Une équation différentielle

Université Claude Bernard–Lyon I
Agrégation interne de Mathématiques : Écrit
Année 2010–2011

Soit k un réel strictement positif. On s'intéresse à l'équation différentielle

$$(C) \qquad y' = e^y - ky \text{ et } y(0) = 1.$$

On peut imaginer que y représente la température d'un récipient où se produit une combustion : le terme exponentiel traduit que la réaction chimique tend à faire augmenter la température ; le terme linéaire exprime les pertes de chaleur.

1. Étudier les variations et le signe de la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $u \mapsto e^u - ku$ selon les valeurs de k. Tracer les graphes possibles.

Soit $y : [0, t_*[$ une solution maximale du problème de Cauchy (C). C'est une fonction dérivable satisfaisant à :

$$\forall t \in [0, t_*[\,, \qquad y'(t) = e^{y(t)} - ky(t) \text{ et } y(0) = 1,$$

et il n'existe pas de fonction satisfaisant aux mêmes conditions sur un intervalle $[0, t_{**}[$ avec $t_{**} > t_*$.

2. Dans cette partie, on suppose que $k > e$. On note y_* et y_{**} les deux antécédents de 0 par g, avec $y_* < y_{**}$.
   (a) Comparer 1, y_* et y_{**}. Déterminer le sens de variations de y sur un voisinage de 0.
   (b) Montrer que pour tout $t \in [0, t_*[$, on a : $y(t) > y_*$.
   (c) Démontrer que pour tout $t \in [0, t_*[$, on a : $y(t) \leq 1$.
   (d) Démontrer que $t_* = +\infty$.
   (e) Démontrer que $\lim_{t\to+\infty} y(t) = y_*$.
   (f) On écrit, au voisinage de y_* : $g(y) = -C(y - y_*) + o(y - y_*)$, où $C = -g'(y_*)$. Démontrer que pour tout $\epsilon > 0$, il existe deux constantes K et K' telles que
   $$\forall t \in [0, +\infty[\,, \quad K'e^{-(C+\varepsilon)t} \leq y(t) \leq Ke^{-(C-\varepsilon)t}.$$
   (g) On écrit, au voisinage de y_* : $g(y) = -C(y - y_*) + O(y - y_*)^2$. Démontrer que pour tout $\epsilon > 0$, il existe deux constantes K et K' telles que
   $$\forall t \in [0, +\infty[\,, \quad K'e^{-Ct} \leq y(t) \leq Ke^{-Ct}.$$
   (h) Dans la modélisation proposée, comment se traduit l'étude précédente ?
3. On suppose que $k < e$. On va démontrer que toute solution maximale explose en temps fini (t_* est fini) et donner un encadrement du temps d'explosion (de t_*).
   (a) Démontrer que y est une bijection de $[0, t_*[$ sur un intervalle que l'on n'essaiera pas nécessairement de préciser.
   (b) Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que
   $$\forall u \in \mathbb{R}^+, \qquad e^u - ku \geq Ce^{u/2}.$$
   (c) En utilisant l'inégalité précédente et une séparation des variables, démontrer que t_* est fini.
   (d) Démontrer l'inégalité $e^y - ky \leq e^y - k$ sur $[0, t_*[$. En déduire que l'on a :
   $$t_* \geq \frac{1}{k} \ln \frac{e}{e-k}.$$
   (e) Comment interpréter les résultats précédents ?

1. La fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dérivable, et même de classe $\mathcal{C}^\infty$, comme somme de l'exponentielle et d'un polynôme. Pour $u \in \mathbb{R}$, on a : $g'(u) = e^u - k$, quantité strictement négative (resp. positive) sur $]-\infty, \ln k[$ (resp. $]\ln k, +\infty[$). Par suite, g est strictement décroissante sur $]-\infty, \ln k]$ et strictement croissante sur $[\ln k, +\infty[$. Le minimum de g vaut : $g(\ln k) = k(1 - \ln k)$. Par suite,
   - si $k > e$, par le théorème des valeurs intermédiaires, g s'annule sur chacun des intervalles $]-\infty, \ln k[$ et $]\ln k, +\infty[$; elle est strictement négative entre zéros et strictement négative en-dehors ;
   - si $k = e$, g s'annule en le seul point $\ln e = 1$, elle est strictement positive ailleurs ;
   - si $k < e$, g est strictement positive sur $\mathbb{R}$.
2. (a) On a : $g(1) = k(1 - \ln k) < 0$, d'où : $y_* < 1 < y_{**}$. En particulier, $y'(0) = g(y(0)) < 0$ et $y' = g \circ y$ est continue donc y' est strictement négative sur un voisinage de 0, si bien que y est strictement décroissante sur ce voisinage.

