(x) = \mathrm{Re}\left[x + i(1-x^2)^{1/2}\right]^n.$

En utilisant la formule du binôme de Newton on obtient que

$$T_n(x) = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} i^k (1-x^2)^{\frac{k}{2}} x^{n-k}\right)$$

Or i^k est réel ssi k est pair. D'où en notant $q = \left[\frac{n}{2}\right]$,

on obtient, $\boxed{T_n(x) = \sum_{p=0}^{q} \binom{n}{2p} (-1)^p (1-x^2)^p x^{n-2p}.}$

$\boxed{\text{A.}}$

$\boxed{\text{Partie II.}}$ $\boxed{1/}$ La fonction $x \longmapsto \dfrac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}$ est continue sur $]-1,1[$. Donc le seul problème est en -1 et 1.

Au voisinage de 1, il existe une constante $M > 0$ tq

$$\left|\frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}\right| \leq \frac{M}{\sqrt{1-x}} = \frac{M}{(1-x)^{1/2}}.$$

De plus, comme $1/2 < 1$, la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{(1-x)^{1/2}}$ est intégrable au voisinage de 1. Ainsi $x \longmapsto \dfrac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}$ est intégrable au voisinage de 1. De m̂, on montre que cette fonction est intégrable au voisinage de -1, ce qui implique que l'intégrale

$\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ a un sens.

$\boxed{2}$ Il est évident que $(f,g) \longmapsto \langle f, g\rangle_2$ est une forme bilinéaire, symétrique. De plus,

(i) $\langle f, f\rangle_2 = \displaystyle\int_{-1}^{1} |f(x)|^2 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \geq 0.$

et

(ii) $\langle f, f\rangle_2 = 0 \iff \displaystyle\int_{-1}^{1} |f(x)|^2 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 0 \quad (*)$

Comme la fonction $x \longmapsto \dfrac{|f(x)|^2}{\sqrt{1-x^2}}$ est continue et positive sur $]-1,1[$ un résultat classique d'intégration implique que nécessairement,

$\dfrac{|f(x)|^2}{\sqrt{1-x^2}} = 0, \ \forall x \in]-1,1[$. D'où $f(x) = 0, \forall x \in]-1,1[$.

Par continuité, on obtient finalement que $f \equiv 0$ sur I.

$\boxed{3}$ On a

$$\langle T_n, T_m\rangle_2 = \int_{-1}^{1} \cos(n \arccos x)\cos(m \arccos x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

Posons $u = \arccos x$, alors $du = \dfrac{-dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

D'où
$$\langle T_n, T_m\rangle_2 = \int_0^{\pi} \cos(nu)\cos(mu)\, du$$

Or $\cos(nu)\cos(mu) = \dfrac{1}{2}\left[\cos((n+m)u) + \cos((n-m)u)\right]$.

Donc
$$\langle T_n, T_m\rangle_2 = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \Big(\cos((n+m)u) + \cos((n-m)u)\Big) du$$

Si $\underline{n \neq m}$ alors $n+m \neq 0$ et $n-m \neq 0$.

D'où
$$\langle T_n, T_m\rangle_2 = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{n+m}\sin((n+m)u) + \frac{1}{n-m}\sin((n-m)u)\right]_0^{\pi}$$

Comme $\sin(p\pi) = 0$, $\forall p \in \mathbb{Z}$, on en déduit que $\langle T_n, T_m \rangle_2 = 0$.

<u>Si $n = m$</u>

si $n = m = 0$ alors $\langle T_0 , T_0 \rangle_2 = \frac{1}{2} \times 2\pi = \pi$

si $n = m \neq 0$ alors $\langle T_n , T_n \rangle_2 = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (\cos(2nu) + 1)\, du = \frac{\pi}{2}$

En résumé, on obtient :

$$\boxed{\langle T_n , T_m \rangle_2 = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ \pi & \text{si } n = m = 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } n = m \neq 0. \end{cases}}$$

Posons $\boxed{t_n = \dfrac{T_n}{\|T_n\|_2} = \begin{cases} \dfrac{T_n}{\sqrt{\pi}} & , n = 0 \\ \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\, T_n & , n \neq 0 \end{cases}}$

Alors d'après ce qui précède, $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un système orthonormal.

B.

17 Il est évident de vérifier que ϕ est linéaire.

Soit (E) l'équation différentielle sur $]-1, 1[$ définie par :

$$(1 - x^2) y'' - x y' = 0. \qquad (E)$$

Soit y de classe C^2 sur $]-1, 1[$ et posons $z = y'$.

