Préparation à l'agrégation interne de mathématiques - Année 2011-2012
Éléments de correction de l'écrit blanc du 10 décembre 2011

Partie I. Étude de cas particuliers

1. **Le cas d'un vecteur propre**

   (a) Si $Q = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, alors

   $$(Qu)(x) = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k u^k\right)(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k u^k(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \lambda^k x = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k \lambda^k\right) x = (Q(\lambda))\, x$$

   (b) $T_n(1) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} 1^k = \frac{n+1}{n+1} = 1$

   (c) Avec $z_1 = z$ et $z_2 = -z'$, on obtient $|z - z'| \leqslant |z| + |z'|$.
   Avec $z_1 = z - z'$ et $z_2 = z'$, on obtient $|z| \leqslant |z - z'| + |z'|$ donc $|z| - |z'| \leqslant |z - z'|$. De plus, en permutant z et z', on obtient aussi $|z'| - |z| \leqslant |z' - z| = |z - z'|$ d'où la dernière inégalité.

   (d) Si $\lambda \neq 1$: $T_n(\lambda) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} \lambda^k = \frac{1}{n+1} \times \frac{1-\lambda^{n+1}}{(1-\lambda)} = \frac{1-\lambda^{n+1}}{(1-\lambda)(n+1)}$.
   Puisque $0 \leqslant \left|1 - |\lambda|^{n+1}\right| \leqslant |1 - \lambda^{n+1}| \leqslant 1 + |\lambda|^{n+1}$, on obtient l'inégalité souhaitée.

   (e) Si $\lambda = 1$, la suite est constante donc convergente.
   Si $|\lambda| \leqslant 1$ et $\lambda \neq 1$, les inégalités $0 \leqslant |T_n(\lambda)| \leqslant \frac{1}{|1-\lambda|} \times \frac{1+|\lambda|^{n+1}}{n+1} \leqslant \frac{2}{|1-\lambda|(n+1)}$ impliquent $\lim_{n\to+\infty} T_n(\lambda) = 0$.
   Si $|\lambda| > 1$ l'inégalité $\frac{1}{|1-\lambda|}\times\frac{|\lambda|^{n+1}-1}{n+1} \leqslant |T_n(\lambda)|$ implique $\lim_{n\to+\infty} T_n(\lambda) = +\infty$ (par croissance comparée).

   (f) Si $u(x) = \lambda x$ avec $x \neq 0$, alors la suite de terme général $T_n u(x) = (T_n(\lambda))x$ est constante égale à x si $\lambda = 1$, converge vers le vecteur nul 0_E si $|\lambda| \leqslant 1$ et $\lambda \neq 1$ et diverge si $|\lambda| > 1$.

2. **Projecteurs**

   (a) Classique. Il est possible d'invoquer le lemme des noyaux pour l'implication $p^2 = p \Rightarrow E = \ker(p - id) \oplus \ker(p)$.

   (b) Si p est un projecteur, alors $p^k = p$ pour tout entier $k \geqslant 1$ donc la suite de terme général $T_n p = \frac{1}{n+1}(id + np) = p + \frac{1}{n+1}(id - p)$ est convergente vers p.

3. **Caractérisation des suites constantes**

   (a) $(n+2)T_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} X^k = X^{n+1} + \sum_{k=0}^{n} X^k = X^{n+1} + (n+1)T_n$
   donc $X^{n+1} = (n+2)T_{n+1} - (n+1)T_n = T_{n+1} + (n+1)(T_{n+1} - T_n)$.

   (b) (α) L'égalité précédente appliqué à u et l'égalité $T_{n+1}u = T_n u$ impliquent $u^{n+1} = T_{n+1}u$.
   L'égalité précédente (appliquée à u en substituant $n+1$ à n) et l'égalité $T_{n+2}u = T_{n+1}u$ impliquent $u^{n+2} = T_{n+2}u = T_{n+1}u$ donc $u^{n+2} = u^{n+1}$.

