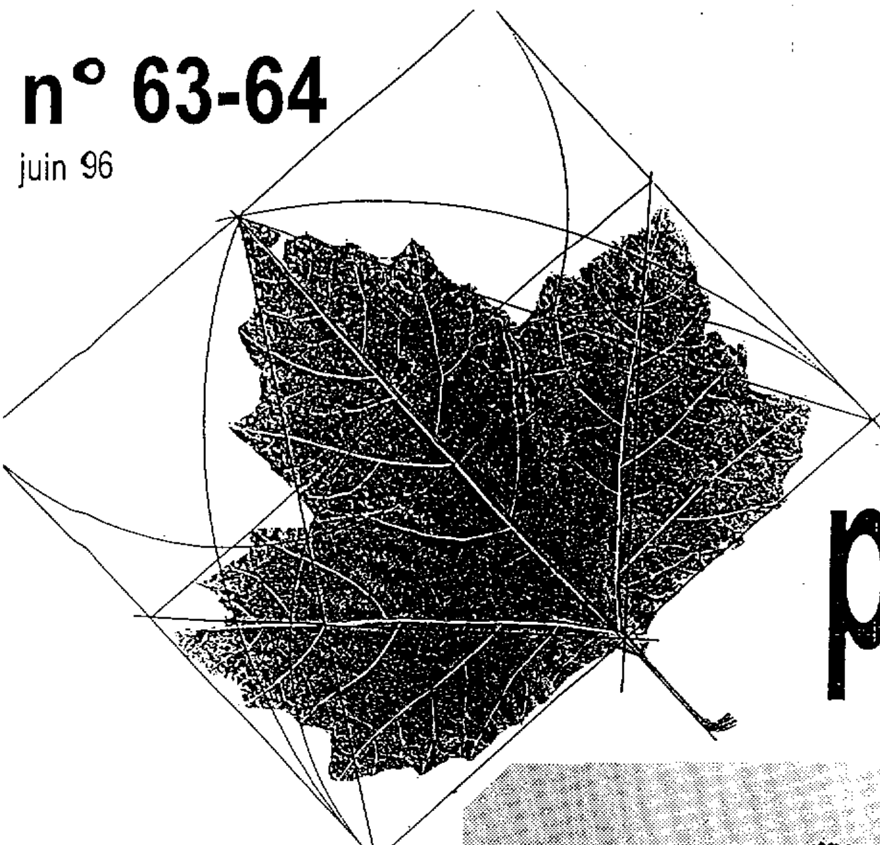
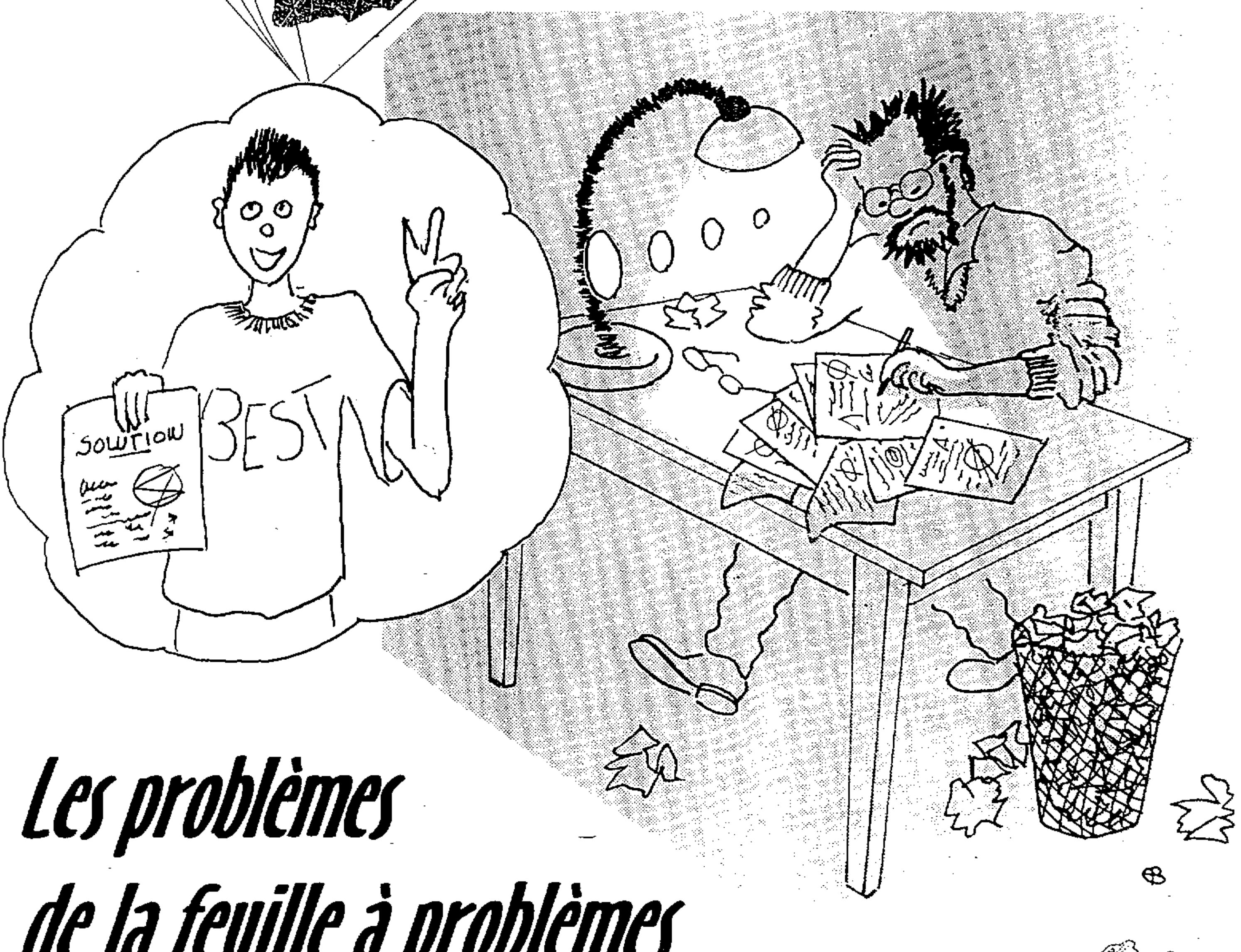
n° 63-64

juin 96

La feuille à problèmes





Les problèmes de la feuille à problèmes

ACADEMIE DE LYON *Université Claude Bernard* LYON 1

INSTITUT DE RECHERCHE POUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES

Éditorial

Je voudrais tout d'abord présenter mes excuses à tous les abonnés pour les avoir laissés si longtemps sans nouvelles. Pourquoi un temps aussi long depuis la parution du précédent numéro? Eh bien tout simplement parce que la feuille à problèmes est tombée en panne faute d'articles pour l'alimenter et d'énergie (de flamme? d'envie?) de la part de l'équipe de rédaction pour la maintenir en vie. Il y a besoin de sang neuf pour lui insuffler une nouvelle vigueur. Si vous pensez pouvoir en apporter et si vous souhaitez que la feuille à problèmes continue alors n'hésitez pas à nous contacter.
Ce numéro est double. Il reprend tous les énoncés de problèmes parus depuis le n°1. Nous ferons ensuite un numéro double avec les corrigés qui nous ont été envoyés et un autre avec tous les articles **"dans nos classes"** qui sont principalement des compte rendus de pratique de problèmes ouverts dans la classe. Et après ....?

La feuille à problèmes est née par la volonté et le travail d'une équipe (l' équipe du problème ouvert de l'Irem de Lyon) qui souhaitait faire partager son enthousiasme pour une pratique innovante : "la pratique du problème ouvert"[1]. L'objectif principal de cette pratique étant de mettre les élèves en situation de chercher en classe un "vrai problème" de mathématique (que nous avons appelé **"problème ouvert"**) et de confronter leur proposition de solution.

Cette feuille se proposait d'être un moyen d'aide pour les enseignants désireux d'utiliser cette pratique et d'échange entre les professeurs l'ayant déjà utilisée pour la faire vivre et évoluer. D'où les deux rubriques principales qui la constitue : des énoncés (et des propositions de solution) de problèmes de type ouvert et des comptes rendus d'utilisation en classe de ce type de problèmes
La dynamique, créée autour de cette pratique il y a maintenant plus de 10 ans et qui s'est traduite, en particulier pour la feuille à problèmes, par la fourniture par les lecteurs d'articles pour les deux rubriques ci-dessus cités, est aujourd'hui retombée.
Mais le feu couve encore sous la cendre ! Il y a toujours à l'IREM de Lyon (et surement dans d'autres IREM) des formateurs qui se passionnent pour le problème surtout s'il est "dérangeant"ou s'il est long[2]. Pour preuve le colloque-rallye sur le problème organisé par notre IREM au mois de décembre 1996. Ce sera peut être l'occasion de ranimer la flamme et de relancer la feuille à problèmes !

je vous souhaite bonne réception de ce numéro double et Robert Lhomme et moi attendons vos réactions.

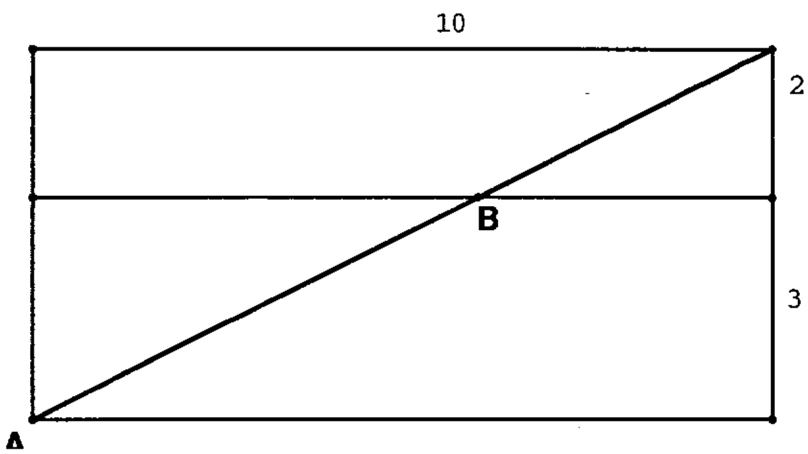
Gilles Germain
reponsable de la feuille à problèmes

---

1 la brochure "problème ouvert et situation problème" publiée par l'Irem de Lyon présente cette pratique de manière détaillée.
2 "Les problèmes qui dérangent" est le titre d'un stage proposé par l'IREM de Lyon au catalogue du PAF et les problèmes longs sont produits et expérimentés dans des classes de 1ére S par le groupe de recherche-action "calcul formel" .

LES ENONCES DES PROBLÈMES DE LA FEUILLE À PROBLÈME

1 Le rectangle d'euclide



Déterminer AB ?

2 Petit calcul

Trouver les entiers n et m tels que :

$$n^{17} + m^{17} = 232\ 632\ 643\ 127\ 370$$
$$n^{13} - m^{13} = 96\ 887\ 416\ 084$$

3 Dépasser 1000 sans plus

Quel est le plus petit entier n tel que :

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots\dots + \frac{1}{n} > 1000\ ?$$

4 Anneaux

Déterminer tous les anneaux unitaires de $\mathbb{Q}$.

5 Alignement

ABC est un triangle. La droite D coupe BC, AC, AB respectivement en P, Q, R. On construit les trois parallélogrammes AQA'R, BPB'R, CQC'P. Démontrer que A', B', C' sont alignés.

