Université Claude Bernard–Lyon I
CAPES de Mathématiques : Analyse
Année 2004–2005

Devoir n°5
Suites équi-réparties

Barême sur 52 points environ pour un devoir plus court qu'un CAPES habituel.

1° Un critère d'équi-répartition

(a) Pour une fonction $\tilde{C}$ constante égale à $C \in \mathbb{R}$, on a pour tout $N \in \mathbb{N}^*$: (2 pt.)

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} C = C = \int_0^1 \tilde{C}(t)\,\mathrm{d}t,$$

d'où $\tilde{C}$ appartient à F_A. En particulier, F_A n'est pas vide.
Pour $f, g \in F_A$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, on veut montrer que $h = \lambda\, f + \mu\, g$ appartient à F_A. On a :

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} h(a_n) = \lambda\, \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(a_n) + \mu\, \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} g(a_n).$$

Or, les suites en facteur de λ et μ du membre de droite convergent respectivement vers $\int_0^1 f$ et $\int_0^1 g$. Par linéarité de la limite et de l'intégrale, on a :

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} h(a_n) = \lambda \int_0^1 f + \mu \int_0^1 g = \int_0^1 h.$$

Ainsi, F_A est un sous-espace vectoriel de E qui contient les constantes.

(b) Fixons $\varepsilon > 0$. On lui associe f_1 et f_2 comme dans l'énoncé. On a d'une part, pour $N \in \mathbb{N}^*$: (3 pt.)

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f_1(a_n) \leq \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} g(a_n) \leq \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f_2(a_n) \quad \text{et} \quad \int_0^1 f_2 - \varepsilon \leq \int_0^1 g \leq \int_0^1 f_1 + \varepsilon.$$

D'autre part, puisque f_1 et f_2 appartiennent à F_A, il existe N_0 tel que pour $N \geq N_0$, on ait :

$$\int_0^1 f_1 - \varepsilon \leq \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f_1(a_n) \quad \text{et} \quad \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f_2(a_n) \leq \int_0^1 f_2 + \varepsilon.$$

On en tire, pour tout $N \geq N_0$:

$$\int_0^1 g - 2\varepsilon \leq \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} g(a_n) \leq \int_0^1 g + 2\varepsilon.$$

On en déduit que g appartient à F_A.

Erreur (trop) vue *Il faut prendre conscience du fait que les fonctions f_1 et f_2 de l'énoncé* dépendent de ε. *Par ailleurs, comme d'habitude, il n'est pas possible de "passer à la limite" dans l'inégalité (vraie)*

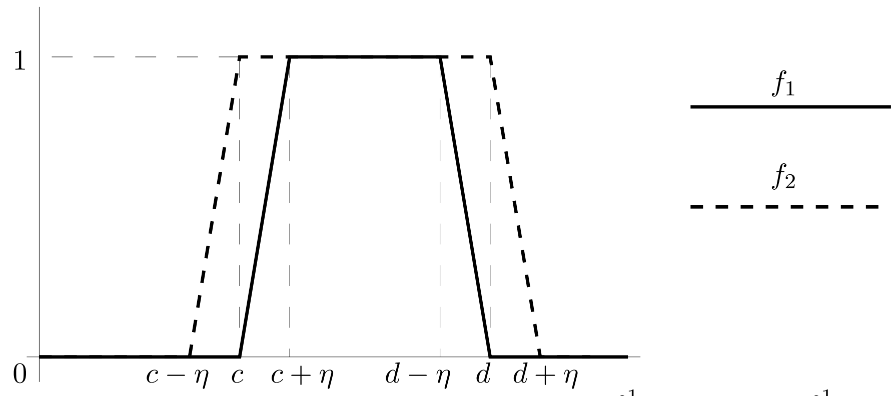
$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f_1(a_n) \leq \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} g(a_n) \leq \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f_2(a_n)$$

avant d'avoir prouvé que la limite de la suite de terme général $\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} g(a_n)$ a une limite. Comme les limites des suites à droite et à gauche sont distinctes, on ne peut pas appliquer le théorème des gendarmes !