Alors y est solution de (E) ssi z est solution de

$$(1 - x^2) z' - x z = 0 . \qquad (E_1).$$

Rappelons que si $a, b : I \longrightarrow \mathbb{R}$ sont deux fonctions continues sur I et $a(x) \neq 0$, $\forall x \in I$, alors les solutions de l'éq. diff.

$$a(x) z' + b(x) z = 0$$

sont donnés par $z(x) = \lambda e^{-\int \frac{b(x)}{a(x)} dx}$, où $\lambda \in \mathbb{R}$.

Ainsi les solutions de (E_1) sont de la forme

$$z(x) = \lambda\, e^{+\int \frac{x}{1-x^2}dx}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Or

$$\int \frac{x}{1-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\ln(1-x^2) + C = \ln\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + C$$

En choisissant la constante $C = 0$, on obtient que les solutions de (E_1) sont de la forme $z(x) = \dfrac{\lambda}{\sqrt{1-x^2}}$, où $\lambda \in \mathbb{R}$.

En intégrant une nouvelle fois, on obtient :

$$y(x) = \lambda \arccos x + \mu, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Ainsi, si y est solution de (E_1) alors il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $y(x) = \lambda \arccos x + \mu$. La réciproque est immédiate. En conséquence, l'ensemble des solutions de (E_1) est donné par

$$\boxed{\left\{ y(x) = \lambda \arccos x + \mu \ : \ \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}}$$

Par définition, on a :

$$\ker \Phi = \left\{ f : \mathring{I} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ 2 fois dérivables} : (1-x^2)\, f''(x) - x f'(x) = 0,\ x \in \mathring{I} \right\}$$

D'après ce qui précède, on en déduit donc que :

$$\ker \Phi = \left\{ \lambda \arccos x + \mu \ : \ \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$

$\boxed{27}$ On a $\displaystyle \langle \Phi(f), g \rangle_2 = \int_{-1}^{1} \Big((1-x^2) f''(x) - x f'(x) \Big) g(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

$$= \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\, f''(x) g(x)\, dx - \int_{-1}^{1} x\, f'(x) g(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

G en utilisant la formule d'intégration par partie, on obtient

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\, f''(x)g(x)\,dx = \Big[\sqrt{1-x^2}\; g(x)f'(x)\Big]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} f'(x)\left(\frac{-xg(x)}{\sqrt{1-x^2}} + \sqrt{1-x^2}\,g'(x)\right)dx$$

$$= \int_{-1}^{1} x\, f'(x)\,g(x)\,\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} - \int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\, f'(x)g'(x)\,dx.$$

D'où

$$<\phi(f), g>_2 = -\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\; f'(x)g'(x)\,dx.$$

Comme cette dernière expression est symétrique en f et g, on en déduit que

$$<\phi(f), g>_2 = <\phi(g), f>_2 = <f, \phi(g)>_2$$

$\boxed{37}$ Soit $P \in \mathbb{P}_n$. Alors P s'écrit sous la forme $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$.
D'où $P'(x) = \sum_{k=0}^{n} k a_k x^{k-1}$ et $P''(x) = \sum_{k=0}^{n} k(k-1)a_k x^{k-2}$.

D'où $\Phi(P) = (1-x^2)P''(x) - x\,P'(x)$

$$= \sum_{k=0}^{n} k(k-1)a_k x^{k-2} - \sum_{k=0}^{n} k(k-1)a_k x^k - \sum_{k=0}^{n} k a_k x^k.$$

Il est clair que $\Phi(P) \in \mathbb{P}_n$ et son terme de plus haut degré est :

$$-(n(n-1)a_n - n a_n)x^n = \underline{-n^2 a_n x^n}.$$

Ainsi $\boxed{\phi(\mathbb{P}_n) \subset \mathbb{P}_n}$

De +, si $n \geq 1$ et si $d°P = n$ alors $a_n \neq 0$ et le calcul précédent montre que $d°\,\Phi(P) = n$.

Ainsi, si $n \geq 1$, alors l'image d'un polynôme de degré n par Φ est un polynôme de degré n. Si P est un polynôme constant, alors $\Phi(P) = 0$.

47 Soit $P \in \mathbb{P}_n$.

Si $d° P < n$ alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\phi(P) + \lambda P \in \mathbb{P}_{n-1}$.