   (β) Le polynôme $Q = T_{n+1} - T_n$ n'admet pas 0 comme racine car $Q(0) = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \neq 0$.
   Si x vérifie $u(x) = 0.x = 0_E$, alors $(Q(0))x = (Qu)(x) = (T_{n+1}u - T_n u)(x) = 0_E$ donc $x = 0_E$. Ceci montre que $\ker u = \{0_E\}$ donc u est inversible (dimension finie).
   L'égalité obtenue dans la question précédente peut alors s'écrire $\left(u^{-1}\right)^{n+1} u^{n+2} = \left(u^{-1}\right)^{n+1} u^{n+1}$ c'est-à-dire $u = id$. (Avec précaution, le caractère injectif de u suffisait.)

   (c) Les implications $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii)$ sont évidentes ; $(iii) \Rightarrow (iv)$ provient de ce qui précède et $(iv) \Rightarrow (i)$ provient du fait que $T_n id = id$ pour tout entier naturel n.

4. **Le cas d'un isomorphisme d'ordre fini**

   (a) $0 \leqslant \frac{r_n+1}{n+1} \leqslant \frac{b}{n+1}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{r_n+1}{n+1} = 0$ et $\frac{b(q_n+1)}{n+1} = \frac{n-r_n+b}{n+1}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{b(q_n+1)}{n+1} = 1$.

   (b) Il y avait une erreur sur un indice dans l'énoncé. En utilisant
   $\{0,\cdots,n\} = \left(\bigcup\limits_{k=0}^{q_n-1} \{bk,\cdots,bk+(b-1)\}\right) \bigcup \{bq_n,\cdots,bq_n+r_n\}$, on écrit

$$(n+1)T_n u = \sum_{k=0}^{n} u^k = \left(\sum_{k=0}^{q_n-1}\sum_{j=0}^{b-1} u^{bk+j}\right) + \sum_{j=0}^{r_n} u^{bq_n+j} = \left(\sum_{k=0}^{q_n-1}\sum_{j=0}^{b-1} id^k u^j\right) + \sum_{j=0}^{r_n} id^{q_n} u^j$$
$$= \left(\sum_{k=0}^{q_n-1} bT_{b-1}u\right) + (r_n+1)T_{r_n}u = bq_n T_{b-1}u + (r_n+1)T_{r_n}u$$

   (c) On déduit de ce qui précède l'égalité $T_n u = \frac{bq_n}{n+1}T_{b-1}u + \frac{r_n+1}{n+1}T_{r_n}u$. La suite $\left(\frac{bq_n}{n+1}T_{b-1}u\right)_n$ converge vers l'endomorphisme $T_{b-1}u$. De plus l'inégalité triangulaire et la sous-multiplicativité de la norme $|||.|||$ permettent d'obtenir la majoration uniforme en n
   $|||(r_n+1)T_{r_n}u||| \leqslant \sum_{k=0}^{r_n} |||u|||^k \leqslant \sum_{k=0}^{b-1} |||u|||^k$ qui montre que la suite $\left(\frac{r_n+1}{n+1}T_{r_n}u\right)_n$ converge vers l'endomorphisme nul.
   Donc la suite $(T_n u)_n$ converge vers l'endomorphisme $T_{b-1}u$.

   (d) Le polynôme $X-1$ est irréductible car de degré 1 et son unique racine n'est pas racine de T_{b-1} car $T_{b-1}(1) = 1 \neq 0$ donc $X-1$ et T_{b-1} sont deux polynômes premiers entre eux.

   (e) $(u-id)T_{b-1}u = uT_{b-1} - T_{b-1} = b\left(\sum_{k=0}^{b-1} u^{k+1} - \sum_{k=0}^{b-1} u^k\right) = b(u^b - id) = 0$. Le polynôme $(X-1)T_{b-1}$ est donc un polynôme annulateur de u. Le lemme des noyaux peut être appliqué d'après ce qui précède. D'où la décomposition $E = \ker(u-id) \oplus \ker(T_{b-1}u)$.