6 Tout simplement

Que vaut : $\cos\left(\frac{p}{15}\right) \times \cos\left(\frac{2p}{15}\right) \times \ldots\ldots\ldots \times \cos\left(\frac{7p}{15}\right)$?

7 Trouver K

Trouver les nombres réels k pour lesquels il existe une fonction continue
$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(f(x)) = k\,x^9$

8 Premier ou pas

$2^{(2^{11})} + 1$ est-il un nombre premier?

9 le plus grand entier

Quel est le plus grand entier positif qui ne puisse pas s'écrire 15a+21b+35c où a, b, c sont des entiers positifs ?
Lemme : Soit p et q premiers entre eux; le plus grand entier qui n'est pas de la forme ap+bq est (p-1)(q-1)-1.

10 Invasion des 1

On constate que

$$6^2 - 5^2 = 11$$
$$56^2 - 45^2 = 1111$$
$$556^2 - 445^2 = 111111$$
$$5556^2 - 4445^2 = 11111111$$

Existent-ils d'autres couples de nombres ayant cette propriété. Peut-on les trouver tous ?

11 Somme et demi-somme

Soit $S_n = \{1,2,3,\ldots,n\}$ l'ensemble des n premiers nombres entiers. Trouver les entiers n pour lesquels on peut partager S_n en deux sous-ensembles de nombres ayant la même somme.
Exemple : Pour n=7, $S_7 = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ peut-être partagé en $\{1,6,7\} et \{2,3,4,5\}$ avec 1+6+7=2+3+4+5

12 Suite

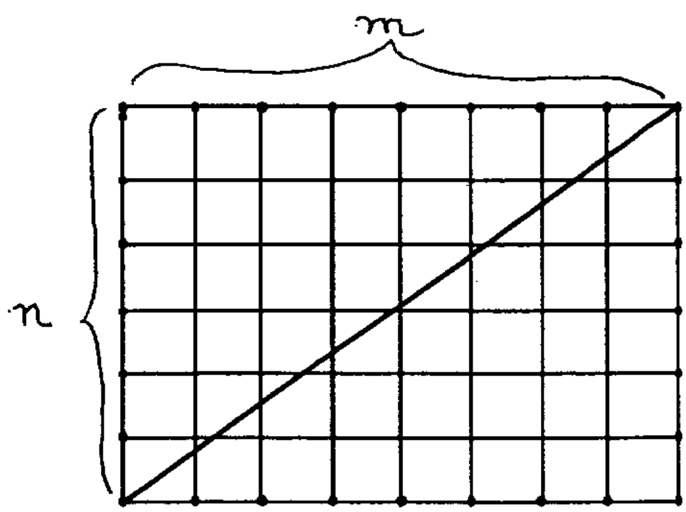
α est un réel, p un naturel. Existe-t-il des fonctions f telles que la suite $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $u_0 = \alpha$ soit périodique de période p, c'est-à-dire, quel que soit le naturel n, $u_{n+p} = u_n$

13 Des nombres divisibles par 13

1417 est divisible par 13 ; 417001 est aussi divisible par 13.
Chercher les nombres divisibles par 13 qui possèdent la même propriété : à partir d' un nombre divisible par 13, on fabrique un deuxième nombre en plassant son chiffre le plus à gauche à droite du nombre (1417→4171) et en intercallant dans le nouveau nombre ainsi obtenu deux zéro entre le chiffre des unités et celui des dizaines (4171→417001) Ce deuxième nombre doit être aussi divisible par 13.

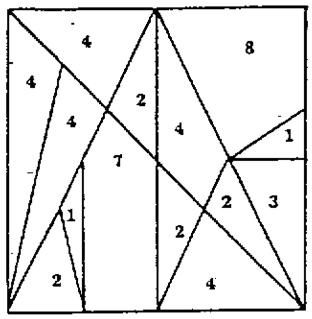
14 Le rectangle et sa diagonale.

Un rectangle dont les côtés mesurent respectivement m et n unités de longueur (m et n entiers) est subdivisé en carrés de côtés unité.



Quel est le nombre de carrés traversés par la diagonale ?

15 Le Loculus d'Archimède (3ème Siècle av. JC)



Le nombre figurant dans chaque parcelle représente son aire.
Retrouver les calculs d'Archimède.

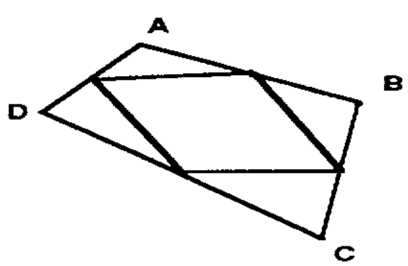
16 Bijection

Trouver toutes les bijections continues f de $[0,1]$ dans $[0,1]$ telles que $f(2x - f(x)) = x$ pour tout $x \in [0,1]$

17 Rever

Les nombres palindromiques : ce sont des nombres dont les chiffres équidistants des extrêmes sont égaux. Par exemple : 626, 21412, 111 etc...
Soit le nombre 216. Si on inverse l'ordre de ces chiffres et on ajoute, on obtient :
216 + 612 = 828 qui est un nombre palindromique. Pour le nombre 154 cela donne
154 + 451 = 605 qui n'est pas palindromique; par contre si l'on recommence
605 + 506 = 1111 qui est palindromique Cela arrive-t-il toujours? Cherchez !
- Les nombres palindromiques sont-ils multiples de 11 ?
- Le nombre palindromique 828 est la somme de 216 et de 612. Peut-on toujours écrire un nombre palindromique comme somme d'un nombre et de son nombre renversé ?

18 Varignon et sa suite



Soit A, B, C, D, quatre points non alignés trois à trois. Montrer que les milieux des segments [AB], [BC], [CD], [DA] sont les sommets d'un parallélogramme.
A quelle condition obtient-on :
-un rectangle ?
- un losange ?
- un carré ?

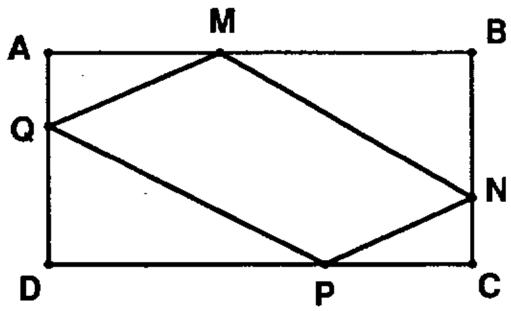
19 13 inconnues pour une unité

Existe-t-il 13 nombres entiers positifs et distincts x_1, x_2, ...,x_{13} tels que l'on ait l'égalité :

$$1=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+...+\frac{1}{x_{13}}$$

20 Le napperon et la table rectangulaire?

On veut placer sur une table rectangulaire ABCD un napperon ayant la forme d'un quadrilatère MNPQ, le sommet M étant sur le bord AB de la table, N sur BC, P sur CD et Q sur AD. On veut que la surface du napperon soit égale à la moitié de celle de la table. Chercher des conditions sur MNPQ pour qu'il en soit ainsi.



21 Recherche ensemble de points du plan

Trouver dans le plan l'ensemble des points (x,y) tels que
$[x]^2 + [y]^2 = 4$ ($[\alpha]$ désigne la partie entière du nombre réel α).

22 Cible et triangle

Etant donné trois cercles concentriques, construire un triangle équilatéral ayant un sommet sur chacun des cercles.

23 Suite(suite)

Soit a_0 un nombre réel tel que $0\langle a_0\langle\pi$; on pose $a_{n+1}=\sin a_n$ pour $n\geq 0$. Etudier la suite de terme général $u_n=\sqrt{n}*a_n$

24 Et cette année ?

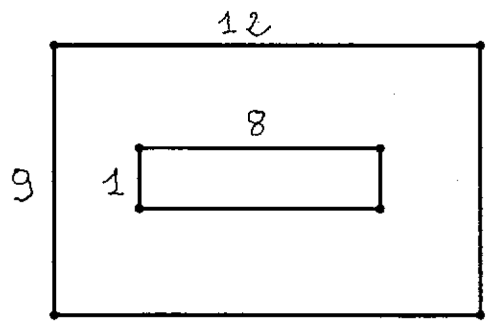
On écrit le nombre $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^{1982}$ dans le système décimal. Déterminer les deux chiffres qui se trouvent de part et d'autre de la virgule.

25 Aplusbégalx

a = 0,8888888888..........
b = 0,12345678910111213........
Effectuer la somme a + b

26 Découper sans se mouiller

On veut recouvrir le sol d'une salle dont voici le plan, avec un morceau de moquette de 10 m sur 10 m. Au milieu de la salle se trouve un aquarium qui ne doit pas être recouvert. Peut-on le faire en découpant le carré de moquette en deux morceaux ?



27 Point commun aux droites (αβ) ?

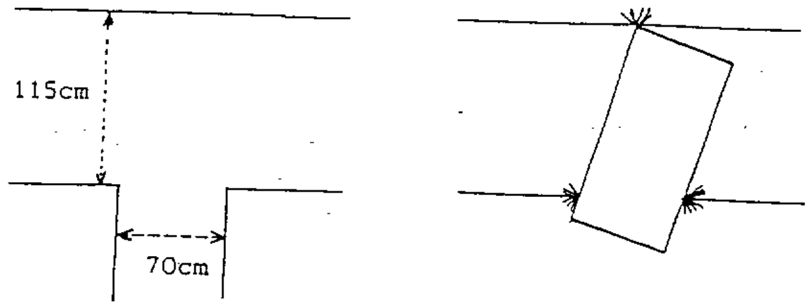
Δ, Δ', Δ" sont trois droites concourantes en O. A et B sont deux points distincts n'appartenant pas à aucune des droites. M décrit Δ, MA ∩ Δ' = α, MB ∩ Δ" = β.
Que peut-on dire de la droite (αβ) quand M varie ?

28 A la recherche de fonctions qui.....

28) Trouver toutes les fonctions de IR dans IR qui vérifient

$$| x - y | < | y - z | \Rightarrow | f(x) - f(y) | < | f(y) - f(z) | \text{ pour tout } x, y, z$$

29 Le déménageur



Passera ou ne passera pas?
Dimensions du meuble 0,65m par 1,25m.

(D'après Dimathème 2ème)

30 Encore une suite récurrente d'entiers

On définit par récurrence la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ par :

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = \frac{1}{n}(1 + a_1^2 + \ldots + a_n^2) \end{cases}$$

Les nombres a_n sont-ils tous entiers?

31 Construction de cercles

On donne trois cercles de même rayon. Construire un cercle tangent à ces trois cercles et les contenant.

32 De Drôles de sommes

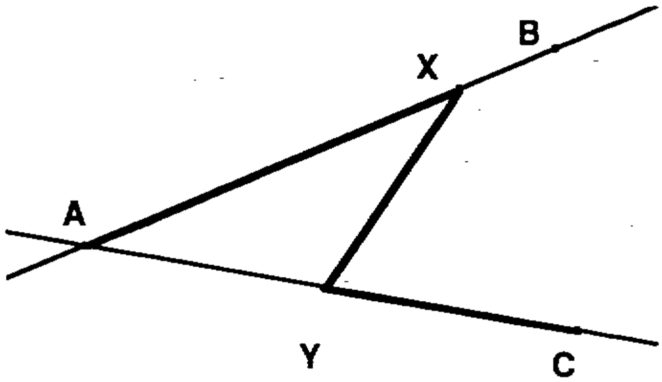
On définit :

$$S_3 = \{1 + a + a^2, a \in IN, a \geq 2\}$$
$$S_4 = \{1 + a + a^2 + a^3, a \in IN, a \geq 2\}$$
$$S_5 = \{1 + a + a^2 + a^3 + a^4, a \in IN, a \geq 2\}$$

Déterminer $S_3 \cap S_4$ et $S_3 \cap S_5$.