Si $d° P = n$ alors on a vu que le terme de + haut degré de $\phi(P)$ est $-n^2 a_n x^n$, où $a_n x^n$ est le terme de + haut degré de P.

Ainsi, on a : $\boxed{\phi(P) + n^2 P \in \mathbb{P}_{n-1}}$

Soit $P \in \mathbb{P}_n$ tel que $\int_{-1}^{1} P(x) x^s \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 0$, $s \in \{0, 1, \dots, n-1\}$.

Ceci signifie que $< P, x^S >_2 = 0$, $\forall S \in \{0, 1, \dots, n-1\}$.

Par linéarité, on en déduit que $< P, Q >_2 = 0$, pour tout polynôme $Q \in \mathbb{P}_{n-1}$.

Donc $< \Phi(P) + \lambda P, x^s >_2 = < \Phi(P), x^s >_2 + \lambda < P, x^s >_2$

$= < \Phi(P), x^s >_2$.

D'après la question II.B.27, on a : $< \Phi(P), x^s >_2 = < P, \Phi(x^s) >_2$

$= 0$,

car $\phi(x^s) \in \mathbb{P}_{n-1}$, pour tout $s \in \{0, 1, \dots, n-1\}$.

On a donc :

$\| \phi(P) + n^2 P \|_2^2 = < \phi(P) + n^2 P, \Phi(P) + n^2 P >_2$

$= < \phi(P) + n^2 P, Q >_2$

et d'après la question II.B.4, $Q = \phi(P) + n^2 P \in \mathbb{P}_{n-1}$.

Ainsi il existe $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{R}$ tels que

$Q = \phi(P) + n^2 P = \sum_{s=0}^{n-1} a_s x^s$.

D'où $\| \phi(P) + n^2 P \|_2^2 = < \phi(P) + n^2 P, \sum_{s=0}^{n-1} a_s x^s >_2$

et $\|\phi(P)+n^2P\|_2^2 = \sum_{s=0}^{n-1} a_s \langle \phi(P)+n^2P, x^s\rangle_2 = 0$.

Ainsi $\boxed{\phi(P)+n^2P=0}$

$\boxed{5/}$ On a vu à la question I.1. que $T_n \in \mathbb{P}_n$. De plus, pour tout $s\in\{0,1,\dots,n-1\}$, $x^s\in\mathbb{P}_{n-1}$ et d'après la question I.3, il existe $\lambda_{0,s},\lambda_{1,s},\dots,\lambda_{n-1,s}\in\mathbb{R}$ tels que

$$x^s = \sum_{i=0}^{n-1}\lambda_{i,s}T_i.$$

D'où
$$\int_{-1}^{1} T_n(x)\frac{x^s}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \sum_{i=0}^{n-1}\lambda_{i,s}\int_{-1}^{1}\frac{T_n(x)T_i(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

$= 0$ d'après la question II.A.3.

Le polynôme T_n vérifie donc les hypothèses de la question II.B.4 et on en déduit que $\boxed{\phi(T_n)+n^2T_n=0 \quad, n\geq 1.}$

Pour $n=0$, la propriété est évidente.

Soit $\Phi_n := \Phi_{|\mathbb{P}_n} : \mathbb{P}_n \longrightarrow \mathbb{P}_n$, $n\geq 0$.

Pour tout $0\leq k\leq n$, on a :

$$\Phi_n(T_k)+k^2T_k = \phi(T_k)+k^2T_k=0$$

D'où $\phi(T_k) = -k^2T_k$.

Ainsi $\{-k^2 : 0\leq k\leq n\}$ sont des valeurs propres de Φ_n.

Comme $\#\{-k^2 : 0\leq k\leq n\} = n+1 = \dim\mathbb{P}_n$, on en déduit que Φ_n est diagonalisable. De +, ses valeurs propres sont

$-k^2$, $0 \leq k \leq n$ et

$$\boxed{\ker\left(\phi_n + k^2 I\right) = \mathbb{R}\, T_k}$$

$\boxed{6/}$ Soit $\omega \in \mathbb{N}^*$. Alors $f : \mathring{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ de C^2 est solution de (1)

ssi $\phi(f) + \omega^2 f = 0$

D'après la question II.B.5, $\phi(T_\omega) + \omega^2 T_\omega = 0$.

