Université Claude Bernard–Lyon I
CAPES de Mathématiques : Analyse
Année 2004–2005

Capes blanc
3 février 2005

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on notera P_n le polynôme de Taylor d'ordre n de l'exponentielle au point 0 :

$$P_n(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}.$$

On notera $(\lambda_{n,1}, \lambda_{n,2}, \ldots, \lambda_{n,n})$ les racines complexes de P_n, répétées selon leur multiplicité. On remarquera qu'en posant

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad z_{n,k} = \frac{\lambda_{n,k}}{n},$$

le système $[z_{n,k}]_{k=1,\ldots,n}$ est un système de racines du polynôme

$$(1) \qquad \Pi_n(X) = P_n(nX).$$

Le but du problème est d'établir les deux résultats suivants, auxquels on donnera un sens précis et dont la preuve fera l'objet des parties II et III du problème, qu'on peut conjecturer à l'aide d'un logiciel de calcul formel :

- lorsque $n \to +\infty$, les nombres complexes $\xi_{n,k} = z_{n,k}e^{-z_{n,k}}$ tendent "à s'accumuler" sur le cercle de centre 0 et de rayon $1/e$;
- les nombres complexes $\xi_{n,k}$ tendent à se répartir "régulièrement" sur le cercle précédent. Dans la dernière partie, on applique ce résultat à l'obtention d'un équivalent du nombre de racines de P_n dont la partie réelle est positive.

Enfin quelques rappels dont la preuve n'est pas demandée :

1. Une suite extraite (ou sous-suite) d'une suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres complexes est ne suite de la forme $(z_{p_n})_{n\in\mathbb{N}}$ où $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite strictement croissante d'entiers. *On pourra noter $p(n)$ à la place de p_n si on préfère.*
2. De toute suite bornée de réels ou de complexes on peut extraire une suite convergente.
3. (Convergence dominée pour les séries, que l'on démontre comme la continuité de la somme d'une série de fonctions normalement convergente.) Soit $(u_{n,k})_{(n,k)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ une suite double de nombres complexes. On suppose qu'il existe une suite $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de réels positifs tels que
   - pour tout couple (n,k), $|u_{n,k}| \leq v_k$;
   - pour tout entier k, la suite $n \mapsto u_{n,k}$ admet une limite ℓ_k ;
   - la série de terme général v_k converge.

   Alors pour tout n, la série $\sum_k u_{n,k}$ converge, la série $\sum \ell_k$ converge et on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} u_{n,k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \ell_k.$$

Les trois premières parties sont indépendantes entre elles sauf les questions II.E.3 et III.C.1.

Partie I – Etude d'une courbe plane

I.A Soit $z = \rho e^{i\theta}$ un nombre complexe ($\rho \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$). Déterminer en fonction de ρ et de θ une forme trigonométrique du nombre complexe $\xi = ze^{-z}$.

I.B Démontrer que la fonction u, définie sur $]0,1]$ par

$$u(t) = \frac{1+\ln t}{t}$$

est une bijection continue croissante de $]0,1]$ sur $]-\infty,1]$ dont la fonction réciproque est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty,1[$.

I.C En déduire l'existence d'une unique fonction $\theta \mapsto r(\theta)$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que pour tout réel θ, $r(\theta) \in]0,1]$ et

$$r(\theta)\, e^{-r(\theta)\, \cos\theta} = \frac{1}{e}.$$

I.D Exprimer de manière simple $r(0)$, $r(\pi/2)$. Donner une valeur approchée de $r(\pi)$ à 10^{-6} près. Préciser l'algorithme employé.

I.E Montrer que r est une fonction continue, 2π-périodique et paire ; démontrer qu'elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,2\pi[$ et que pour tout $\theta \in]0,2\pi[$:

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = r'(\theta) = \frac{r^2(\theta)\, \sin\theta}{r(\theta)\, \cos\theta - 1}.$$

I.F

(a) Donner un équivalent simple en h de la fonction v définie par $h \mapsto v(h) = 1 - u(1-h)$ lorsque $h \to 0$ par valeurs supérieures (où u est défini au I.B).
(b) Grâce à une expression de $1-\cos\theta$ à l'aide de $u(r(\theta))$, en déduire que, lorsque $\theta \to 0$ par valeurs supérieures :

$$r(\theta) = 1 - \theta + o(\theta).$$

(c) Montrer que $\theta \mapsto r(\theta)$ est dérivable à gauche et à droite en 0.
(d) Donner enfin l'allure du graphe de r.