   (b) Supposons que, pour un certain $t_1 \in [0, t_*[$, on ait : $y(t_1) < y_*$. Alors, par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $t_2 \in [0, t_*[$ tel que $y(t_2) = y_*$. Mais la fonction constante $z!\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto y_*$ est une solution, évidemment maximale, du problème de Cauchy $y' = e^y - ky$ et $y(t_2) = y_*$. Par unicité dans le théorème de Cauchy-Lipschitz, on a donc : $y = z$ sur $[0, t_*[$. Cela contredit la condition initiale $y(0) = 1$. Ainsi, pour tout $t \in [0, t_*[$, on a : $y(t) > y_*$.

   (c) Supposons que pour un certain $t_1 \in [0, t_*[$, on ait : $y(t_1) > 1$. Notons $t_2 = \sup_{\{} t \in [0, t_1],\ y(t) \leq 1\}$. Par définition de la borne supérieure, il existe une suite (t'_n) d'éléments de $[0, t_1]$ qui converge vers t_2 et telle que $y(t'_n) \leq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$; par continuité, on a à la limite : $y(t_2) \leq 1$. Mais alors, puisque $y(t_2) \in]y_*, 1]$, il vient : $y'(t_2) = g(y(t_2)) < 0$. Par continuité de y', y est donc strictement décroissante sur un voisinage $]t_2 - \alpha, t_2 + \alpha[$ de t_2 (on peut choisir $\alpha < t_1 - t_2$). L'inégalité $y(t_2 + \alpha/2) < y(t_2) \leq 1$ contredit la maximalité de t_2. Ainsi, si $t_1 \in [0, t_*[$, $y(t_1) \leq 1$.

   (d) La fonction y est à valeurs dans $]y_*, 1]$, donc $y' = g \circ y$ est strictement négative sur $[0, t_*[$ et y est strictement décroissante sur cet intervalle. Par suite, y admet une limite L en t_* et on a : $y_* \leq L \leq 1$.

   Supposons que l'on ait $t_* < +\infty$. On peut alors prolonger y par continuité en une fonction $\overline{y}$ définie sur $[0, t_*]$. De plus, $y' = g \circ y$ admet une limite en t_*^-, d'où l'on peut déduire par une application classique du théorème des accroissements finis que $\overline{y}$ est dérivable en t_*.

   Or, d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz local, le problème de Cauchy $y' = g(y)$, $y(t_*) = L$ admet une solution sur un voisinage $]t_* - \alpha, t_* + \alpha[$ de t_* ; par unicité, cette solution coïncide avec $\overline{y}$ sur $[0, t_*]$. Ceci contredit la maximalité de la solution y (on a pu la prolonger à $[0, t_* + \alpha[$).

   (e) Des variations de y et g, on déduit que $y'(t) \leq g(L) < 0$ pour tout $t \geq 0$. Supposons que l'on ait $L > y_*$. Il vient alors, par le théorème des accroissements finis : $y(t) \leq g(L)t + 1$. Cela entraîne que y n'est pas minorée, contredisant l'inégalité $y > y_*$ ci-dessus.

   (f) Soit $\varepsilon > 0$. Vu que $y(t)$ tend vers y_*^+ lorsque t tend vers $+\infty$, il existe $T > 0$ tel que, pour $t \geq T$, on ait :

$$-C(y(t) - y_*) - \varepsilon(y(t) - y_*) \leq y'(t) = g(y(t)) \leq -C(y(t) - y_*) + \varepsilon(y(t) - y_*).$$

Il vient alors, pour $t \geq T$:

$$-C - \varepsilon \leq \frac{y'(t)}{y(t) - y_*} \leq -C + \varepsilon,$$

puis par intégration :

$$-(C + \varepsilon \leq)t + D' \frac{y'(t)}{y(t) - y_*} \leq (-C + \varepsilon)t + D,$$

où D et D' sont des réels fixés. En prenant $K' = e^{D'}$ et $K = e^D$, l'inégalité voulue tombe :[1]

$$K' e^{-(C+\varepsilon)t} \leq y(t) \leq K e^{-(C-\varepsilon)t}.$$

(g) Pratiquons une méthode de variation de la constante. Soit z la fonction définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \quad y(t) - y_* = e^{-Ct}\, z(t).$$

On a alors, pour $t \geq 0$:

$$g(y(t)) = y'(t) = -C(y(t) - y_*) + e^{-Ct} z'(t).$$

Puisque g est $\mathcal{C}^2$ au voisinage de y_*, la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 donne l'existence $D > 0$ tel que

$$\forall u \in [y_*, y_* + 1], \quad |g(u) + C(u - y_*)| \leq D(u - y_*)^2.$$

Lorsque t est assez grand pour que $y(t) \in [y_*, y_* + 1]$, on a donc :

$$|z'(t)| \leq e^{Ct} \times D(y(t) - y_*)^2.$$

À présent, on utilise la majoration de la question précédente :

$$|z'(t)| \leq DK^2\, e^{(-C+2\varepsilon)t}.$$

Ayant choisi $\varepsilon < C/2$, on en déduit que la fonction z' est intégrable sur $\mathbb{R}^+$, ce qui permet d'affirmer que la fonction z admet une limite en $+\infty$ (pourquoi ?). Il serait bon de démontrer que cette limite n'est pas nulle.