   (f) D'après la caractérisation précédente des projecteurs, il suffit de vérifier l'égalité $\ker(u - id) = \ker(T_{b-1}u - id)$. Si $u(x) = x$, alors $(T_{b-1}u)(x) = x$. Réciproquement, si $(T_{b-1}u)(x) = x$, alors $(u-id)(x) = (u-id)(T_{b-1}u)(x) = 0_E$.

Partie II. Le théorème ergodique de Von Neumann

1. **Le cas strictement contractant**

   (a) Si $0 \neq x \in \ker(u-id)$, alors $|||u||| \geqslant \frac{\|u(x)\|}{\|x\|} = \frac{\|x\|}{\|x\|} = 1$. Contradiction.

   (b) En utilisant l'inégalité triangulaire et la sous-multiplicativité de la norme $|||.|||$:

$$|||T_n u||| = \frac{1}{n+1}\left|\left|\left|\sum_{k=0}^{n} u^k\right|\right|\right| \leqslant \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} |||u|||^k = \frac{1}{n+1} \times \frac{1-|||u|||^{n+1}}{(1-|||u|||)} \leqslant \frac{1}{(n+1)(1-|||u|||)}$$

   (c) La majoration précédente implique la convergence de la suite $(T_n u)_n$ vers l'endomorphisme nul qui est le projecteur (orthogonal) sur $\{0_E\} = \ker(u-id)$.

2. **Adjoint d'un endomorphisme d'un espace hermitien**

   (a) On utilise l'unicité de l'adjoint. Pour tous vecteurs x et y de E :
   $\langle id(x), y\rangle = \overline{\langle x, id(y)\rangle}$ donc $id^* = id$;
   $\langle u^*(x), y\rangle = \overline{\langle y, u^*(x)\rangle} = \overline{\langle u(y), x\rangle} = \langle x, u(y)\rangle$ donc $(u^*)^* = u$;
   $\langle (u-v)(x), y\rangle = \langle u(x), y\rangle - \langle v(x), y\rangle = \langle x, u^*(y)\rangle - \langle x, v^*(y)\rangle = \langle x, (u^*-v^*)(y)\rangle$ donc $(u-v)^* = u^* - v^*$.

(b) $\|u^*(x)\|^2 = \langle u^*(x), u^*(x)\rangle = \langle x, u\circ u^*(x)\rangle \leqslant \|x\|.\|u\circ u^*(x)\| \leqslant |||u|||\,.\|u^*(x)\|.\|x\|$
(Tous les membres sont réels positifs.)
On obtient alors, si $u^*(x)\neq 0$: $\|u^*(x)\| \leqslant |||u|||\,.\|x\|$ donc $|||u^*||| \leqslant |||u|||$.

(c) Puisque $(u^*)^* = u$, les rôles de u et u^* peuvent être permutés donc $|||u||| \leqslant |||u^*||| \leqslant |||u|||$ d'où l'égalité.

3. **Une décomposition générale**

(a) Classique. L'égalité $\langle f(y), x\rangle = \langle y, f^*(x)\rangle$ valable pour tout y permet de montrer l'équivalence $x \in (\operatorname{im} f)^\perp \Leftrightarrow f^*(x) \in E^\perp = \{0\}$.

(b) L'égalité précédente appliquée à $f = u - id$ montre que $\operatorname{im}(u-id)$ est l'orthogonal de $\ker(u-id)^*$. Ces deux espaces sont donc des supplémentaires orthogonaux.

4. **Une égalité pour les endomorphismes hermitiens**

(a) En utilisant la linéarité de $*$ et $uu^* = id$: $u(u-id)^* = u(u^* - id^*) = uu^* - uid = id - u$.