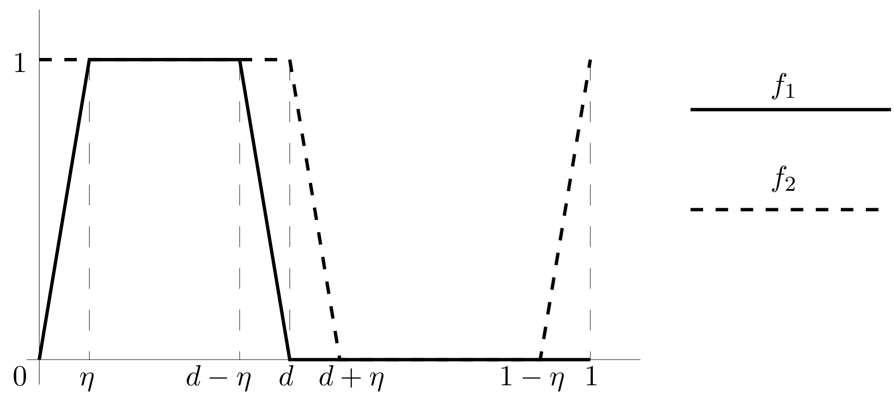
(c) Supposons que F_A contienne une partie dense P de E, et montrons que A est équi-répartie. (3 pt.)
Soit $g \in E$. Fixons $\varepsilon > 0$. Par densité, il existe une fonction $h \in P$ telle que $||h - g|| \leq \varepsilon$ (i.e. pour tout $x \in I$, $|h(x) - g(x)| \leq \varepsilon$).
On pose alors $f_1 = h - \varepsilon$ et $f_2 = h + \varepsilon$. Comme F_A est un espace vectoriel contenant les constantes, f_1 et f_2 sont dans F_A. Il en résulte que g remplit l'hypothèse de (b). D'après (b), on peut conclure que $g \in F_A$.
Inversement, si A est équi-répartie, on a : $F_A = E$, donc $P = E$ convient (non demandé).

2° Condition nécessaire et suffisante d'équi-répartition

(a) On sait que tout fonction continue sur un intervalle compact y est uniformément continue. (2 pt.)
On peut en déduire que toute fonction continue par morceaux est limite uniforme de fonctions en escalier, ou que l'ensemble des fonctions en escalier est dense dans E. Or, toute fonction en escalier est une combinaison linéaire de fonctions de la forme h_J.
En d'autres termes, l'espace vectoriel P engendré par les fonctions h_J est dense dans E. Par conséquent, si F_A contient toutes les fonctions h_J, alors il contient P d'après 1°(a), donc A est équi-répartie d'après 1°(c).
(Inversement, si A est équi-répartie, alors $F_A = E$, donc h_J appartient à F_A pour tout J.)
(b) Le dessin suivant tiendra lieu de réponse. On suppose $d > c$ (quitte à faire des modifications évidentes), et on pose $\eta = \min(\varepsilon, c, \frac{d-c}{2}, 1-d)$. (3 pt.)



Par construction, on a bien $f_1 \leq h_J \leq f_2$. Les différences $\int_0^1 (h_J - f_1)$ et $\int_0^1 (f_2 - h_J)$ valent η (somme des aires de deux triangles de base η et de hauteur 1).
Si par exemple $c = 0$ et $0 < d < 1$, on peut prendre, avec $\eta = \min(\varepsilon, \frac{d}{2}, \frac{1-d}{2})$:



(c) Supposons que toutes les fonctions continues prenant les mêmes valeurs aux extrêmités de I appartiennent à F_A. On veut montrer que $F_A = E$. (2 pt.)
Soit J un intervalle inclus dans I. D'après 2°(b), h_J satisfait les hypothèses de 1°(b) (la condition supplémentaire sur les mêmes valeurs aux extrêmités de I est remplie), donc h_J appartient à F_A, et ce, pour tout J. D'après 2°(a), on a donc : $F_A = E$.
Ainsi, A est équi-répartie.

(d) On a, pour tout intervalle J d'extrêmités c et d ($c \leq d$) : (2 pt.)

$$\forall N \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} h_J(a_n) = \frac{N(J)}{N} \quad \text{et} \quad \int_0^1 h_J = d - c.$$

Mais d'après ce qui précède, A est équi-répartie, si, et seulement si, on a :

$$\forall J \subset I,\ J \text{ intervalle}, \quad \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} h_J(a_n) = \int_0^1 h_J.$$

Par suite, A est équi-répartie dans I si, et seulement si, pour tout intervalle $J \subset I$, la limite du rapport $N(J)/N$ est $d - c$.