33 Un zigzag aux branches égales

Soit A, B, C, trois points non alignés. Construire un point X sur la droite AB et un point Y sur la droite AC, distinct de A, tels que: AX = XY = YC



34 Quel point A' produit le plus grand LM ?

Soit ABC un triangle quelconque. Soit A' un point quelconque distinct de A, B, et C. Soit L et M les projections orthogonales de A respectivement sur (A'B) et (A'C).
Où placer A' pour que LM soit maximum ?

35 Une suite pour l'entier n ça existe ?

Etant donné un entier naturel n est-il possible de trouver une suite d'entiers $(a_i)_p$ telle que :
$0 \leq a_1 \leq 1$
$0 \leq a_2 \leq 2$
.
.
$0 \leq a_p \leq p$
et telle que : $n = a_1 \times 1! + a_2 \times 2! + ... + a_p \times p!$

36 Le calcul des très forts

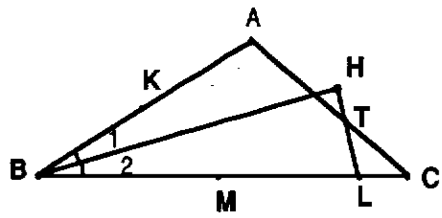
Soit a = 0,123456789101112131 4.....
Déterminer 8a.

37 A vos calculettes

Comparer les nombres $\frac{665857}{470832}$ et $\sqrt{2}$

38 T milieu ou pas ?

Hypothèses :
$AB\langle BC$
K milieu de [A, B]
M milieu de [B,C]
$\hat{B}_1 = \hat{B}_2$
ML = KA
LH ⊥ BH
T est-il le milieu de [A,C] ?



39 Des nombres premiers producteurs de nombres premiers

Déterminer les nombres premiers p tels que pour tous les naturels n < p, $n^2 - n + p$ soit un nombre premier.

40 un carré sous contraintes

3) Soit A, B, C et D, quatre points alignés, construire un carré dont deux côtés opposés passent par A et B et les deux autres par C et D. (Côté ici est pris au sens de droite). (Hungarian Pb Book)

41 Sortez les radicaux

Trouver un polynome à coefficients entiers admettant $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ comme racine.

42 Une calculatrice tordue

On dispose d'une calculatrice ne sachant effectuer sur les réels que l'opération $a*b = 1 - \frac{a}{b}$ Peut-on à l'aide de cette calculatrice, effectuer les quatre opérations classiques ?

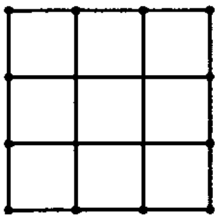
Rallye de Bretagne

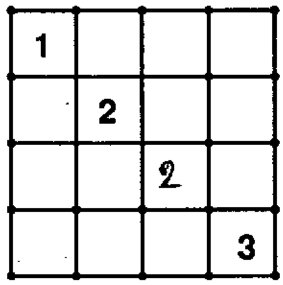
43 La capture de n points par un disque minimum

Etant donné n points dans un plan, peut-on toujours construire un disque les contenant dont le rayon soit minimum?
Le petit Archimède

44 Carré latin

Rappel : Un "carré latin" est fabriqué de la manière suivante : on se donne un carré à n x n cases (sur le dessin de gauche ci-dessous n = 3) et n nombres deux à deux distincts et on écrit un de ces n nombres dans chacune des n^2 cases de manière que le même nombre n'apparaisse jamais deux fois dans la même ligne ou la même colonne.





On se donne un carré à n^2 cases et n nombres (pas nécessairement distincts) que l'on range sur une diagonale. (Exemple dessin à droite ci-dessus avec n = 4).
Est-il possible de compléter le carré (c'est-à-dire écrire un nombre dans chaque case vide) de manière à obtenir un carré latin?

45 1 x (-1) = - 1

Les figures ci-dessus sont construites de la manière suivante : on se donne une suite finie de nombres tous égaux à +1 ou -1. Ensuite, en dessous de deux nombres consécutifs, on écrit leur produit. Puis on recommence, jusqu'à tomber sur un seul nombre.

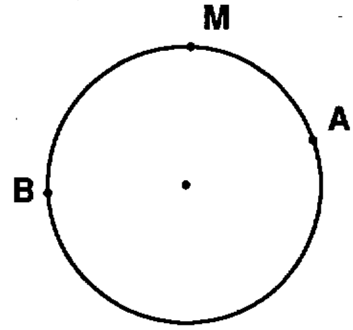
```
1   -1   +1   1
  -1   -1   +1
    +1   -1
       -1
```

```
1   1   -1   1   -1
  1   -1   -1   -1
   -1   1   1
     -1   1
       -1
```

Comment faut-il choisir la première ligne pour que le nombre de 1 écrits soit égal au nombre de -1 ?

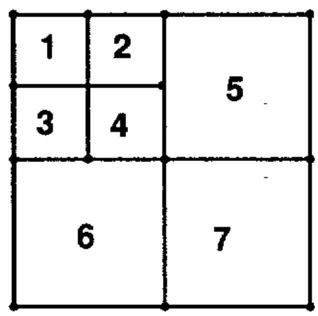
46 Extremum sur un cercle

A et B sont donnés. Où placer M pour que MA + MB soit maximum?



47 Décomposer un carré en n carrés

Déterminer les entiers n pour lesquels il est possible de partager un carré en n carrés (pas forcément de même aire).
Exemple : c'est possible pour n = 7



48 3 suites récurrentes

On donne 3 nombres réels x_0, y_0, z_0 et on défini par récurrence 3 suites x_n, y_n, z_n par :
$x_{n+1} = |y_n - z_n|$, $y_{n+1} = |z_n - x_n|$, $z_{n+1} = |x_n - y_n|$. Etudier ces trois suites.

49 Le problème des parties

Un problème ouvert au XVème Siècle, (Fermé au XVIIème Siècle)

Vous savez sans doute que Pascal est souvent considéré (avec Fermat) comme le véritable créateur du calcul des probabilités, malgré quelques précursseurs dont le plus connu est Cardan. La célébrité de Pascal dans ce domaine est due au fait qu'il a été le premier à résoudre le "problème des partis" posé dès le XVème Siècle. En voici l'énoncé :

Deux joueurs s'affrontent à un jeu dont la règle très simple est la suivante : ils jouent des parties successives d'un même jeu à deux issues équiprobables (par exemple à pile ou face, ou aux dés) et le premier des deux qui a gagné n parties, où n est un nombre convenu à l'avance, a gagné le jeu : c'est une règle voisine du tennis actuel où $n = 3$ ou 5, le jeu à deux issues étant le jeu d'un set (pas toujours équiprobable).
Le problème des partis est le suivant: les joueurs ont pour enjeu une somme d'argent x. Un événement extérieur les oblige à interrompre le jeu alors que le premier joueur a gagné p parties et le second q. Comment doivent-ils se partager l'enjeu?
Seriez-vous capable, sans vous jeter sur un livre d'histoire des Mathématiques, de résoudre ce problème, comme Pascal le fit?

50 Trouver 2 entiers connaissant le quotient

Sur l'écran de votre calculatrice est affiché un nombre inférieur à 1, écrit sous forme décimale et ayant autant de chiffres que votre calculatrice peut en afficher. Sachant que ce nombre est le résultat de la division avec votre calculatice de deux nombres entiers plus petits que 1000, retrouver ces deux nombres. Quels sont ces deux nombres si le nombre lu sur votre calculatice est : 0.2653508772 ? (calculatrice affichant 10 chiffres)
Essayer avec d'autres exemples! Peut-on se donner le nombre affiché en choisissant ses chiffres "au hasard" ?

51 Sommes d'entiers consécutifs

Quel est l'ensemble des entiers qui sont somme d'au moins deux entiers consécutifs?

52 Règles pour trouver une période

On sait que tout nombre rationnel $\frac{p}{q}$ (où p et q sont des entiers strictement positifs) s'écrit sous forme d'un développement décimal périodique.
<u>Question</u> : Déterminer expérimentalement à l'aide de la calculette des règles permettant de prévoir, dans certaines limites, la période en fonction de p et q?
(L'énoncé et la démonstration de ces règles sont classiques. L'intérêt est ici dans leur découverte expérimentale rapide à l'aide de la calculette. Cette activité est sans doute proposable à des élèves de collèges).

53 Boules de neige ou boules de suif ?

Voici une situation qui est paraît-il classique pour les statisticiens, mais qui ne semble pas du tout classique pour les autres mathématiciens :

On dispose d'une urne dans laquelle se trouvent au départ une boule blanche et une boule noire. On répète indéfiniment l'expérience suivante : tirer une boule, regarder sa couleur, puis la remettre en rajoutant une de la même couleur.
Question : Comment évolue la proportion des boules noires et blanches dans l'urne?
Si vous posez la question à plusieurs de vos collègues (pas nécessairement mathématiciens), vous aurez sans doute comme moi le plaisir et la surprise de constater que les réponses intuitives divergent.
Après avoir pris tout votre temps pour réfléchir, je vous suggère de simuler l'expérience sur une calculette programmable ou un mini-ordinateur. Il vous faudra pour cela utiliser des "nombres aléatoires". De deux choses l'une :
* ou bien votre appareil possède un générateur de nombres aléatoires (il s'agit en général de nombres équirépartis entre 0 et 1),
* ou bien, il n'en possède pas. Alors par exemple, la formule (cf. manuel d'application de la HP 34)
a_{n+1} = partie décimale de $(9821 \times a_n + 0{,}211327)$
fournit par récurrence à partir de la donnée de $a_0 \in]0;1[$ arbitraire une suite de nombre équirépartis entre 0 et 1.
A l'aide de ces nombres aléatoires, vous pouvez écrire un programme simulant l'expérience proposée comme aussi bien du reste toute expérience de tirages aléatoires.

Gilbert ARSAC

53 Naturellement

On considère $a \in N^+$ et la suite a_n définie par $a_0 = 0$ et

$$a_{n+1} = (a+1)a_n + (a_n + 1)a + 2(a(a+1)a_n(a_n+1))$$

Montrer que, pour tout n, $a_n \in N$.

Noureddine TAOUFIQ, Professeur de mathématiques.
Lycée Hassan II, SAFI - MAROC.

54 Baldaquin

Etudier l'aire de l'ombre d'un losange.

EL BACHIR MEJDOUBI - B.P 136 - KAEDI - Mauritanie

55 Renversant !

Trouver les entiers de trois chiffres qui vérifient la propriété suivante :
$\overline{abc} + \overline{def} = \overline{cba} + \overline{fed}$
Généraliser.

EL BACHIR MEJDOUBI - P.B 136 - KAEDI - Mauritanie

56 Le juste bond !

Une sauterelle se déplace uniquement par bonds de longueur constante.
Quelles possibilités a-t-elle d'aller d'un point A donné à un point B donné en trois bonds exactement? (second cycle)

57 Un triangle entièrement équilatéral

Est-il possible que dans un repère orthonormé du plan les six coordonnées des trois sommets d'un triangle équilatéral soient toutes entières?
(second cycle) (envoyé par M. FERREOL -PARIS)

58 Nombre de diviseurs d'1 nombre. Comment le trouver ?

"18 a six diviseurs. Trouver une règle permettant de donner le nombre de diviseurs de n'importe quel naturel non nul".