(b) $\ker(u-id) = \ker(id-u) = \ker(u(u-id)^*) = \ker(u-id)^*$; la dernière égalité étant justifiée par le fait que u est inversible (injectif suffit).

5. **La même égalité pour les endomorphismes contractants**

(a) Inégalité de Cauchy-Schwarz et majoration de $|||u|||$:
$|\langle u(x), x\rangle| \leqslant \|u(x)\|.\|x\| \leqslant |||u|||\,.\|x\|^2 \leqslant \|x\|^2$.

(b) Si x est un vecteur vérifiant $\langle u(x), x\rangle = \|x\|^2$, alors les inégalités précédentes sont des égalités (car $\langle u(x), x\rangle$ est alors un réel positif). Le cas d'égalité de Cauchy-Schwarz affirme que x et $u(x)$ sont colinéaires : $u(x) = \lambda x$.
Et $\|x\|^2 = \langle u(x), x\rangle = \lambda\|x\|^2$ implique alors $\lambda = 1$ si $x \neq 0$ (sinon $\lambda = 1$ convient aussi).

(c) Les implications $\Rightarrow$ sont évidentes. La première implication $\Leftarrow$ est justifiée par ce qui précède. Pour la seconde implication $\Leftarrow$, on utilise le fait que $|||u^*||| = |||u||| \leqslant 1$ pour justifier que le résultat précédent s'applique aussi à u^*.

(d) Si le produit $\langle u(x), x\rangle$ est réel, alors $\langle u^*(x), x\rangle = \langle x, u(x)\rangle = \overline{\langle u(x), x\rangle} = \langle u(x), x\rangle$.
Ceci justifie $u^*(x) = x \Longleftrightarrow \|x\|^2 = \langle u^*(x), x\rangle \Longleftrightarrow \|x\|^2 = \langle u(x), x\rangle \Longleftrightarrow u(x) = x$.
On obtient alors $x \in \ker(u-id)^* \Leftrightarrow x \in \ker(u^* - id) \Leftrightarrow u^*(x) = x \Leftrightarrow u(x) = x \Leftrightarrow x \in \ker(u-id)$ d'où l'égalité $(\star)$.

6. **Démonstration du théorème ergodique**

(a) Les égalités $E = \ker(u-id)^* \overset{\perp}{\oplus} \operatorname{im}(u-id)$ et $\ker(u-id)^* = \ker(u-id)$ justifient la somme directe orthogonale $E = \ker(u-id) \overset{\perp}{\oplus} \operatorname{im}(u-id)$.

(b) Si x vérifie $u(x) = x$, alors $p(x) = x$ et $T_n u(x) = x$. D'où l'égalité.

(c) Si x appartient à $\operatorname{im}(u-id)$, il existe un vecteur y tel que $x = u(y) - y$. On a alors $u^k(x) = u^{k+1}(y) - u^k(y)$ donc $T_n u(x) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^n \left(u^{k+1}(y) - u^k(y)\right) = \frac{1}{n+1}\left(u^{n+1}(y) - y\right)$.
D'où la majoration $\|T_n u(x)\| \leqslant \frac{\|u^{n+1}(y)\| + \|y\|}{n+1} \leqslant \frac{|||u|||^{n+1}.\|y\| + \|y\|}{n+1} \leqslant \frac{2\|y\|}{n+1}$ en utilisant l'hypothèse $|||u||| \leqslant 1$.

(d) Si $x = x_1 + x_2$ est la décomposition d'un vecteur x dans la somme directe orthogonale $E = \ker(u-id) \overset{\perp}{\oplus} \operatorname{im}(u-id)$, alors $T_n u(x) = T_n u(x_1) + T_n u(x_2) = p(x_1) + T_n u(x_2)$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n u(x_2) = 0_E$ d'après la majoration précédente.
La suite de terme général $T_n u(x)$ converge donc vers $p(x_1) = p(x)$. Puisque E est de dimension finie, la convergence des suites $(T_n u(x))_n$ vers $p(x)$ implique la convergence de la suite $(T_n u)_n$ vers le projecteur orthogonal p.