3° Théorème de Bohl

La suite $R = (r_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ étant fixée, on lui associe la suite $A = (r_n - [r_n])_{n\in\mathbb{N}^*}$.

(a) Supposons A équi-répartie dans I et soit $k \in \mathbb{N}^*$. Les fonctions $c_k : x \mapsto \cos(2k\pi x)$ et $s_k : x \mapsto \sin(2k\pi x)$ sont continues sur I, elle appartiennent donc à F_A, donc (2 pt.)

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \cos(2\pi k\, r_n) = \int_0^1 \cos(2\pi k\, x)\,\mathrm{d}x, \quad \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \sin(2\pi k\, r_n) = \int_0^1 \sin(2\pi k\, x)\,\mathrm{d}x.$$

Il vient alors :

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e^{2i\pi k\, r_n} = \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \cos(2\pi k\, r_n) + i \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \sin(2\pi k\, r_n) = 0.$$

(b) En séparant partie réelle et partie imaginaire comme ci-dessus, on traduit l'hypothèse sur $\lim_{N\to+\infty} C(R,k,N)$ par le fait que les fonctions c_k et s_k appartiennent à F_A (pour $k \in \mathbb{N}^*$, et aussi pour $k = 0$ d'après 1°(a)). Soit P l'espace vectoriel engendré par ces fonctions. (4 pt.)

D'abord, on identifie une fonction réelle définie sur I qui prend la même valeur en 0 et en 1 à une fonction réelle définie sur $\mathbb{R}$ et périodique de période 1.

On sait qu'une fonction périodique, $\mathcal{C}^1$ par morceaux et continue, est limite normale, donc uniforme, de sa série de Fourier. En d'autres termes, P est dense dans l'espace Q des fonctions $\mathcal{C}^1$ par morceaux et continues sur I, qui prennent les mêmes valeurs en 0 et 1. On en déduit comme dans 1°(c) que F_A contient Q (details left to the reader).

Soit J un intervalle inclus dans I et $\varepsilon > 0$. D'après notre réponse à 2°(a), on sait construire des fonctions f_1 et f_2 qui sont $\mathcal{C}^1$ par morceaux et continues, i.e. f_1 et f_2 dans Q, donc dans F_A. D'après 1°(b), il en résulte que h_J appartient à F_A.

On peut conclure : puisque F_A contient la fonction h_J pour tout intervalle $J \subset I$, la suite R est équi-répartie modulo I.

(c) Supposons d'abord que $\theta = \ell/k$, avec $\ell \in \mathbb{Z}$ et $k \in \mathbb{N}^*$. On a, avec $R = (n\theta)_{n\in\mathbb{N}^*}$: (3 pt.)

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \quad C(R,k,N) = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e^{2i\pi k\, n\theta} = 1.$$

On déduit de (a) que R n'est pas équi-répartie modulo I.

A présent, supposons que $\theta \notin \mathbb{Q}$. Soit $k \in \mathbb{N}^*$, il vient (le dénominateur n'est jamais nul) :

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \quad C(R,k,N) = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e^{2i\pi k\, n\theta} = \frac{e^{2i\pi k\theta}}{N}\,\frac{1 - e^{2i\pi kN\theta}}{1 - e^{2i\pi k\theta}},$$

d'où

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \quad |C(R,k,N)| \leq \frac{2}{|1 - e^{2i\pi k\theta}|}\,\frac{1}{N}.$$

On en déduit immédiatement que la limite de $C(R,k,N)$, lorsque N croît vers l'infini, est nulle, et, d'après (b), que la suite $(n\theta)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est équi-répartie modulo I.

4° Exemples de suites

Par le théorème des accroissements finis, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $\theta_n \in]n, n+1[$ tel que