59 Points de vue

Soit trois points A, B et C distincts.
Quel est l'ensemble des points M du plan tels que AMB = BMC ?

envoyé par M. FERREOL - PARIS

60 Mini produit de 2 sommes

Soit n un entier naturel non nul. Quel est la plus petite valeur, pour $(a_1, ..., a_n) \in R^n$ de

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}\right)?$$

(à partir de la première S)

MEDJOUBI EL BACHIR, - KAEDI - Mauritanie.

61 Le meilleur

Soit a un nombre réel donné. Parmi toutes les suites finies (x_i) telles que
$x_1 + ... + x_n = a$, y en a-t-il une telle que le produit des x_i soit maximum?
(Terminale C ou Première année après bac)

62 L'escalier infernal

On peut monter un escalier marche par marche ou deux marches par deux marches ou beaucoup d'autres façons.
De combien de façons peut-on monter un escalier de 13 marches?
(problème ouvert, pour un niveau à déterminer, relativement élémentaire dans sa solution).

63 J'en reprendrais bien un doigt !

En commençant à compter les doigts de la main en partant de l'auriculaire, suivi de l'annulaire, du majeur, de l'index, du pouce puis de l'index ... et ainsi de suite en faisant le va et vient.
Peux- tu dire à quel doigt correspond un entier donné?
(M. EL GDANI Brahim - Safi - Maroc)

64 Enigme codée

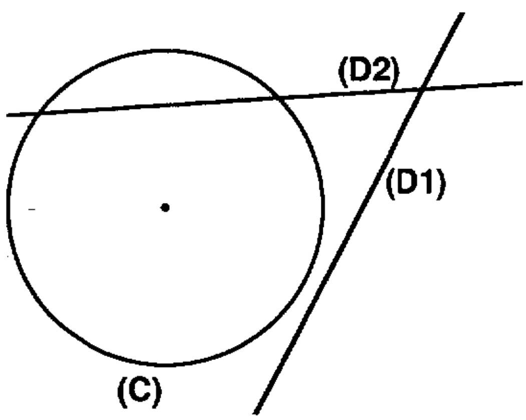
$(DIX)^2 + (UN)^2 = CENTUN$ Chaque lettre représentant un chiffre de 0 à 9 (et un seul), trouver à l'aide de cette égalité la valeur de chaque lettre.

65 Figure imposée

Trouver quatre points A, B, C, D distincts tels que les longueurs des six segments définis par ces quatre points soient égales à deux nombres donnés.(A partir de la seconde ...)

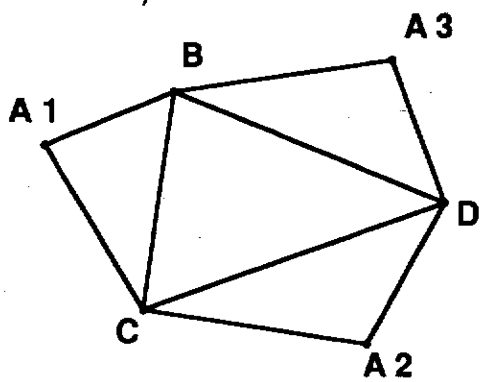
66 Ne tournez pas en rond !

Construire un point sur le cercle dont la somme des distances aux deux droites soit minimale.



67 Oui patron, bien patron... à vos ordres patron !

Sur chacun des côté d'un triangle BCD et à l'extérieur, on construit un triangle (cf. figure). A quelles conditions la figure ainsi obtenue est-elle le patron d'un tétraèdre de base BCD? (voir figure page suivante)



(seconde, si on le prend comme un problème de géométrie dans l'espace, mais, à un niveau plus élémentaire, il peut donner lieu à des découpages, pliages, etc.)

68 Pas drôle !

On donne un triangle ABC et un point M, comparer la somme des distances de M aux sommets du triangle au double de la somme des distances de M aux côtés du triangle

D. SARGENT, Lyon

69 Des parallèlogrammes et leurs aires

a)- Soit P_A P_B P_C 3 parallélogrammes construits sur les 3 côtés d'un triangle ABC (P_A sur BC, etc. ...), d'aires respectives $\sum_A$, $\sum_B$, $\sum_C$. A quelle condition a-t-on

$\sum_A = \sum_B + \sum_C$?

(2ème théorème de Pappus).

b- A titre d'application, vous aurez la joie de retrouver le théorème de Pythagore.

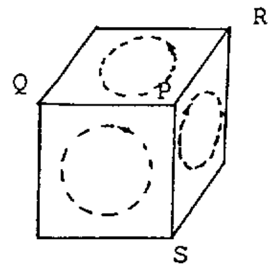
G. EYMARD, Lyon.

70 Devinette

Alexandre pense à trois nombres - Si on les ajoute deux à deux on trouve 38, 44 et 52. Le plus grand des trois nombres est :
(A) 31 (B) 28 (C) 24 (D) 29 (E) 27

71 Fourmis contestataires

Sur chaque face d'un cube suspendu on place une fourmi. Chacune fait le tour de la face sur laquelle elle est placée en longeant ses arêtes. Une arête est dite "cintestés" si deux fourmis la parcourent en sens contraire. Par exemple sur le dessin, PQ est contestée, alors que PR ne l'est pas. Le nombre minimum d'arêtes contestées est :
(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6



72 C'a tourne (part) au quart de tour

Combien de fois par jour les deux aiguilles d'une montre forment-elles un angle droit?
(A) 46 (B) 22 (C) 24 (D) 44 (E) 48

Les problèmes 70, 71 et 72 proviennent du concours australien de mathématiques, niveau 4ème, 5ème.

73 Tous les coups sont permis

On considère la fonction $\theta(x) = |\sin x.\sin(\cos x)|$
En trouver une majoration, la meilleure possible, par quelque moyen que ce soit.
(Terminale, 1ère)

74 Mettons un peu d'ordre

Soient 4 nombres entiers a, b, c, d. On ordonne ces nombres de façon à obtenir des entiers positifs en calculant leurs différences deux à deux. On obtient ainsi 6 nombres entiers. Quels sont les choix de a, b, c, d pour lesquels ces 6 nombres sont 1, 2, 3, 4, 5, 6? (troisième, seconde)

75 Pour s'amuser

On considère $\alpha_0 \in]0,1[$ et irrationnel. Il existe un seul nombre entier k tel que $(k-1)\alpha_0 \langle 1 \langle k\alpha_0$. On pose $\alpha_1 = k\alpha_0 - 1$. Alors α_1 a les mêmes propriétés que α_0, on peut donc réappliquer le même procédé à α_1 et définir une suite par récurrence : $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 ...$
Etudier cette suite.

pour s'amuser

76 Pionniers paresseux

Trois pionniers se sont installés dans la brousse en A, B, C (A, B, C sont supposés non alignés).
Ils veulent établir un moyen de communication entre leurs établissements en construisant la plus petite longueur de piste possible. Comment procéderont-ils?

77 Emballez, c'est pesé ! ou (La ficelle lyonnaise)

Problème de la ficelle
Supposons qu'une très grande ficelle fasse le tour de la terre (qu'on imagine parfaitement sphérique). On allonge la ficelle de 1 m et on la soulève au-dessus du sol uniformément. A quelle hauteur au-dessus du sol se trouvera -t-elle?
Variante : si on élève la ficelle de 1 m au-dessus du sol, de combien faudra-t-il l'allonger?

78 Top Chrono !

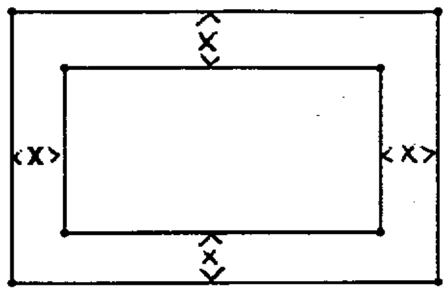
Pouvez-vous en quelques secondes décider si l'égalité
$7846^{2359637} + 5927^{2359637} = 8136^{2359637}$ est fausse?

79 C'est un jeu d'enfant

On a offert au jeune Balthazar un jeu de cubes. Il essaie de les juxtaposer en carré, mais il lui en manque 7. Il tente alors un carré plus petit, il en a 10 en trop.
Combien Balthazar a-t-il de cubes?

80 Partage d'héritage

Deux frères se partagent également un terrain rectangulaire de 2000m sur 1000m. L'un veut planter du maïs, l'autre des mirabelliers, ils décident donc de le partager de la façon suivante :



Quelle sera la longueur de la bande?
Quelle construction géométrique simple fournit la solution?

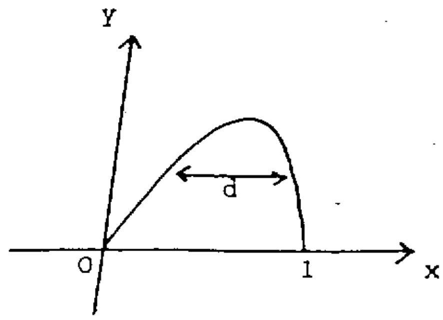
Les deux énoncés 78 et 79 ont été proposés par Maryvonne LEBERRE

81 Avoir plusieurs cordes à son arc

Problème des "cordes universelles"

Soit f une fonction continue sur $[0,1]$, telle que $f(0) = f(1)$.

On appelle corde de f tout réel d tel qu' il existe $x \in [0,1]$ vérifiant $f(x) = f(x+d)$. Trouver les "cordes universelles" c'est-à-dire les réels d qui sont cordes pour toutes les fonctions f du type considéré.



Remarque : Le nom de corde provient évidemment du fait que d est une corde si et seulement si d est la longueur d'une corde (au sens géométrique) parallèle à Ox du graphe de f (voir figure page suivante)

UNTERBERGER, Professeur à l'Université de Reims

82 La grosse ficelle

-

Une marchande de légumes avait coutume de lier ses asperges au moyen de ficelles de 30 cm de long, en bottes qu'elle vendait 8 F. Trouvant ces bottes trop petites elle utilise par la suite des ficelles de longueur double et vendit en conséquence ses bottes 16 F Qu'en pensez-vous

proposé par Maryvonne LEBERRE - IREM - de Lyon

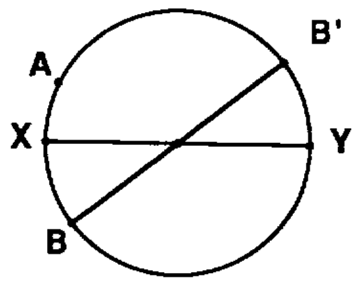
83 Une figure à caractère

Dessiner un quadrilatère (qui ne soit pas un parallélogramme) dont les longueurs des côtés et des diagonales soient entières.