Partie III. Autres cas

1. **Un exemple**

   (a) Le vecteur $e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ vérifie $\|e_1\| = 1$ et $\|Ue_1\| = \left\|\begin{pmatrix}1/2\\1\end{pmatrix}\right\| = \frac{\sqrt{5}}{2} > 1$ donc $|||U||| > 1$.

   (b) L'étude des valeurs propres et sous-espaces propres de U montre que $U = RDR^{-1}$ avec, par exemple, $R = \begin{pmatrix}1 & 1\\1 & -2\end{pmatrix}$ et $R^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2 & 1\\1 & -1\end{pmatrix}$.

   (c) La suite de terme général $T_nD = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} D^k = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\begin{pmatrix}1^k & 0\\0 & (-1/2)^k\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & \frac{2+(-1/2)^n}{3(n+1)}\end{pmatrix}$ converge vers la matrice $\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$

   (d) En utilisant l'égalité $T_nU = T_n\left(RDR^{-1}\right) = R\left(T_nD\right)R^{-1}$, le résultat précédent et la continuité de la conjugaison matricielle $M \mapsto RMR^{-1}$, la suite $(T_nU)_n$ converge vers la matrice $P = R\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}R^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2 & 1\\2 & 1\end{pmatrix}$.

   (e) On a $\ker P = Vect\left\{\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}\right\}$ et $\ker(P - Id) = Vect\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}$. Ces deux sous-espaces vectoriels sont bien supplémentaires mais pas orthogonaux.

2. **Le cas des matrices stochastiques**

   (a) Toute matrice stochastique admet le vecteur $x = \begin{pmatrix}1\\\vdots\\1\end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{d} e_k$ comme vecteur invariant : $Ax = x$. On obtient par conséquent $|||A||| \geqslant \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = 1$.

   (b) Le produit de deux matrices à coefficients réels positifs est une matrice à coefficients réels positifs. On vérifie également que $\sum_{j=1}^{d}(AB)_{ij} = \sum_{j=1}^{d}\left(\sum_{k=1}^{d} a_{ik}b_{kj}\right) = \sum_{k=1}^{d}\left(a_{ik}\underbrace{\sum_{j=1}^{d} b_{kj}}_{=1}\right) = 1.$

   (c) Il suffit de vérifier que, si t est un réel de l'intervalle $[0, 1]$ et si les matrices A et B appartiennent à $\mathcal{S}$, alors la matrice $(1 - t)A + tB$ appartient à $\mathcal{S}$.

   (d) Par récurrence, toute puissance positive d'une matrice stochastique est stochastique. Par convexité, toute combinaison linéaire à coefficients réels positifs de somme 1 de matrices stochastique est stochastique.
   Donc, si U appartient à $\mathcal{S}$, $T_nU = \sum_{k=0}^{n}\frac{U^k}{n+1}$ appartient à $\mathcal{S}$ pour tout entier naturel n.

   (e) Si une suite de matrices stochastiques converge vers une matrice M, alors M vérifie les conditions nécessaires (coefficients réels positifs et somme sur chaque ligne égale à 1) donc M appartient à $\mathcal{S}$.

   (f) On peut utiliser, par exemple, la norme $\|.\|_\infty$ (maximum des modules de tous les coefficients), pour établir la majoration $\|A\|_\infty \leqslant 1$ pour toute matrice stochastique A.

   (g) L'espace vectoriel $\mathcal{M}_d(\mathbf{R})$ étant de dimension finie et l'ensemble $\mathcal{S}$ étant fermé et borné, on en déduit que $\mathcal{S}$ est compact. Si U appartient à $\mathcal{S}$, la suite $(T_nU)_n$ est une suite d'éléments du compact $\mathcal{S}$. Elle admet donc une sous-suite convergente dans $\mathcal{S}$.