Donc $\boxed{T_\omega \text{ est une solution particulière de (1).}}$

Soit $g_\omega(x) = \sin(\omega \arccos x)$. La fonction g_ω est de C^2 sur $]-1, 1[$

et on a $g'_\omega(x) = -\dfrac{\omega}{\sqrt{1-x^2}} \cos(\omega \arccos x)$ et

$$g''_\omega(x) = -\frac{\omega x}{\sqrt{1-x^2}} \cos(\omega \arccos x) - \frac{\omega^2}{1-x^2} \sin(\omega \arccos x)$$

D'où

$$(1-x^2)\, g''_\omega(x) - x\, g'_\omega(x) + \omega^2 g_\omega(x) = 0$$

Ainsi, g_ω est aussi solution de (1) sur $]-1, 1[$.

L'équation différentielle (1) est une équation différentielle d'ordre 2.

Le Wronskien W_{T_ω, g_ω} associé aux deux solutions T_ω et g_ω est

donné par

$$W_{T_\omega, g_\omega}(x) = \begin{vmatrix} T_\omega & g_\omega \\ T'_\omega & g'_\omega \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos(\omega \arccos x) & \sin(\omega \arccos x) \\ \dfrac{\omega}{\sqrt{1-x^2}} \sin(\omega \arccos x) & -\dfrac{\omega}{\sqrt{1-x^2}} \cos(\omega \arccos x) \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{\omega}{\sqrt{1-x^2}} \neq 0, \quad \forall x \in]-1, 1[.$$

Ainsi (T_ω, g_ω) engendre l'espace vectoriel des solutions de (1).

Autrement dit, l'ensemble des solutions de (1) est donné par

$$\boxed{\left\{ \lambda \cos(\omega \arccos x) + \mu \sin(\omega \arccos x) : \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}}.$$

Partie III.

A **1** On a $|\tilde{T}_n(x)| = \frac{1}{2^{n-1}} |\cos(n \arccos x)| \leq \frac{1}{2^{n-1}}$.

De plus, d'après la question I. 2, $T_n(1) = 1$ et donc $|\tilde{T}_n(1)| = \frac{1}{2^{n-1}}$.

Ainsi $\boxed{\|\tilde{T}_n\|_\infty = \frac{1}{2^{n-1}}}$

2 D'après I. 2, le coefficient de plus haut degré de T_n est $a_n = 2^{n-1}$.
Donc $\tilde{T}_n$ est un polynôme unitaire de degré n. Autrement dit, $\tilde{T}_n \in \tilde{\mathbb{P}}_n$.
Or la différence de deux polynômes de $\tilde{\mathbb{P}}_n$ est un polynôme de degré $\leq n-1$.
D'où si $Q \in \tilde{\mathbb{P}}_n$, on a

$$\tilde{T}_n - Q \in \mathbb{P}_{n-1}.$$

D'après I. 5., le polynôme $\tilde{T}_n$ possède $(n+1)$ extremums $(y_k)_{0 \leq k \leq n}$ dans I, les valeurs de $\tilde{T}_n$ en ces points étant

$$\tilde{T}_n(y_k) = \frac{(-1)^k}{2^{n-1}}.$$

Supposons que $Q \in \tilde{\mathbb{P}}_n$ et $|Q(x)| < \frac{1}{2^{n-1}}$, $\forall x \in I$.

Alors $\quad -\frac{1}{2^{n-1}} - Q(x) < 0 < \frac{1}{2^{n-1}} - Q(x)$, $\forall x \in I$. $\quad (*)$

On a pour tout $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$:

$$\tilde{T}_n(y_k) - Q(y_k) = \frac{(-1)^k}{2^{n-1}} - Q(y_k) \quad \text{et} \quad \tilde{T}_n(y_{k+1}) - Q(y_{k+1}) = \frac{(-1)^{k+1}}{2^{n-1}} - Q(y_{k+1})$$

si k est pair alors d'après $(*)$, on a

$$\tilde{T}_n(y_k) - Q(y_k) > 0 \quad \text{et} \quad \tilde{T}(y_{k+1}) - Q(y_{k+1}) < 0$$

Par le théorème des valeurs intermédiaires, le polynôme $\tilde{T}_n - Q$ admet une racine dans l'intervalle $]y_k, y_{k+1}[$.

De même, si k est impair, on a :

$$\tilde{T}_n(y_k) - Q(y_k) < 0 \quad \text{et} \quad \tilde{T}_n(y_{k+1}) - Q(y_{k+1}) > 0,$$

et donc $\tilde{T}_n - Q$ admet aussi une racine dans l'intervalle $]y_k, y_{k+1}[$.