Roland BABOUD - Collège J.Prévert - St Genis Pouilly

84 Plus entier que moi tu meurs

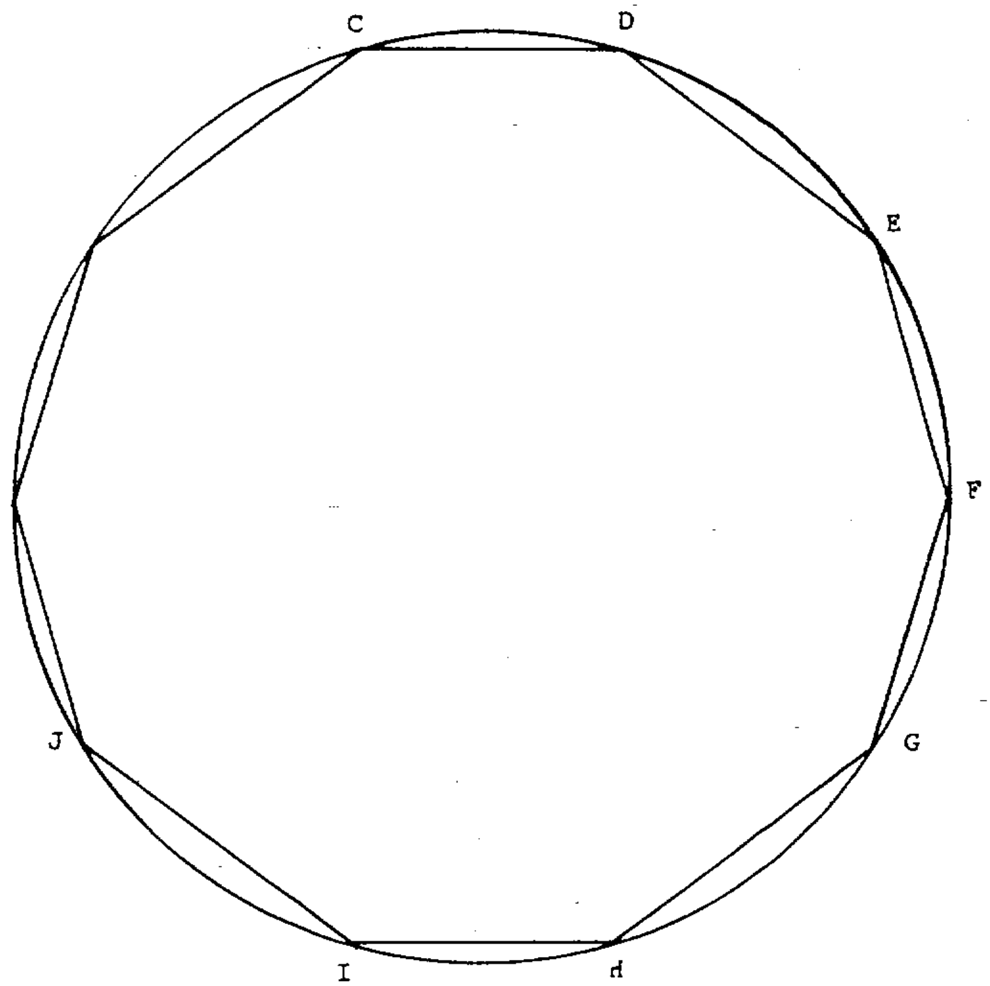
83) XY est un diamètre du cercle.
A et B sont sur le cercle;
B' est diamétralement opposé à B.
On suppose que XY, AX et AY, BX et BY sont entiers.



Démontrer que : AB est entier équivaut à AB' est entier.

85 Un polygone à 30 côtés tous entiers

Trouver un polygone à trente sommets dont les longueurs des côtés et de toutes les diagonales soient entières.
Voici un décagone dont les longueurs des côtés et des diagonales sont toutes entières : la figure est à l'échelle $\frac{1}{5}$; l'unité de longueur est le mm. Les dix sommets sont sur le cercle.



AB = CD = EF = FG = HI = JA = 35 mm

BC = DE = GH = IJ = 44 mm

AF = 125 mm

(Ces dimensions sont celles du dessin)

86 Autoréférence

Complétez le cadre ci-dessus avec des chiffres de façon à rendre vraies les phrases qui s'y trouvent :

Dans ce cadre, il y a ....fois le chiffre 1
Dans ce cadre, il y a ....fois le chiffre 2
Dans ce cadre, il y a ....fois le chiffre 3
Dans ce cadre, il y a ....fois le chiffre 4

87 Une marche de difficulté moyenne ?

Exercice de marche
Des marcheurs effectuent en deux heures un trajet comportant une section en plat, puis une côte, et le retour par le même chemin (descente puis plat). Leur vitesse est de 4 km/h en terrain plat, 6 km/h en descente et 3 km/h en côte.
Quelle est la distance totale parcourue par les marcheurs?

88 Double produit

Trouver les nombres, entiers positifs non nuls inférieurs à 1987, qui soient égaux au double produit de leurs chiffres (numération décimale)

Les énoncés 86, 87, 88 sont extraits du championnat de france de mathématiques

89 Produire le maximum

Etant donné $S>0$, trouver la valeur maximum de $p = x_1.x_2....x_n$, les x_i étant des réels strictement positifs tels que $x_1 + ...+ x_n = S$.

90 Une solution radicale

Peut-on exprimer $\cos(\frac{\pi}{9})$ à l'aide de radicaux carrés et cubiques d'entiers?

89 et 90 proposés par Denis PAGE

91 Généalogie

L'ancêtre Louis a vécu dans notre ère. L'année de sa naissance, et celle de sa mort (ce n'est pas la même) sont formées des mêmes chiffres, dont la somme est le siècle de sa mort, et le produit l'âge qu'il avait à sa mort.
En quelle année, Louis a-t-il pu naître?

92 Perdu dans la forêt

Une forêt en forme de rectangle est délimitée par les quatre villes qui en constituent les sommets consécutifs : Aubépin, Boulau, Chenne et Daobab. Pierre, perdu dans la forêt, ignore qu'il est à 4 km d'Aubépin, à 7 km de Boulau et à 6 km de Chenne.
Mais à quelle distance est-il de Daobab?
On dira au mètre le plus proche.

93 Les triangles

Combien existe-t-il de triangles dont chaque côté est un entier, et dont le périmètre est égal à 1987?
Attention : Deux triangles sont considérés comme égaux dès lors que leurs trois dimensions sont identiques, quelque soit l'ordre de ces dimensions.

91, 92, 93 énoncés proposés lors du championnat de mathématiques 87

94 Les "uns" d'Attila

Un problème entendu à France Culture le 26/5/87. On appelle nombre d'Attila tout nombre dont l'écriture (en base dix) ne comporte que des "1".Existe-t-il un nombre d'Attila multiple de 2? multiple de 3? multiple de 4? Quels sont les entiers naturels diviseurs d'au moins un nombre d'Attila?

énoncé proposé par G. MOUNIER

95 Egalité ?

- L'égalité suivante est-elle exacte : $7843^{2359637} + 8712^{2332305} = 8137^{2349993}$?

idem pour : $7889^{2358101} + 7886^{2358201} = 7883^{2358301}$?

idem pour : $2715^{216} = 3014^{213} + 1216^{240} + 1127^{243}$?

Enoncé proposé par Gilbert GRIBONVAL

96 Famille décomposée

J'ai autant de frères que de soeurs; la soeur de la personne qui vient de parler déclare : "j'ai deux fois plus de frères que de soeurs". Combien sont-ils?

Enoncé proposé par Maryvonne LEBERRE

97 Equidistance

Quatre points A, B, C, D non alignés sont donnés dans le plan. Construire un cercle qui passe à égale distance de ces quatre points.

98 Partir sur une bonne base

Peut-on construire un triangle isocèle connaissant la base et une de ses bissectrices intérieures?

99 Lieu géométrique

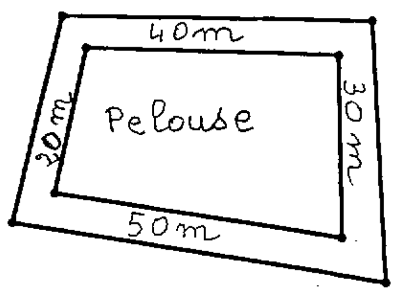
Soit deux droites D et E et un point A n'appartenant à aucune de ces deux droites. Quel est l'ensemble des milieux des segments $[PQ]$ tels que $P \in D, Q \in E, A \in [PQ]$?

100 Minimum

U et V appartenant à $]0;1[$, quelle est la plus petite valeur de $\dfrac{U+V}{UV(1-UV)}$?

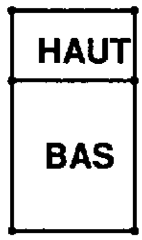
101 La piste

Une pelouse a la forme d'un quadrilatère dont les côtés mesurent 20; 40; 30 et 50 m. La commune décide de construire autour une piste de 5 m de large, le contour extérieur étant rectiligne, parallèle au bord de la pelouse, ou arrondi, le rayon du contour arrondi étant de 5 m



Quelle est, au m^2 le plus proche, l'aire de la piste? On utilisera, si besoin, π = 3,14.

102 La tour infernale



Dans cette tour de plus de 4 étages, réside un et un seul locataire par étage. Les charges quotidiennes de fonctionnement de l'ascenseur se répartissent comme suit : le locataire du premier étage paie 1F, celui du 2ème étage 2F celui du 3ème, 3F et ainsi de suite. Les locataires des étages du bas, réunis, paient autant que les locataires des étages du haut, réunis. Le total des charges ne dépasse pas 1988F. Combien y a-t-il d'étages dans cette tour?

101et 102, demi-finale du championnat des jeux mathématiques et logiques (collèges)

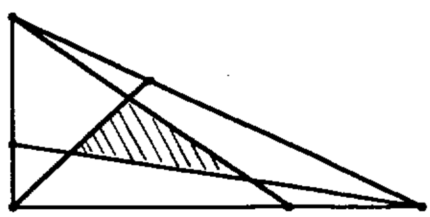
103 chiffres identiques pour un carré

Quel est le nombre maximum de chiffres identiques par lesquels peut se terminer l'écriture décimale du carré d'un nombre?

300 problèmes pour nos élèves n°240

104 De quoi avons-nous l'aire ?

Le champ Ducoq a la forme d'un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit mesurent 60 m et 35 m. A l'aide de cordes, un arpenteur joint chaque sommet à un point situé au tiers du côté opposé, à gauche en regardant ce côté depuis le sommet (voir figure). Les trois cordes délimitent un triangle central (hachuré) dont on demande de calculer l'aire, arrondie au mètre carré.
Peut-on généraliser à un triangle quelconque?



Championnat mathématiques 88 - Catégorie Lycées, Problème n° 5

105 C'est à en perdre la boule

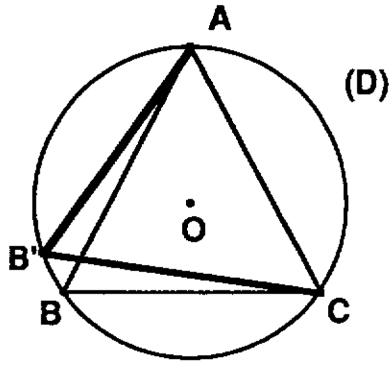
Parmi 12 boules identiques d'aspect, l'une a une masse différente. Déterminer avec une balance de Roberval et en trois pesées maximum la boule différente.

Problème proposé par Christian BERT - Jean Macé - Villeurbanne

106 D'isocèle en isocèle où va-t-on ?

On considère un cercle (D) et une corde BC de cercle.

Soit ABC le triangle isocèle de base BC inscrit dans Γ, dont l'angle en A est aigu. (Si BC est un diamètre, ABC sera rectangle isocèle de base BC : on a le choix entre deux points pour A).



On choisit ensuite l'un des deux côtés AB ou AC et on recommence sur lui la même construction; on obtient un nouveau triangle isocèle (ACB' sur la figure). On continue ...Que peut-on dire de cette suite de triangles?

Problème proposé par Gilbert ARSAC

107 Une formule...de suite !

La suite définie par $u_1 = 1$ et pour tout $n \geq 2$,

$u_n = \sum_{k=1}^{n-1} u_k u_{n-k}$ s'exprime-t-elle par la formule $u_n = \dfrac{(2n-2)!}{(n-1)!n!}$?

Problème proposé par Denis PAGE

108 Le renard et le chien

Un renard est poursuivi par un chien. Il a 27 bonds d'avance. Or 3 bonds du renard valent en longueur deux bonds du chien. Et pendant que le chien fait 4 bonds, le renard en fait 5. En combien de bonds, le chien rattrapera-t-il le renard?