$$d_n = r_{n+1} - r_n = \varphi(n+1) - \varphi(n) = \varphi'(\theta_n).$$

(a) Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $d_n \leq 0$. Alors, puisque φ' est décroissante, pour $t \geq \theta_n$, on a : $\varphi'(t) \leq 0$. Puisque φ' décroît et tend vers 0, on en déduit que $\varphi'(t) = 0$ pour tout $t \geq \theta_n$. Mais ceci contredit l'hypothèse selon laquelle t^{-1} est négligeable devant $\varphi'(t)$. (2 pt.)
Par suite, $d_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
(b) On sait que $\theta_n \geq n$, donc, comme $\lim_{t\to+\infty} \varphi'(t) = 0$, il vient : $\lim_{n\to+\infty} \varphi'(\theta_n) = 0$, ou : $\lim_{n\to+\infty} d_n = 0$. (Noter que θ_n n'est pas nécessairement unique, mais on sait quand même quelle est la limite de $\varphi'(\theta_n)$.) (2 pt.)
Pour la deuxième limite, constatons que $\varphi'(\theta_n) \geq \varphi'(n+1) \geq \varphi'(\theta_{n+1}) > 0$, d'où :

$$0 \leq \frac{1}{n\, d_n} = \frac{1}{n\, \varphi'(\theta_n)} \leq \frac{1}{n\, \varphi'(n+1)} \leq \frac{n+1}{n} \; \frac{\frac{1}{n+1}}{\varphi'(n+1)},$$

et cette dernière quantité tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini, grâce à l'hypothèse : $t^{-1} = o(\varphi'(t))$. Donc $\lim_{n\to+\infty}(nd_n)^{-1} = 0$.
(c) Convergence de $(C(R, 1, N))_{N\in\mathbb{N}^*}$ vers 0

Exégèse de l'énoncé *L'énoncé suggère fortement qu'il faut introduire B_n pour comprendre A_n, ce à quoi on n'aurait sans doute pas pensé spontanément. On écrit donc $A_n = A_n - B_n + B_n$ et on regarde : d'une part, on sait majorer $|A_n - B_n|$; d'autre part, la somme $\sum_{n=1}^N B_n$ est télescopique.*

Pour $N \in \mathbb{N}^*$, on a : (3^+ pt.)

$$\frac{1}{N}\left|\sum_{n=1}^N A_n\right| \leq \frac{1}{N}\sum_{n=1}^N |A_n - B_n| + \frac{1}{N}\left|\sum_{n=1}^N B_n\right|$$

$$\frac{1}{N}\left|\sum_{n=1}^N A_n\right| \leq \frac{1}{2\pi\, N}\sum_{n=1}^N \left|\frac{1}{d_{n+1}} - \frac{1}{d_n}\right| + \frac{\pi}{N}\sum_{n=1}^N |d_n| + \frac{1}{2\pi\, N}\left|\frac{A_{N+1}}{d_{N+1}} - \frac{A_1}{d_1}\right| \qquad (\S)$$

On a montré ci-dessus que φ' était strictement positive, donc la suite $(d_n^{-1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est (strictement positive et) décroissante. Par suite, la première somme de (§) s'écrit :

$$\frac{1}{2\pi\, N}\sum_{n=1}^N \left|\frac{1}{d_{n+1}} - \frac{1}{d_n}\right| = \frac{1}{2\pi\, N}\sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{d_n} - \frac{1}{d_{n+1}}\right) = \frac{1}{2\pi\, N}\left(\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_{N+1}}\right),$$

suite qui converge vers 0 car, d'après (a), $((Nd_N)^{-1})_N$ converge vers 0.
Quant à la deuxième somme de (§), elle tend vers 0 grâce au théorème de Cesaro et au fait que $(d_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers 0. Enfin, la suite $(A_{N+1})_{N\in\mathbb{N}^*}$ est bornée et $((Nd_N)^{-1})_{N\in\mathbb{N}^*}$ tend vers 0, donc le troisième terme de (§) tend vers 0.
Au bilan, la suite $(C((\varphi(n))_{n\in\mathbb{N}^*}, 1, N))_{N\in\mathbb{N}^*}$ tend vers 0 lorsque N croît vers l'infini.
(d) Pour $\psi : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ et $k, N \in \mathbb{N}^*$, on posera : $\tilde{C}(\psi, k, N) = C((\psi(n)_{n\in\mathbb{N}^*}, k, N)$. (2 pt.)
Il suffit de démontrer que la suite $(\tilde{C}(\psi, k, N))_{N\in\mathbb{N}^*}$ tend vers 0 lorsque $k \in \mathbb{N}^*$ est fixé et N tend vers l'infini. Fixons donc $k \in \mathbb{N}^*$, et remarquons que l'on a :