I.G Un plan affine euclidien orienté est rapporté à une repère orthonormé direct ; on s'intéresse à la courbe Γ dont une équation polaire est $\rho = r(\theta)$. (Γ est l'ensemble des points du plan de coordonnées $(r(\theta)\cos\theta, r(\theta)\sin\theta)$, $\theta \in \mathbb{R}$.)
(a) Quelle symétrie de Γ la question I.E met-elle en évidence ?
(b) Démontrer l'existence de "demi-tangentes" en $\theta = 0$.
(c) Tracer sommairement la courbe Γ.
(d) Quelle est l'image de Γ par la transformation complexe $z \mapsto ze^{-z}$?
(On calculera le module de ze^{-z} pour un point de Γ d'affixe z et on montrera que tout élément de $[0,2\pi]$ est de la forme $\mathrm{Arg}(r(\theta)e^{i\theta})$.)

Partie II – Etude des modules des racines

On désigne par n un entier naturel non nul fixé.

II.A

(a) Prouver que toutes les racines du polynôme P_n sont simples.
(On pourra calculer la dérivée de P_n.)
(b) En déduire que pour $k \in \{1,\ldots,n\}$, les $z_{n,k}$ sont deux à deux distincts.

II.B Pour $p \in \mathbb{N}$, on pose :

$$q_{n,p} = \begin{cases} 1 & \text{si } p = 0 \\ \dfrac{n!}{n^p\,(n-p)!} = \displaystyle\prod_{j=0}^{p-1}\left(1 - \frac{j}{n}\right) & \text{si } 1 \leq p \leq n \\ 0 & \text{si } p > n. \end{cases}$$

On considère le polynôme Q_n défini par

$$Q_n(X) = \frac{n!}{n^n}\, X^n\, \Pi_n\left(\frac{1}{X}\right),$$

où Π_n a été défini à la formule (1).

(c) Montrer que

$$Q_n(X) = \sum_{p=0}^{n} q_{n,p}\, X^p = \sum_{p=0}^{+\infty} q_{n,p}\, X^p.$$

(d) Exprimer les racines de Q_n à l'aide des $z_{n,k}$.

II.C

II.C.1. Soit r un réel tel que $0 < r < 1$.

(a) Montrer que pour tout nombre complexe z tel que $|z| \leq r$:

$$\left|\frac{1}{1-z} - Q_n(z)\right| \leq \sum_{p=0}^{+\infty}(1 - q_{n,p})\, r^p.$$

Peut-on avoir égalité ?

(b) Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sup_{|z|\leq r}\left|\frac{1}{1-z} - Q_n(z)\right|$.

II.C.2. En déduire que :

(a) il existe un entier N tel que pour $n \geq N$, toute racine z de Q_n satisfait $|z| > r$;

(b) pour tout $R > 1$ il existe un entier N tel que pour tout $n \geq N$ on ait :

$$\forall k \in \{1, \ldots, n\}, \quad |z_{n,k}| < R.$$

II.D On considère une suite $(z_p)_{p\in\mathbb{N}}$ de complexes qui converge vers un complexe z tel que $|z| \leq 1$.

II.D.1. Déterminer la limite de la suite $(z_p e^{-z_p})_{p\in\mathbb{N}}$ si $\mathrm{Re}(z) = 1$, i.e. si $z = 1$.

II.D.2. On suppose $\mathrm{Re}(z) < 1$ et on cherche la limite de la suite de terme général

$$\alpha_p = \int_0^p \left(1 - \frac{t}{p}\right)^p e^{z_p t}\,\mathrm{d}t.$$

On définit une suite de fonctions continues u_p sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$u_p(t) = \begin{cases} \left(1 - \dfrac{t}{p}\right)^p e^{z_p t} & \text{si } t \in [0, p] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On fixe un réel $s \in\,]\mathrm{Re}(z), 1[$ et un entier p_0 tel que pour $p \geq p_0$ on ait $\mathrm{Re}(z_p) \leq s$.

(a) Montrer que pour tout $p \geq p_0$ et tout $t \geq 0$, on a : $|u_p(t)| \leq e^{-(1-s)t}$.

(b) On fixe un réel $T > 0$. Montrer que $\displaystyle\lim_{p\to+\infty}\int_0^T u_p(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^T e^{-t+zt}\,\mathrm{d}t$.

(c) Montrer enfin que

$$\lim_{p\to+\infty}\int_0^{+\infty} u_p(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} e^{-t+zt}\,\mathrm{d}t.$$

(Utiliser (a) pour majorer le module de $\int_T^{+\infty} u_p$ *et choisir* T *convenablement.)*

(d) Calculer cette limite.

II.D.3. On suppose toujours que $\mathrm{Re}(z) < 1$.

(a) En comparant la somme $\sum_{k=1}^{p} \ln k$ à une intégrale, déterminer $\lim\limits_{p\to+\infty}\left(\dfrac{p^p}{p!}\right)^{\frac{1}{p+1}}$.