Demi-finale 88 du championnat de france de jeux mathématiques

109 L'âge du grand-père

108) Le grand-père dit : "J'ai 4 fois l'âge de mon petit-fils. Si on inverse les deux chiffres de chaque âge, chose incroyable, le nouvel âge de mon petit-fils est égal à trois fois le mien. Quel est mon âge?"

Problème tiré des éliminatoires du Championnat mathématique 1988 - série "Collèges"

110 Un hortocentre sur une parabole ?

ABC est un triangle d'orthocentre H.

Δ est la parallèle à la droite (BC) passant par A.

Le lieu géométrique de l'orthocentre H quand A se déplace sur Δ semble être une parabole ... Qu'en pensez-vous?

Problème proposé par F. JARENTE

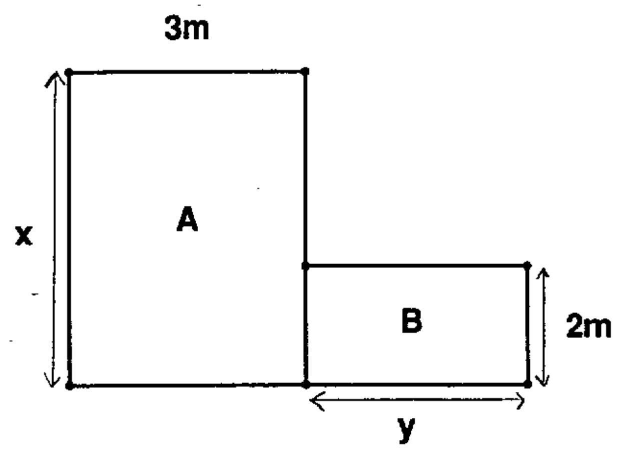
111 2 nombres parmi 51 : c'est pas du pastis !

Peut-on toujours, dans un ensemble formé de 51 nombres entiers distincts non nuls et inférieurs ou égaux à 100, en trouver deux distincts tel que l'un divise l'autre ?

Problème proposé par G. ARSAC

112 Un bâtiment au 1er degré

Projet de construction d'un bâtiment en forme de L comprenant :
- une partie A de largeur 3 m
- à laquelle on accole une partie B de largeur 2 m comme le montre le schéma
- l'aire totale occupée par le bâtiment devra être exactement de 27 m^2
- on appellera x la longueur de la partie A et y la longueur de la partie B.



Est-ce possible? Y a-t-il plusieurs solutions ?
Quelle est la meilleure solution ? Pour quelles raisons ?
Peut-on trouver toutes les solutions ?
Ce problème était bien sûr donné pour amener à l'équation du premier degré à deux inconnues, et a donné lieu à des échanges intéressants ou pistes de recherche à propos de la meilleure solution : esthétique, économie de terrain, économie sur les murs, ... etc.

Problème proposé par Michel MOREAU

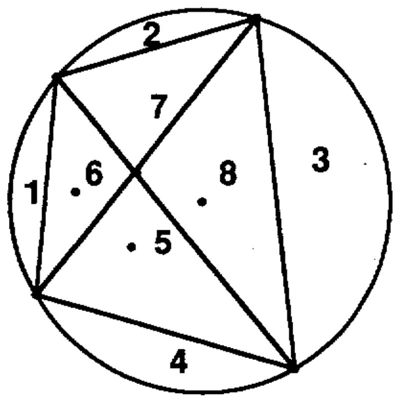
113 Le billard mixtiligne

Soit quatre points A, B, C, D du plan tels que :
- il existe quatre cercles $C_{AB}, C_{BC}, C_{CD}, C_{DA}$, passant respectivement par A et B, B et C, C et D, D et A;
- les deux cercles qui passent par l'un quelconque des quatre points A, B, C, D sont toujours tangents.

Que peut-on dire des quatre points A, B, C, D ?
(Problème proposé par G. ARSAC - Problème rencontré par M. HAYLI, professeur à Lyon 1, lors d'une recherche sur les problèmes de billard : quatre arcs de cercle joignant AB, BC, CD, DA formant un quadrilatère "mixtiligne" définissant un billard).

114 Les régions

Sur un cercle, on place dix croix. Puis on joint en ligne droite chacune des croix aux neuf autres. Les croix ont été placées de telle sorte qu'aucun point intérieur au cercle n'est situé sur plus de deux de ces lignes droites.
Combien de régions sont-elles ainsi délimitées à l'intérieur du cercle ?
Le diagramme vous montre comment 4 croix déterminent 8 régions.



115 La partie décimale : tu la vois ?

Tu mets en mémoire dans ta calculatrice le nombre d'or

$\omega = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et tu calcules ω^2, ω^3, ω^4, ...

Observer la partie décimale après la virgule.
Que peux-tu conjecturer. Essaie de le démontrer.
Recommence avec $2+\sqrt{3}$.
Cherche les nombres de la forme $a + b\sqrt{c}$, $(a, b, c) \in (\mathbb{N}^*)^3$ ayant cette propriété.
Même chose avec $(a, b, c) \in \mathbb{Q}_+^* \times \mathbb{Q}_+^* \times \mathbb{N}^*$.

Problème proposé par Louis BLANC

116 2 triangles de mémère

Etant donné un triangle ABC, trouver les points P tels que les aires des triangles APC et BPC soient égales.

Problème proposé par Gilles GERMAIN

117 Multiples de 1989

Francis affirme que tout nombre obtenu par la multiplication de 1989 entiers consécutifs est divisible par 1989. Gilles rétorque qu'il n'est pas nécessaire de prendre autant d'entiers consécutifs pour être sûr d'obtenir le résultat. Gilles a raison. Pouvez-vous trouver le plus petit entier n tel que le produit de n entiers consécutifs soit toujours divisible par 1989?

Problème tiré du Championnat de Mathématiques 1989 (éliminatoires)

118 Fabriquer des moules : c'est difficile !

On donne dans le plan trois éléments, chacun d'eux pouvant être soit un point, soit une droite, soit un cercle (il y a dix cas, par exemple 1 point et 2 cercles). On cherche les cercles tangents à chacun des trois éléments (j'appelle cercle tangent à un point un cercle passant par ce point).

- Combien y a-t-il de solutions ?
- Peut-on construire à la règle et au compas le centre d'un cercle solution ?
- Peut-on exprimer par des formules utilisables sur un ordinateur le rayon et les coordonnées du centre d'un cercle solution en fonction des données ?

Problème Issu des difficultés d'un ami qui fabrique des moules dans une entreprise d'Oyonnax..

Proposé par Denis PAGE.

119 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ c'est limite ?

La suite

$$u_1=\frac{1}{2};\ u_2=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}};\ u_3=\frac{\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}}}{\frac{\frac{5}{6}}{\frac{7}{8}}};\ u_4=\frac{\frac{\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}}}{\frac{\frac{5}{6}}{\frac{7}{8}}}}{\frac{\frac{\frac{9}{10}}{\frac{11}{12}}}{\frac{\frac{13}{14}}{\frac{15}{16}}}};\ldots \text{ etc. a-t-elle pour limite } \frac{\sqrt{2}}{2}\ ?$$

Le démontrer.

proposé par Michel CRITON

120 3 Triangles de mémère

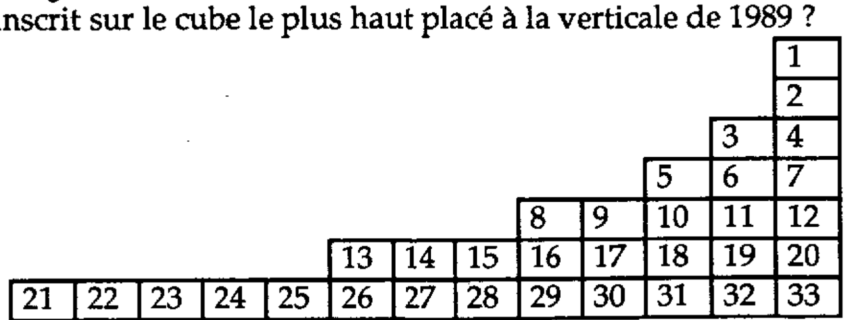
Étant donné un triangle ABC comment construire le point P pour que les triangles PAB, PBC, PCA aient des aires égales.

Énoncé proposé par Gilles GERMAIN

121 Le barrage de cubes

Le jeune Léonard a construit un barrage de cubes pour le bicentenaire de la révolution. Sur chaque cube est inscrit un nombre entier naturel, et les nombres se suivent comme sur le dessin (nous montrons ici le sommet de sa construction). Il les a disposés, comme vous pouvez le constater, de telle sorte que sur chaque rangée, il y ait autant de cubes que sur les deux rangées du dessus. La dernière rangée en contient 1989.

Quel est le nombre inscrit sur le cube le plus haut placé à la verticale de 1989 ?



Énoncé tiré des éliminatoires du championnat 1989

122 Barycentres, angles et longueurs

Étant donné un triangle ABC tout point du plan est barycentre de A, B, C avec des coefficients α, β, γ.

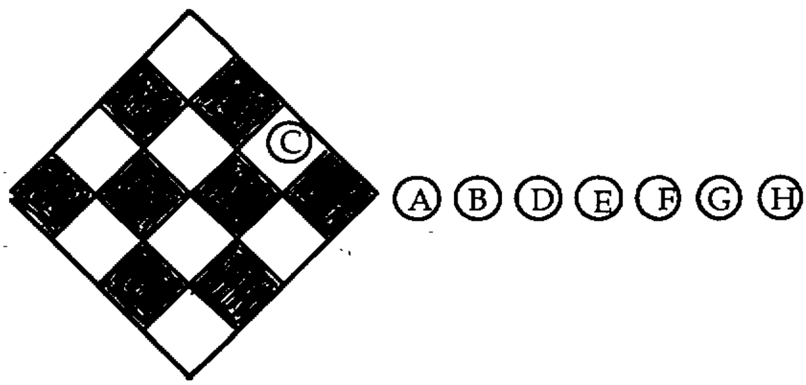
Exprimer α, β, γ en fonction des angles et des longueurs des côtés du triangle ABC dans les cas suivants :

- orthocentre
- centre du cercle circonscrit
- centre du cercle inscrit.

Énoncé proposé par Denis PAGE

123 Désordre alphabétique

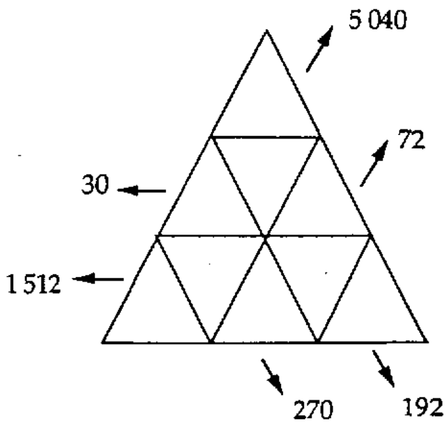
On place les huit jetons A, B, C, D, E, F, G, H sur les cases blanches du damier.



Deux jetons sont en prise s'ils sont situés sur des cases ayant un sommet en commun ou si une case noire les sépare. Pouvez-vous placer les huit jetons de telle sorte que deux jetons en prise ne se suivent pas dans l'ordre alphabétique ? La place du jeton C est indiquée sur le dessin.

124 LES 9 FACTEURS

Remplir les cases de ce triangle (voir figure page suivante) à l'aide des entiers de 1 à 9, chacun étant utilisé une fois. Pour chaque flèche, on donne le produit des 3 ou 5 nombres situés dans la rangée correspondante.