$$\tilde{C}(\psi, k, N) = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^N e^{2i\pi k\varphi(n)} = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^N e^{2i\pi\varphi_k(n)} = \tilde{C}(\varphi_k, 1, N),$$

où, pour $t \geq 1$, $\varphi_k(t) = k\,\varphi(t)$. Or, la fonction φ_k satisfait les mêmes hypothèses que φ : on peut donc appliquer 4°(c), ce qui montre que la suite $\tilde{C}(\varphi_k, 1, N)$ ci-dessus tend vers 0 lorsque N tend vers l'infini. En d'autres termes, la suite $(\tilde{C}(\varphi, k, N))_{N\in\mathbb{N}^*}$ tend vers 0 pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
Ainsi, par le théorème de Bohl, la suite $(\varphi(n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est équi-répartie modulo I.

5° Suites $(\ln^{\alpha}(n))_{n\in\mathbb{N}^*}$

(a) Soit $\alpha > 1$. La fonction ψ_α est continue, positive et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]1,+\infty[$; on a : (3 pt.)

$$\forall t \geq 1, \quad \psi_\alpha'(t) = \alpha\,\frac{\ln^{\alpha-1}(t)}{t}, \quad \psi_\alpha''(t) = \alpha\frac{\ln^{\alpha-2}(t)}{t^2}\,(\alpha - 1 - \ln(t))\,.$$

Vu que $\alpha > 1$, cette fonction n'est jamais concave sur $[1,+\infty[$. Cependant, elle l'est sur $\left[e^{\alpha-1},+\infty\right[$. Notons que pour $1 < \alpha < 2$, ψ_α' n'est pas dérivable en 1, donc ψ_α n'est pas de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[1,+\infty[$. Au voisinage de $+\infty$, on a bien : $\psi_\alpha'(t) = o(1)$ et $t^{-1} = o(\psi_\alpha'(t))$.
Cependant, il est évident que la condition d'être équi-répartie modulo I est une condition asymptotique : elle est vraie pour une suite si et seulement si elle est vraie après avoir changé un nombre fini de termes.
On remarque que la preuve de la question 4° reste valable si on fixe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ et si on remplace la suite $(\varphi(n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ par une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que $a_n = \varphi(n)$ pour tout $n \geq n_0$, où φ est une fonction concave sur $[n_0,+\infty[$, telle que etc.

> Pour s'en convaincre pleinement, on va remplacer φ par une fonction $\psi : [1,+\infty[\to \mathbb{R}$ qui coïncide avec φ sur un intervalle $[b,+\infty[$, concave et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[1,+\infty[$.
> Ici, on fixe $b = e^{\alpha-1}+1$: alors $\varphi''(b) < 0$. On définit ψ par :
>
> $$\psi(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{si } x \geq b \\ u(x-b)^2 + v(x-b) + w & \text{si } x < b, \end{cases}$$
>
> où u, v, w sont des réels à déterminer pour que ψ soit $\mathcal{C}^2$ sur $[1,+\infty[$. Pour cela, il est nécessaire et suffisant d'avoir :
>
> $$w = \varphi(b), \quad v = \varphi'(b), \quad 2u = \varphi''(b).$$
>
> Alors, la suite $(\psi(n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ coïncide avec la suite $(\varphi(n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ à partir du rang $[b]+1$, et on peut lui appliquer les résultats de la question 4°.

Bref :

$$\boxed{\text{pour } \alpha > 1, \text{ la suite } (\ln^{\alpha}(n))_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est équi-répartie modulo } I.}$$

A présent, soit $\alpha = 1$. On a : $\psi_1'(t) = t^{-1}$ pour $t \geq 1$, donc la fonction ψ_1' n'est négligeable devant t^{-1} sur aucun voisinage de $+\infty$. On n'a aucun espoir d'appliquer 4°.

(b) Posons, pour $x > 1$: (2 pt.)

$$F(x) = \frac{e^{(2i\pi+1)\ln(x)}}{2i\pi+1} = \frac{x\,f(x)}{2i\pi+1}.$$

Il est immédiat de vérifier que F est une primitive de f.