(h) Lorsque les pertes de chaleur sont assez fortes (i.e. lorsque $k > e$), la température diminue et tend exponentiellement vite vers la constante y_*.

3. (a) Dans cette situation, g est partout strictement positive donc la dérivée $y' = g \circ y$ de toute solution est strictement positive sur son domaine de définition. On en déduit que y est continue et strictement croissante sur $[0, t_*[$ donc que y établit une bijection sur $[0, L[$ où $L = \lim_{t_*} y$.

   Par des raisonnements analogues à d'autres ci-dessus, on montre que $L = +\infty$:
   - si $t_* < +\infty$, alors $L = +\infty$: en effet, si $L < +\infty$, on prolonge y par continuité sur $[O, t_*]$; la fonction prolongée $\overline{y}$ est dérivable ; grâce au théorème local de Cauchy-Lipschitz appliqué à la condition initiale $y(t_*) = L$, on la prolonge sur $[0, t_* + \alpha]$ avec $\alpha > 0$, ce qui contredit la maximalité de la solution y ;

1. Du moins sur $[T, +\infty[$. On passe à $\mathbb{R}^+$ en constatant que les fonctions $t \mapsto y(t)/e^{-(C\pm\varepsilon)t}$ sont bornées sur $[T, +\infty[$ et continues sur $\mathbb{R}^+$ donc bornées sur $\mathbb{R}^+$.

– si $t_* = +\infty$, alors $L = +\infty$: en effet, si $C = g(\ln k)$ est le minimum de g sur $\mathbb{R}$, on a par le théorème des accroissements finis : $g(t) \geq Ct + 1$ pour tout $t \geq 0$.

(b) La fonction $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $u \mapsto g(u)e^{-u/2} = (e^u - ku)e^{-u/2}$ est continue et tend vers $+\infty$ lorsque u tend vers $+\infty$ donc elle est minorée et atteint son minimum C. Ce minimum est strictement positif car $g > 0$ sur $\mathbb{R}$.

(c) On en déduit donc, pour tout $t \leq t_*$:

$$1 \leq \frac{y'(t)}{e^{y(t)} - ky(t)} \leq \frac{e^{-y(t)/2}}{C} y'(t),$$

d'où par intégration et le changement de variable $u = y(t)$:

$$t - 0 \leq \frac{1}{C} \int_0^t e^{-(y(s)/2} y'(s) \mathrm{d}s = \int_1^{y(t)} e^{-u/2} \mathrm{d}u = \frac{e^{-1/2} - e^{-y(t)/2}}{C}.$$

La quantité à droite est majorée par $e^{-1/2}/C$, si bien que l'on a : $t_* \leq e^{-1/2}/C$.

(d) L'inégalité $e^y - ky \leq e^y - k$ résulte du fait que y est croissante. Comme ci-dessus, on a pour tout $t \leq t_*$:

$$1 = \frac{y'(t)}{e^{y(t)} - ky(t)} \geq \frac{y'(t)}{e^{y(t)} - k}.$$

Il en résulte, par intégration et changements de variable $u = y(t)$ et $v = e^u$:

$$t - 0 \geq \int_0^t \frac{y'(s) \mathrm{d}s}{e^{y(s)} - k} = \int_1^{y(t)} \frac{\mathrm{d}u}{e^u - k}.$$

Lorsque t tend vers t_*, $y(t)$ tend vers $+\infty$, ce qui donne :

$$t_* \geq \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{e^u - k} = \int_e^{+\infty} \frac{\mathrm{d}v}{v(v-k)}$$

(on a posé $v = e^u$). Le calcul de cette intégrale est sans problème en décomposant en éléments simples :

$$\int_e^{+\infty} \frac{\mathrm{d}v}{v(v-k)} = \frac{1}{k} \int_e^{+\infty} \left(\frac{1}{v-k} - \frac{1}{v} \right) \mathrm{d}v = \frac{1}{k} \left[\ln \frac{v-k}{v} \right]_e^{+\infty}.$$

En utilisant le fait que $\lim_{V \to +\infty} \ln(V-k)/V = 0$, il vient enfin :

$$t_* \geq \frac{1}{k} \ln \frac{e}{e-k}.$$

(e) En mots, on voit que la température $y(t)$ finit par exploser en temps fini ($t_* < +\infty$). Lorsque k est inférieur à e mais proche de e, le temps d'explosion t_* peut être très grand (il tend vers $+\infty$ lorsque $k \to e^-$).

C'est un phénomène de ce type qui se serait produit à Seveso : les processus de refroidissement sont passés un peu en dessous du seuil critique (ce qui correspond à faire passer k légèrement au-dessous de e dans notre modèle-bébé), tout a semblé normal jusqu'à ce que le processus s'emballe, conduisant à une explosion catastrophique.