Les deux énoncés précédents sont issus de la demi-finale des championnats mathématiques 90 - Série Collège

125 Equitriangle inscrit dans un triangle

124) Étant donnés un triangle ABC et P un point du segment [BC], existe-t-il un triangle équilatéral PQR dont les sommets Q et R sont respectivement sur les côtés [AB] et [AC] ?

énoncé proposé par Gilles GERMAIN

126 Un nombre pair de diviseurs

125) - Quels sont les entiers n qui ont un nombre pair de diviseurs ?
(proposé par G. ARSAC)

127 A la recherche de deux entiers

126) - Soit n un entier plus grand que 1. Peut-on toujours trouver deux entiers p et q qui ne sont pas égaux et tels que :

$\frac{1}{n} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$?

Origine : Question posée par des élèves de 4ème au cours du bilan de la recherche du problème classique suivant :

"Peut-on trouver 3 entiers 2 à 2 distincts a, b, c tels que $1 = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$? Continuer avec 4 entiers, 5 entiers, etc.".

128 L'hypossectrice devient un triangle

Construire à la règle et au compas, un triangle rectangle connaissant la longueur de l'hypoténuse et la longueur de la bissectrice issue de l'angle droit. Bien adapté, me semble-t-il, aux élèves de 1ère S.

proposé par Jacques ALLARY

129 Magic math

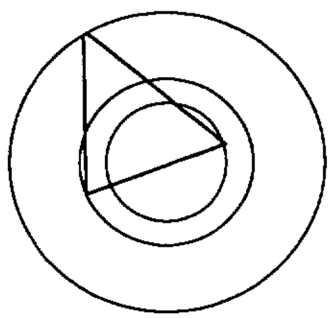
Tu lances deux dés. Tu multiplies le chiffre d'un des deux dés (premier dé) par 2, tu ajoutes 5, tu multiplies le résultat par 5, tu ajoutes le chiffre de l'autre dé (deuxième dé), tu retranches 25 au résultat.
Le chiffre des dizaines du nombre que tu as ainsi obtenu est le chiffre marqué sur le premier dé. Le chiffre des unités est le chiffre marqué sur le second dé.
a) Invente un autre type de calcul permettant de "deviner" les chiffres des deux dés qu'une autre personne a lancé.
b) Peux-tu fabriquer le même problème avec trois dés ?

130 PB PÉPERE POUR LA MEME AIRE

Trouver tous les points P de l'angle formé par les deux demi-droites BA et BC tels que l'aire du triangle PAB soit égale à l'aire du triangle PBC.

131 Le triangle qui ne manque pas d'aire

Parmi tous les triangles ayant un sommet sur chacun des trois cercles concentriques, quel est celui qui a la plus grande aire ?



132 Trois aires sur le même disque

Partager le disque en trois parties d'aire égale, sans tracer de ligne passant par le centre du cercle. Les trois parties ne doivent pas avoir la même forme mais seulement la même aire.

133 Quel côté pour le triangle

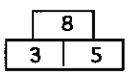
On donne un triangle équilatéral ABC tel qu'il existe un point M intérieur avec MA = 3, MB = 5 et MC = 7 centimètres. Quelle est la longueur du côté de ce triangle ? *Extrait des 300 problèmes pour nos élèves (n° 104)*

134 Les zéros de n!

n étant un entier, par combien de 0 se termine le nombre
$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times ... \times 2 \times 1$

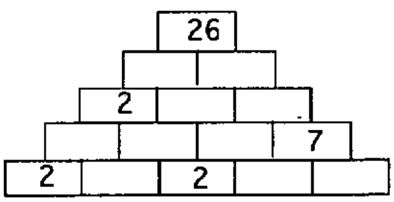
135 Le problème de la pyramide de Pascal

On a retrouvé sur un document ancien cette pyramide de Pascal. Dans les cases vides il y avait des nombres qui se sont effacés. Peux-tu les retrouver ? On sait que les nombres de deux cases voisines d'une même rangée s'ajoutent pour donner le nombre de la case qui est juste au-dessus.

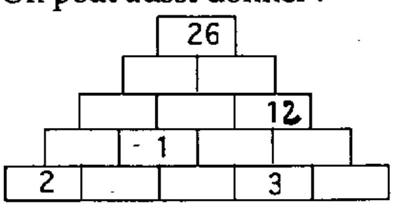
(exemple : 

)

Peux-tu retrouver les nombres disparus ?



On peut aussi donner :



Objectif possible : introduction d'une inconnue et de l'équation $ax + b = cx + d$

136 Addition des nombres renversés

544 est égal à la somme de 2 nombres de 3 chiffres renversés. 544 = 371 + 173.
Fabriquer une méthode pour reconnaître qu'un nombre donné est la somme de 2 nombres de 3 chiffres renversés ?
On peut aussi commencer avec les nombres de 2 chiffres !

137 Le problème de la chèvre

Soit un champ circulaire de rayon R. Une chèvre est attachée à un piquet avec une ficelle de longueur R égale au rayon du champ circulaire.
Où placer le piquet pour que la chèvre brouter la moitié du champ ? (On suppose que la chèvre mange le maximum de ce qu'elle peut).

Pour les premières ou terminales

138 Calculatrice et conjecture

Étudier le résultat du calcul suivant :

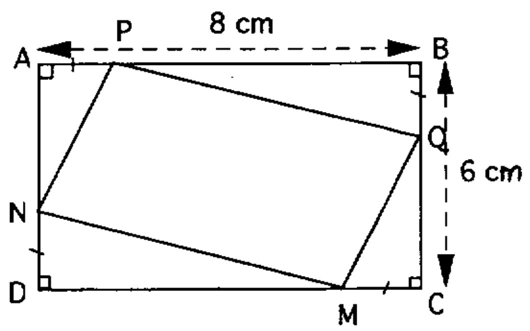
$$\Big(\underbrace{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\ldots\sqrt{5}}}}}_{n} - 1\Big) \times 2n - \ln 5$$

pour des valeurs successives de n avec votre calculatrice (par exemple de n = 5 à n = 15). Quelle conjecture cela vous inspire-t-il ? Pouvez-vous prouver cette conjecture, c'est-à-dire, en faire une propriété mathématique ?

Pour la terminale

139 Aire penchée bien pensée

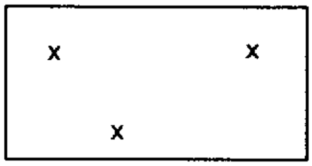
Soit ABCD un rectangle de longueur AB = 8 cm et de largeur BC = 6 cm. P est un point de [AB]; Q un point de [BC]; M un point de [DC] et N un point de [AD]. Les longueurs AP, BQ, CM et DN sont égales.
Où doit-on place P sur AB pour que l'aire du quadrilatère PQMN soit la plus petite possible (minimum) ?



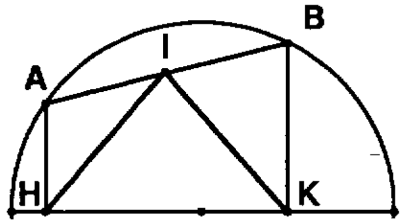
Peut être utilisé en seconde comme situation problème introduisant les fonctions ou comme réinvestissement. En première comme application de la dérivée (on peut le prolonger en remplaçant (8 et 6) par (a et b)).

141 Défense de copier

Comment placer trois élèves dans une salle rectangulaire pour qu'ils soient le plus éloigné possible les uns des autres ?
Et s'ils sont quatre ?



142 Le triangle indéformable



Une corde de longueur constante se déplace sur un demi-cercle. Des extrémités de cette corde, on trace les perpendiculaires au diamètre. On joint le mileu de la corde aux pieds des perpendiculaires. Le triangle isocèle obtenu reste-t-il semblable à lui même ?
Quelle heuristique (méthode de recherche) peut aider à résoudre ce problème ?

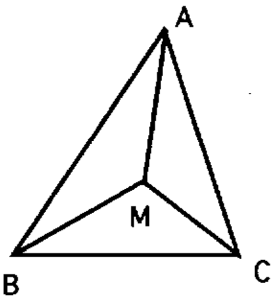
143 4 points, un carré, facile !

Construire un carré passant par quatre points donnés du plan (un point sur chque côté).

144 Surement faux...

J'ai trouvé des nombres positifs dont la somme vaut 64 et le produit 16 720 512 100. Vrai ou faux ?

145 Pari stupide ?

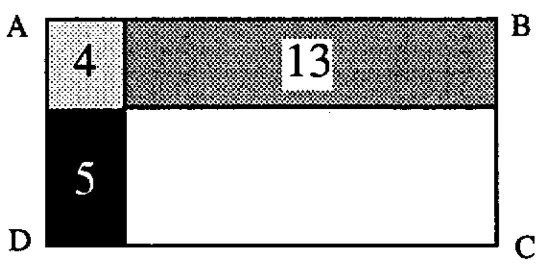


Qui de Paul ou Jérôme va gagner ?
Paul, élève de seconde dit à son voisin : Je te parie 100 F que dans un triangle ABC dont BC est le plus petit côté, je peux trouver un point M intérieur au triangle tel que MA + MB + MC soit supérieur à
AB + AC ?
Jérôme, qui pense que ce n'est pas possible, accepte de parier.

146 Plus d'aire que moi tu meurs

Parmi tous les triangles de périmètre donné quel est celui qui a la plus grande aire?

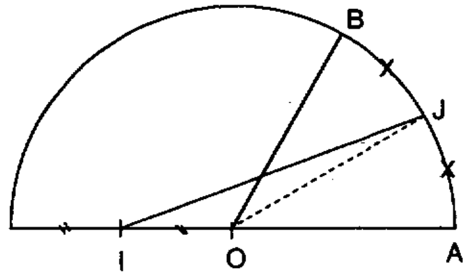
147 Un rectangle à la recherche de son aire.



L'aire du rectangle est de 4 m^2, celle du rectangle en est de 13 m^2 et enfin celle du rectangle en noir est 5 m^2.
Mais si on demande l'aire du rectangle ABCD ?

148 D'ocagne

proposé par Jean AYMES de Montauban au Colloque du problème de l'IREM de Lyon en 1987.



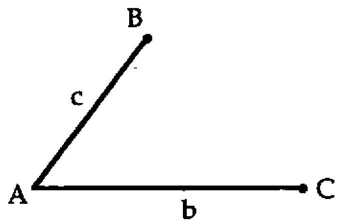
AOB est équilatéral.
Par cette construction, dont "il ne semble pas possible de pousser la simplicité", D'OCAGNE a-t-il construit un angle $\widehat{AIJ}$ mesurant 20° ?

149 A la recherche du demi-disque A3

Peut-on découper un demi-disque de diamètre supérieur à 29,7 dans une feuille rectangulaire de dimensions 21 x 29,7 (format A3) ?

150 Des aires égales à la règle et au compas

Construire avec une règle et un compas tous les points P du plan tels que l'aire du triangle PAB soit égale à l'aire du triangle PAC.



151 1992 et les couples de nombres

Il est possible de trouver deux nombres positifs tels qu'en ajoutant leur somme, leur produit et leur différence, on obtienne 1992.
Trouvez de tels couples de nombres. Trouvez tous les couples.