(c) On a, pour $N \in \mathbb{N}^*$: (2 pt.)

$$|I_N| = \left|\frac{1}{N}\int_1^N e^{2i\pi\,\ln x}\,\mathrm{d}x\right| = \left|\frac{1}{N}\left[\frac{x\,f(x)}{2i\pi+1}\right]_1^N\right| = \frac{1}{N}\left|\frac{N\,e^{2i\pi\,\ln N}-1}{2i\pi+1}\right| = \frac{1}{|2i\pi+1|}\left|1 - \frac{e^{-2i\pi\,\ln N}}{N}\right|,$$

d'où :

$$\lim_{N\to+\infty} |I_N| = \frac{1}{|2i\pi+1|} = \frac{1}{\sqrt{4\pi^2+1}}. \tag{1}$$

Noter que la suite $(I_N)_{N\in\mathbb{N}^*}$, elle, n'a pas de limite.
<u>Première méthode</u> : Pour faire se ressembler L_N et I_N, on écrit, pour $N \in \mathbb{N}^*$: (4 pt.)

$$L_N - I_N = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N-1}\left(e^{2i\pi\,\ln n} - \int_n^{n+1} e^{2i\pi\,\ln x}\,\mathrm{d}x\right) + \frac{e^{2i\pi\,\ln N}}{N} \tag{2}$$

Idée *On va montrer que les termes entre parenthèses tend vers 0 si n tend vers l'infini, et on appliquera le théorème de Cesaro. Concrètement, on calcule l'intégrale grâce à la primitive connue de f, puis on factorise ce qui est grand.*

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose et on calcule :

$$\begin{aligned}
u_n &= e^{2i\pi \ln n} - \int_n^{n+1} e^{2i\pi \ln x}\,\mathrm{d}x \\
&= e^{2i\pi \ln n} - \frac{(n+1)e^{2i\pi\ln(n+1)} - ne^{2i\pi\ln n}}{2i\pi+1} \\
&= e^{2i\pi \ln n} - \frac{ne^{2i\pi\ln n}}{2i\pi+1}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)e^{2i\pi(\ln(n+1)-\ln n)} - 1\right) \\
&= e^{2i\pi \ln n} - \frac{ne^{2i\pi\ln n}}{2i\pi+1}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)e^{2i\pi\ln(1+\frac{1}{n})} - 1\right) \\
&= e^{2i\pi \ln n} - \frac{ne^{2i\pi\ln n}}{2i\pi+1}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)e^{2i\pi(\frac{1}{n}+o(\frac{1}{n}))} - 1\right) \\
&= e^{2i\pi \ln n} - \frac{ne^{2i\pi\ln n}}{2i\pi+1}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2i\pi}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right) - 1\right) \\
&= e^{2i\pi \ln n} - \frac{ne^{2i\pi\ln n}}{2i\pi+1}\left(\frac{2i\pi+1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\
&= e^{2i\pi \ln n}o(1),
\end{aligned}$$

ce qui prouve que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$. L'égalité (5) et le théorème de Cesaro entraînent alors que

$$\lim_{N\to+\infty}(L_N - I_N) = 0. \tag{3}$$

<u>Deuxième méthode</u> (d'après J. Nique) (meilleure ?) : On se ramène à une somme de Riemann :

$$\begin{aligned}
L_N - I_N &= \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e^{2i\pi\ln n} - \frac{1}{N}\int_1^N e^{2i\pi\ln x}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e^{2i\pi\ln n} - \int_{\frac{1}{N}}^1 e^{2i\pi\ln(Nu)}\,\mathrm{d}u \\
&= e^{2i\pi\ln N}\left(\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e^{2i\pi\ln\frac{n}{N}} - \int_{\frac{1}{N}}^1 e^{2i\pi\ln(Nu)}\,\mathrm{d}u\right)
\end{aligned}$$

Or, la fonction f est continue sur $]0,1]$ et bornée sur $[0,1]$, donc elle possède une intégrale de Riemann, vers laquelle convergent la somme de Riemann $\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e^{2i\pi\ln\frac{n}{N}}$ et l'intégrale $\int_{\frac{1}{N}}^1 e^{2i\pi\ln(Nu)}\,\mathrm{d}u$.
Puisque $(e^{2i\pi\ln N})_{N\in\mathbb{N}^*}$ est bornée, la suite $(L_N - I_N)_{N\in\mathbb{N}^*}$ tend vers 0.
(d) <u>Conclusion</u> : D'après (4), la suite $(I_N)_{N\in\mathbb{N}^*}$ ne tend pas vers 0 alors que d'après (6), la suite $(L_N - I_N)_{N\in\mathbb{N}^*}$ tend vers 0, donc la suite $(L_N)_{N\in\mathbb{N}^*}$ ne tend pas vers 0, donc, par le théorème de Bohl, (2 pt.)