Ainsi, pour tout $k \in \{0, 1, .., n-1\}$, le polynôme $\tilde{T}_n - Q$ admet au moins une racine dans chaque intervalle $]y_k, y_{k+1}[$. Cela implique que $\tilde{T}_n - Q$ a au moins n racines distinctes mais comme c'est un polynôme de degré au plus $n-1$, c'est impossible.

Donc il existe $x \in I$ tel que $|Q(x)| \geq \frac{1}{2^{n-1}}$.

$\boxed{37}$ D'après 27, si $Q \in \tilde{\mathbb{P}}_n$, on a $\|Q\|_\infty \geq \frac{1}{2^{n-1}}$.

D'où $\inf\limits_{Q \in \tilde{\mathbb{P}}_n} \|Q\|_\infty \geq \frac{1}{2^{n-1}}$

Comme $\tilde{T}_n \in \tilde{\mathbb{P}}_n$ et $\|\tilde{T}_n\|_\infty = \frac{1}{2^{n-1}}$, on en déduit que

$$\boxed{\inf_{Q \in \tilde{\mathbb{P}}_n} \|Q\|_\infty = \frac{1}{2^{n-1}}}$$

et l'infimum est <u>atteint pour le polynôme $\tilde{T}_n$</u>.

$\boxed{B}$

$\boxed{17}$ Soient $x_0, x_1, \dots, x_n \in I$, $x_k \neq x_p$, $k \neq p$ et $f \in C(I)$. On veut montrer qu'il existe un unique polynôme $P_n \in \mathbb{P}_n$ tel que $P_n(x_k) = f(x_k)$, $k \in \{0, 1, \dots, n\}$

Cela équivaut à montrer qu'il existe un unique vecteur $(a_0, a_1, .., a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que

$$\sum_{s=0}^{n} a_s x_k^s = f(x_k), \quad 0 \leq k \leq n \qquad (*)$$

Notons
$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & & & & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{pmatrix}$$

Le système $(*)$ est équivalent à $A \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{pmatrix}$

Remarquons alors que le déterminant de A est un déterminant de Van der Mond et donc on a : $\det A = \prod_{i>j} (x_i - x_j) \neq 0$

D'où A est inversible et il existe un unique vecteur $(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ solution de $(*)$.

$\boxed{27}$ Soit $f \in C^{n+1}(I)$ et $P_n \in \mathbb{P}_n$ tel que $P_n(x_k) = f(x_k)$, $0 \leq k \leq n$.

ⓐ $x \notin \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ et $\psi(t) := f(t) - P_n(t) - A(t-x_0)\cdots(t-x_n)$

où $t \in I$ et $A \in \mathbb{R}$ choisit tel que $\psi(x) = 0$.

Remarquons que $\psi(x_k) = f(t_k) - P_n(x_k) - A \prod_{s=0}^{n} (x_k - x_s)$

$= 0$ pour tout $0 \leq k \leq n$.

Donc ψ a $(n+2)$-zéros distincts $x, x_0, x_1, \ldots, x_n$.

Quitte à réordonner les zéros, on peut supposer que $x < x_0 < x_1 < \cdots < x_n$.

En appliquant le théorème de Rolle sur chaque intervalle $[x, x_0]$ puis $[x_k, x_{k+1}]$, $k \in \{0, \ldots, n-1\}$, on obtient que ψ' admet $(n+1)$-zéros distincts. On applique n fois le théorème de Rolle et on en déduit que $\psi^{(n+1)}$ possède au moins un zéro dans $]-1, 1[$.

Donc il existe $\xi \in]-1, 1[$ tel que $\psi^{(n+1)}(\xi) = 0$.

(b) Remarquons que la propriété est triviale si $x \in \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ (tout élément $\xi \in]-1,1[$ convient).

On peut donc supposer maintenant que $x \in I \setminus \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$.

On a alors $\psi^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) - P_n^{(n+1)}(t) - A\,\pi^{(n+1)}(t)$

Comme $d^\circ P_n = n$, on a $P_n^{(n+1)} \equiv 0$ et $\pi^{(n+1)}(t) = (n+1)!$

(car π est un polynôme unitaire de degré $(n+1)$).