(b) En déduire la limite de la suite de terme général

$$\left|\frac{p^p}{p!}\int_0^p \left(1-\frac{t}{p}\right)^p e^{z_p t}\,\mathrm{d}t\right|^{\frac{1}{p+1}}.$$

II.E Comportement asymptotique des $|\xi_{n,k}|$

II.E.1. Soit z une racine complexe du polynôme Π_p. Prouver la relation :

$$(2) \qquad e^{-z} = (ze^{-z})^{p+1}\,\frac{p^p}{p!}\int_0^p \left(1-\frac{t}{p}\right)^p e^{zt}\,\mathrm{d}t.$$

On pourra appliquer la formule de Taylor-reste intégral à la fonction $\varphi : [0,1] \to \mathbb{C}$, $s \mapsto e^{szp}$.

II.E.2. Soit $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite strictement croissante d'entiers naturels et $(z_{p_n})_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de complexes telle que pour chaque entier n, z_{p_n} soit une racine de Π_{p_n}. On suppose de plus que cette suite converge vers un nombre complexe z. Montrer que $|z| \leq 1$ et en déduire, à l'aide de la formule (2), que $|ze^{-z}| = 1/e$.

II.E.3. On veut montrer qu'en posant $\xi_{n,k} = z_{n,k}e^{-z_{n,k}}$:

$$\lim_{n\to+\infty}\max_{1\leq k\leq n}\left||\xi_{n,k}| - \frac{1}{e}\right| = 0.$$

(a) On suppose que ce n'est pas le cas. Montrer qu'il existe deux suites d'entiers strictement croissantes $(n_p)_{p\in\mathbb{N}}$ et $(k_p)_{p\in\mathbb{N}}$ telles que $1 \leq k_p \leq n_p$ $(p \in \mathbb{N})$, et la suite $(\big|\ |\xi_{n_p,k_p}| - 1/e\big|)_{p\in\mathbb{N}}$ est minorée par une constante strictement positive.

(b) Utiliser les questions II.C.2 et I.E.2 pour aboutir à une contradiction.

Partie III – Répartition des arguments

Dans toute cette partie, n est un entier naturel non nul. On pose, pour $p \in \mathbb{N}$, non nul :

$$s_{n,p} = \sum_{k=1}^{n} z_{n,k}^p, \qquad S_{n,p} = \sum_{k=1}^{n} \xi_{n,k}^p, \quad \text{avec } \xi_{n,k} = z_{n,k}e^{-z_{n,k}}.$$

On note $\rho_{n,k}$ le module de $\xi_{n,k}$ et $\phi_{n,k} \in \mathbb{R}$ l'un quelconque de ses arguments, de sorte que

$$\xi_{n,k} = \rho_{n,k}e^{i\phi_{n,k}}.$$

Enfin, on rappelle que le polynôme Q_n et les $q_{n,p}$ ont été définis à la question II.B.

III.A On définit une fonction f_n de la variable réelle x par

$$f_n(x) = -\frac{Q_n'(x)}{Q_n(x)}.$$

(a) Quel est le domaine de définition de f_n ? Donner une expression de $f_n(x)$ en fonction des $z_{n,k}$.
(b) Montrer que f_n est développable en série entière sur un voisinage de 0 que l'on précisera, et que

$$f_n(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} s_{n,p+1}\, x^p.$$

III.B Majoration des $S_{n,p}$

III.B.1. Etablir, pour $n \geq 1$ et $p \geq 0$ la relation :

$$-(p+1)\, q_{n,p+1} = \sum_{i=0}^{p} q_{n,i}\, s_{n,p+1-i}.$$

III.B.2.
(a) Calculer $s_{n,1}$.
(b) Prouver, par récurrence sur p, que, pour tout $n \geq 1$ et tout $p \geq 1$: $|s_{n,p}| \leq 3^p$.
(c) En déduire : $|S_{n,p}| \leq 3^p\, e^{3p}$.

III.C Equirépartition des $\phi_{n,k}$

III.C.1. Soit $p \in \mathbb{Z}$ non nul. Prouver que

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} e^{ip\phi_{n,k}} = 0.$$

On pourra utiliser II.E.3.

III.C.2. En déduire que si f est une fonction 2π-périodique, continue, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$, à valeurs complexes :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(\phi_{n,k}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\phi)\, \mathrm{d}\phi.$$

Partie IV – Etude des racines de partie réelle positive

IV.A Notons $r_{n,k}$ le module de $z_{n,k}$ et $\theta_{n,k}$ son argument tel que $-\pi \leq \theta_{n,k} < \pi$. Démontrer que :

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\max_{1 \leq k \leq n} |r_{n,k} - r(\theta_{n,k})| \right) = 0.$$

On pourra raisonner comme à la question II.E.3.
Comment interpréter ce résultat qualitativement ?

IV.B Déduire de la question III.C.2 et de la précédente que, si f est une fonction 2π-périodique, continue, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$, à valeurs complexes :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f[\theta_{n,k} - r(\theta_{n,k}) \sin \theta_{n,k}] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\phi)\, \mathrm{d}\phi.$$

IV.C On note N_n le nombre de racines de P_n dont la partie réelle est positive. Montrer que lorsque $n \to +\infty$:

$$N_n \sim \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{e\pi} \right) n.$$