$$\boxed{\text{la suite } (\ln N)_{N\in\mathbb{N}^*} \text{ n'est pas équi-répartie modulo } I.}$$

5° **Suites** $(\ln^\alpha(n))_{n\in\mathbb{N}^*}$

(a) Soit $\alpha > 1$. La fonction ψ_α est continue, positive et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]1, +\infty[$; on a : (3 pt.)

$$\forall t \geq 1, \quad \psi'_\alpha(t) = \alpha\,\frac{\ln^{\alpha-1}(t)}{t}, \quad \psi''_\alpha(t) = \alpha\frac{\ln^{\alpha-2}(t)}{t^2}\,(\alpha - 1 - \ln(t))\,.$$

Vu que $\alpha > 1$, cette fonction n'est jamais concave sur $[1, +\infty[$. Cependant, elle l'est sur $\left[e^{\alpha-1}, +\infty\right[$. Notons que pour $1 < \alpha < 2$, ψ'_α n'est pas dérivable en 1, donc ψ_α n'est pas de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[1, +\infty[$. Au voisinage de $+\infty$, on a bien : $\psi'_\alpha(t) = o(1)$ et $t^{-1} = o(\psi'_\alpha(t))$.
Cependant, il est évident que la condition d'être équi-répartie modulo I est une condition asymptotique : elle est vraie pour une suite si et seulement si elle est vraie après avoir changé un nombre fini de termes.
On remarque que la preuve de la question 4° reste valable si on fixe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ et si on remplace la suite $(\varphi(n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ par une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que $a_n = \varphi(n)$ pour tout $n \geq n_0$, où φ est une fonction concave sur $[n_0, +\infty[$, telle que etc.

Pour s'en convaincre pleinement, on va remplacer φ par une fonction $\psi : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ qui coïncide avec φ sur un intervalle $[b, +\infty[$, concave et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[1, +\infty[$.
Ici, on fixe $b = e^{\alpha-1} + 1$: alors $\varphi''(b) < 0$. On définit ψ par :

$$\psi(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{si } x \geq b \\ u(x-b)^2 + v(x-b) + w & \text{si } x < b, \end{cases}$$

où u, v, w sont des réels à déterminer pour que ψ soit $\mathcal{C}^2$ sur $[1, +\infty[$. Pour cela, il est nécessaire et suffisant d'avoir :

$$w = \varphi(b), \quad v = \varphi'(b), \quad 2u = \varphi''(b).$$

Alors, la suite $(\psi(n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ coïncide avec la suite $(\varphi(n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ à partir du rang $[b] + 1$, et on peut lui appliquer les résultats de la question 4°.

Bref :

$$\boxed{\text{pour } \alpha > 1, \text{ la suite } (\ln^\alpha(n))_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est équi-répartie modulo } I.}$$

A présent, soit $\alpha = 1$. On a : $\psi'_1(t) = t^{-1}$ pour $t \geq 1$, donc la fonction ψ'_1 n'est négligeable devant t^{-1} sur aucun voisinage de $+\infty$. On n'a aucun espoir d'appliquer 4°.

(b) Posons, pour $x > 1$: (2 pt.)

$$F(x) = \frac{e^{(2i\pi+1)\ln(x)}}{2i\pi + 1} = \frac{x\,f(x)}{2i\pi + 1}.$$

Il est immédiat de vérifier que F est une primitive de f.

(c) On a, pour $N \in \mathbb{N}^*$: (2 pt.)

$$|I_N| = \left|\frac{1}{N}\int_1^N e^{2i\pi\,\ln x}\,\mathrm{d}x\right| = \left|\frac{1}{N}\left[\frac{x\,f(x)}{2i\pi+1}\right]_1^N\right| = \frac{1}{N}\left|\frac{N\,e^{2i\pi\,\ln N} - 1}{2i\pi + 1}\right| = \frac{1}{|2i\pi+1|}\left|1 - \frac{e^{-2i\pi\,\ln N}}{N}\right|,$$

d'où :

$$\lim_{N\to+\infty} |I_N| = \frac{1}{|2i\pi + 1|} = \frac{1}{\sqrt{4\pi^2 + 1}}. \qquad (4)$$