D'où $\psi^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) - A\,(n+1)!$

D'après III.B.2.(a), il existe $\xi \in]-1,1[$ tel que $\psi^{(n+1)}(\xi) = 0$

soit $f^{(n+1)}(\xi) = A\,(n+1)!$ D'où $A = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$ et comme

$\psi(x) = 0$, on obtient

$$\boxed{f(x) - P_n(x) = \pi(x)\,\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}}$$

(c) On en déduit que pour tout $x \in I$, on a

$$|f(x) - P_n(x)| \leq \frac{1}{(n+1)!} \sup_{t\in I} |\pi(t)| \sup_{t \in I} |f^{(n+1)}(t)|$$

D'où

$$\boxed{\|f - P_n\|_\infty \leq \frac{1}{(n+1)!} \|\pi\|_\infty \|f^{(n+1)}\|_\infty}$$

$\boxed{3°}$ Soit $f \in C^\infty([-1,1])$. Considérons le polynôme T_{n+1}.

D'après I.4., ses $(n+1)$ racines sont distinctes et dans I.

On choisit alors pour $(x_k)_{0 \leq k \leq n}$ ces racines et on considère $\pi(x) = \prod_{k=0}^{n} (x - x_k)$.

Remarquons que $\Pi = \tilde{T}_{n+1}$.

En effet, Π et $\tilde{T}_{n+1}$ sont deux polynômes unitaires de degré $n+1$ avec les mêmes racines. Donc d'après III.A, on a

$\|\Pi\|_\infty = \|\tilde{T}_{n+1}\|_\infty = \dfrac{1}{2^n}$, ce qui implique avec III.B 2.c,

$$\boxed{\|f - P_n\|_\infty \leq \frac{1}{2^n (n+1)!} \|f^{(n+1)}\|_\infty .}$$

Une condition suffisante pour que f soit limite d'une suite de polynômes d'interpolation est que

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2^n (n+1)!} \|f^{(n+1)}\|_\infty \right) = 0 .$$

c'est le cas en particulier si $\exists A > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\|f^{(n+1)}\|_\infty \leq A .$$

4° (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$f^{(n+1)}(x) = e^x$$

D'où $\forall x \in [-1,1]$, $\dfrac{1}{e} \leq |f^{(n+1)}(x)| \leq e$.

Ainsi d'après III.B.3, on a :

$$\|f - P_n\|_\infty \leq \frac{e}{(n+1)!\, 2^n},$$

ce qui donne la première inégalité.

D'autre part, comme $\Pi \in \tilde{\mathbb{P}}_{n+1}$, on a $\|\Pi\|_\infty \geq \dfrac{1}{2^n}$.

Or Π est continue sur $[-1,1]$ — compact. Donc elle atteint ses bornes. Autrement dit, il existe $r \in [-1,1]$ tq

$$|\pi(r)| = \|\pi\|_\infty \geqslant \frac{1}{2^n}.$$

Appliquons alors III B 2b à $x = r$: il existe $\xi \in]-1,1[$ tel que

$$f(r) - P_n(r) = \pi(r)\,\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

D'où $$\|f - P_n\|_\infty \geqslant |f(r) - P_n(r)| = \frac{|\pi(r)|}{(n+1)!}\left|f^{(n+1)}(\xi)\right|$$

$$\geqslant \frac{1}{2^n(n+1)!}\,\frac{1}{e}.$$

(b) Pour tout $x \in [-1,1]$, on a :

$$|f(x) - S_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}\right| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{|x|^k}{k!} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!}$$

De + $$|f(1) - S_n(1)| = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!}.$$

D'où $$\boxed{\|f - S_n\|_\infty = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!}} \qquad (**)$$

L'inégalité $\dfrac{1}{(n+1)!} \leq \|f - S_n\|_\infty$ découle alors immédiatement de $(**)$. Pour l'autre inégalité, remarquons que

$$\|f - S_n\|_\infty = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!} = \frac{1}{(n+1)!}\left[1 + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{(n+2)(n+3)\cdots(n+k)}\right]$$

$$\leq \frac{1}{(n+1)!}\left[1 + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{(n+2)^{k-1}}\right]$$

$$= \frac{1}{(n+1)!}\cdot\frac{1}{1 - \frac{1}{n+2}} = \frac{n+2}{(n+1)(n+1)!}$$

c) D'après III B 4 a), la quantité $\|f-P_n\|_\infty$ a

de l'ordre de $\frac{1}{(n+1)!\,2^n}$ et d'après III b 4 b),

la quantité $\|f-S_n\|_\infty$ a de l'ordre de $\frac{1}{(n+1)!}$.

Ainsi $\|f-P_n\|_\infty$ tend beaucoup plus vite vers zéro que $\|f-S_n\|_\infty$.