Noter que la suite $(I_N)_{N\in\mathbb{N}^*}$, elle, n'a pas de limite.
<u>Première méthode</u> : Pour faire se ressembler L_N et I_N, on écrit, pour $N \in \mathbb{N}^*$: (4 pt.)

$$L_N - I_N = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N-1}\left(e^{2i\pi\,\ln n} - \int_n^{n+1} e^{2i\pi\,\ln x}\,\mathrm{d}x\right) + \frac{e^{2i\pi\,\ln N}}{N} \qquad (5)$$

Idée *On va montrer que les termes entre parenthèses tend vers 0 si n tend vers l'infini, et on appliquera le théorème de Cesaro. Concrètement, on calcule l'intégrale grâce à la primitive connue de f, puis on factorise ce qui est grand.*

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose et on calcule :

$$\begin{aligned}
u_n &= e^{2i\pi \ln n} - \int_n^{n+1} e^{2i\pi \ln x}\, \mathrm{d}x \\
&= e^{2i\pi \ln n} - \frac{(n+1)e^{2i\pi \ln(n+1)} - ne^{2i\pi \ln n}}{2i\pi + 1} \\
&= e^{2i\pi \ln n} - \frac{ne^{2i\pi \ln n}}{2i\pi + 1}\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right) e^{2i\pi(\ln(n+1) - \ln n)} - 1\right) \\
&= e^{2i\pi \ln n} - \frac{ne^{2i\pi \ln n}}{2i\pi + 1}\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right) e^{2i\pi \ln(1+\frac{1}{n})} - 1\right) \\
&= e^{2i\pi \ln n} - \frac{ne^{2i\pi \ln n}}{2i\pi + 1}\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right) e^{2i\pi(\frac{1}{n} + o(\frac{1}{n}))} - 1\right) \\
&= e^{2i\pi \ln n} - \frac{ne^{2i\pi \ln n}}{2i\pi + 1}\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{2i\pi}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) - 1\right) \\
&= e^{2i\pi \ln n} - \frac{ne^{2i\pi \ln n}}{2i\pi + 1}\left(\frac{2i\pi + 1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\
&= e^{2i\pi \ln n} o(1),
\end{aligned}$$

ce qui prouve que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$. L'égalité (5) et le théorème de Cesaro entraînent alors que

$$\lim_{N\to+\infty} (L_N - I_N) = 0. \tag{6}$$

<u>Deuxième méthode</u> (d'après J. Nique) (meilleure ?) : On se ramène à une somme de Riemann :

$$\begin{aligned}
L_N - I_N &= \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e^{2i\pi \ln n} - \frac{1}{N}\int_1^N e^{2i\pi \ln x}\, \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e^{2i\pi \ln n} - \int_{\frac{1}{N}}^1 e^{2i\pi \ln(Nu)}\, \mathrm{d}u \\
&= e^{2i\pi \ln N}\left(\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e^{2i\pi \ln \frac{n}{N}} - \int_{\frac{1}{N}}^1 e^{2i\pi \ln(Nu)}\, \mathrm{d}u\right)
\end{aligned}$$

Or, la fonction f est continue sur $]0,1]$ et bornée sur $[0,1]$, donc elle possède une intégrale de Riemann, vers laquelle convergent la somme de Riemann $\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e^{2i\pi \ln \frac{n}{N}}$ et l'intégrale $\int_{\frac{1}{N}}^1 e^{2i\pi \ln(Nu)}\, \mathrm{d}u$.

Puisque $(e^{2i\pi \ln N})_{N\in\mathbb{N}^*}$ est bornée, la suite $(L_N - I_N)_{N\in\mathbb{N}^*}$ tend vers 0.

(d) <u>Conclusion</u> : D'après (4), la suite $(I_N)_{N\in\mathbb{N}^*}$ ne tend pas vers 0 alors que d'après (6), la suite $(L_N - I_N)_{N\in\mathbb{N}^*}$ tend vers 0, donc la suite $(L_N)_{N\in\mathbb{N}^*}$ ne tend pas vers 0, donc, par le théorème de Bohl, (2 pt.)

$$\boxed{\text{la suite } (\ln N)_{N\in\mathbb{N}^*} \text{ n'est pas équi-répartie modulo } I.}$$