152 Le carré presque magique

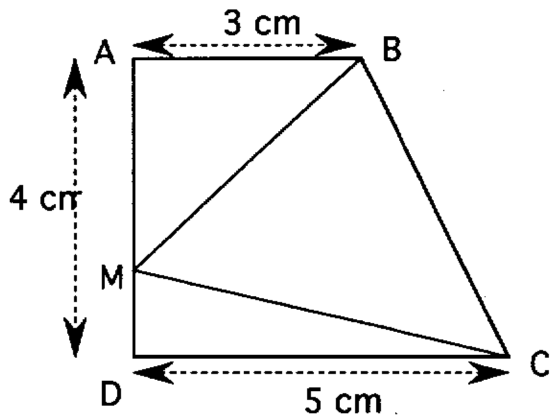
Dans les cases vides il y avait des nombres qui ont été effacés. Retrouve ces nombres sachant que la somme des nombres de chacune des lignes, de chacune des colonnes et de chacune des diagonales de ce tableau est la même et que la somme des termes effacés est égale à 358.

14		1	
	9	12	
11			10
	16	13	

inspiré du Championnat de France mathématiques, quart de finale

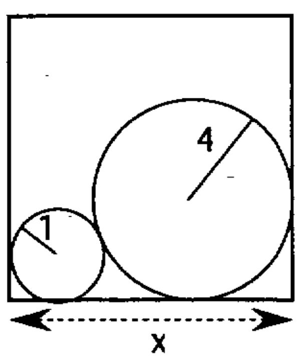
153 Trapèze-triangle

Où placer M sur AD pour que l'aire du triangle MBC soit égale à 8,35 cm^2 ?
ou $\frac{1}{3}$ de l'aire du trapèze ABCD ?



154 La boule et le cochonnet

Calculer x.



155 Coffrons Arsène

Le code secret du coffre est un nombre de trois chiffres. Arsène sait en outre que le chiffre des centaines est strictement supérieur à la somme des deux autres. Il lui faut 20 secondes pour essayer une combinaison.
Quelle durée minimum doit prévoir Arsène pour être sûr d'ouvrir le coffre ?

Les 2 énoncés ci-dessus sont extraits de Rallye Mathématique Champagne-Arden 1992" de l'IREM de Reims.

156 Pardon ?

Trace un quadrilatère quelconque.
Le milieu des milieux de deux côtés opposés est-il aussi le milieu des milieux des deux autres côtés ?

Maths et Malices, n° 1 octobre 1991

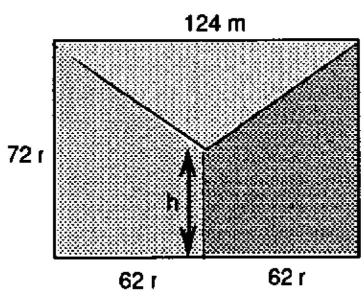
157 Élections

Lors d'une élection, 5 219 bulletins ont été déposés dans l'urne. Le vainqueur battait les trois autres candidats respectivement par 22, 30 et 73 voix.
Cependant personne ne pu déterminer exactement le nombre de voix obtenu par chaque candidat. Peux-tu le faire ?

"Les casses-têtes mathématiques" de Sam Loyd Martin Gardner - Dunod 1982

158 Les champs de même aire

On partage ce champ rectangulaire en trois parcelles de même aire. Une est triangulaire et les deux autres sont des trapèzes.
Combien vaut h ? -



Rallye Mathématique de Champagne-Ardenne (1992). IREM de Reims

I

159 Le tiercé

Sur radio-math, le journaliste Thalès donne les résultats du tiercé :
"Si je multiplie le numéro du cheval arrivé premier par le numéro du second, je trouve 437.
Si je multiplie le numéro du second par celui du troisième, je trouve 391.
Si je multiplie le numéro du troisième par celui du premier, je trouve 323".
Quel est le tiercé dans l'ordre ?

Rallye Mathématique de Champagne-Ardenne (1992).
IREM de Reims

160 Construction à la règle et au compas bloqué

Abu-l-Wafa (940-998) est un mathématicien qui vécu au Xème siècle à Bagdad. Il et l'auteur d'un ouvrage consacré à la géométrie appliquée : *Le livre sur les constructions géométriques nécessaire à l'artisan.*
Cet ouvrage contient un grand nombre de constructions importantes pour l'arpentage, l'architecture, la technique et la géodésie. La plupart de ces constructions sont résolues à l'aide d'une simple règle et d'un compas à ouverture constante. Ces constructions étaient alors pratiquées sur le terrain. Ne voit-on pas encore des élèves tracer des cercles avec des feuilles à deux trous ? (c'est de plus en plus rare dans notre civilisation d'abondance, mais encore fréquent dans les pays "en voie de développement").
Les constructions de tous les problèmes géométriques résolubles à l'aide de la règle et du compas peuvent se ramener à la résolution de sept problèmes simples donnés ci-dessous.

Sauriez-vous les résoudre avec la règle et un compas à ouverture constante ?

1- Diviser un angle donné en deux parties égales ou construire un multiple déterminé d'un angle donné.
2- Par un point donné P mener une droite parallèle à une droite donnée ".
3- Par un point donné P, mener une droite perpendiculaire à une droite donnée ".
4- On donne un point P et une droite " . Par P mener une droite "' tel que l'angle formée par " et "' soit isométrique a une angle donné.
5- Construire un multiple ou sous-multiple déterminé d'un segment de longueur donnée.
6- Soit P un point d'une droite "; construire à partir de P un segment isométrique à un segment [AB] donné.
7- Étant donné le centre C et le rayon r d'un cercle, trouver les points d'intersection du cercle et de la droite.

À propos d'Abu-l-Waba voir Youschkevitch, *Les mathématiques arabes* (VIII-XVe siècles). VRIN, 1976

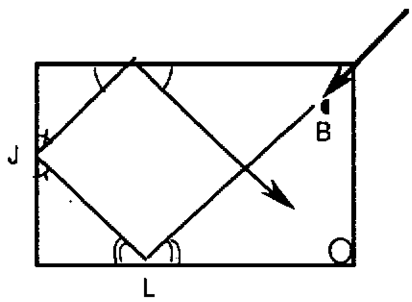
R. Lhomme

161 Instrument bizarre

Après le T (té), le h ! le Té des dessinateurs industriels a pratiquement disparu. Il servait à dessiner des parallèles en glissant le bord d'une table ou d'une planche à dessin. Mais à quoi peut bien servir cet instrument ?

162 Billard

On a un billard rectangulaire.
B est la position d'une boule qu'il faut faire rentrer dans un des trous situés aux quatre angles du billard après avoir rebondi trois fois sur les bandes.
Trouver le point L ?



163 À la recherche de trois nombres

Trois nombres de trois chiffres ont été multipliés ensemble. Chacun des trois nombres a les mêmes chiffres a, b, c rangés dans des ordres différents : abc, bca, cab. Le résultat 2 3 4 2 3 5 2 8 6 du produit a été mal transcrit, ce qui fait que seul le chiffre 6 est à la bonne place. Les autres chiffres ont été mélangés. Retrouver les nombres et leur produit.

164 Le bon, la brute et le truand

Le bon, la brute et le truand décident de se livrer à un "duel triangulaire" au pistolet. Ils feront feu l'un après l'autre, dans un ordre choisi à l'avance (à la courte paille, et chacun tirera sur la cible de son choix, jusqu'à ce qu'il n'y ait plus qu'un survivant.

Le bon atteint sa cible 10 fois sur 10
La brute atteint sa cible 8 fois sur 10
Le truand atteint sa cible 5 fois sur 10

Lequel des 3 protagonistes a le plus de chance d'en sortir vivant ?
1) Faire un paris sur l'un des 3 (spontanément) en utilisant votre intuition.
2) Après avoir fait un raisonnement utilisant vos connaissances en probabilité.

165 L'aîné joue du piano

Joséphine a trois enfants. Elle pose le problème suivant à Hector.
La somme des âges de mes trois enfants est le numéro de l'immeuble d'en face.
Le produit des âges est 36.
Hector qui voit ce numéro : "j'ai presque trouvé mais il me manque une donnée pour conclure".
Joséphine : "Mon aîné joue du piano".
Hector : "Ah, j'ai trouvé !
Quel est l'âge des trois enfants ?

166 Trois médianes pour un triangle

Construire un triangle connaissant les longueurs des trois médianes.

167 Union de périmètres

Une figure A est formée de la réunion de deux figures B et C. A, B, C sont les périmètres respectifs de A, B, C. Quelles valeurs peut prendre $\frac{B+C}{A}$?
Racontez-nous vos conjectures, idées spontanées.

René Mulet Marquis

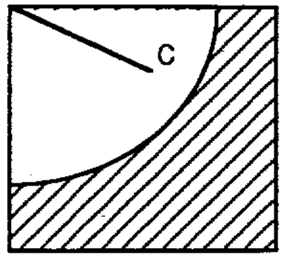
168 L'aiguille retournée

Trouver la surface plane la plus petite possible dans laquelle une aiguille de longueur 1 peut être retournée par un mouvement continue sans quitter cette surface ?
Quelle est la surface qui te viens à l'esprit ?
Peux-tu en trouver une autre d'aire plus petite ?
Est- ce la plus petite possible ?

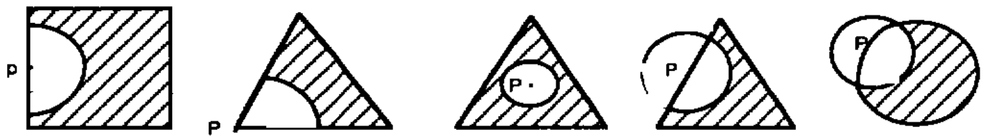
Ce problème a été présenté par le mathématicien espagnol Miguel Guzman comme exemple d'un bon jeu qui a donné naissance à une théorie mathématique profonde.

169 La chèvre en rond

Une chèvre gourmande C est attachée à l'aide d'une corde fixée en P au sommet d'un champ carré. Trouver la longueur de la corde (en fonction du côté du carré) pour que la surface broutée soit la moitié de la surface du champ.



Même problème pour d'autres formes du champ et pour d'autres position de P : la partie à brouter est hachurée, elle doit dans chaque cas être égale à la moitié de la surface totale du champ. les traingles sont équilatéraux.



Ce problème est une variante du problème n° 136 . Il est paru dans "Polygone" feuille de liaison de laRégionale Lyonnaise de l'APMEP.

170 partage d'oeufs sans casse

"Un jour un cuisinier d'un puissant personnage,
Afin de contenter trois filles du village
qui demandaient des oeufs, leur dit en les voyant :
Je vais donner tous ceux que j'ai en ce moment.
Il donne la moitié d'abord à la première
Et la moitié d'un oeuf par faveur singulière ;
À la seconde, il offre aussi du meilleur coeur
La moitié du restant avec même faveur
Et la moitié d'un oeuf dont la fille s'empare
Enfin, continuant son partage bizarre,
Il donne à la troisième avec même amitié
De son troisième reste encore l'humble moitié
Plus la moitié d'un oeuf ; il eut donc l'avantage
De tout distribuer. Dans cet heureux partage
Qui parait singulier, combien en avait-il ?
Et comment a-t-il eu l'esprit assez subtil
Pour donner des moitiés à chaque jeune fille
Sans en casser un seul, ni s'échauffer la bile ?"

D'après un texte ancien, cité dans Galion, classe de 3ème

171 Nombre de diviseurs à l'infini

Trouver un équivalent à l'infini du nombre moyen de diviseurs d'un entier. Autrement dit, soit $d_n (n \geq 1)$ le nombre de diviseurs de l'entier n. Il s'agit d'obtenir un équivalent en $+\infty$ de $\frac{d_1 + d_2 + \ldots + d_n}{n}$.

172 Rendez-vous à midi

Deux personnes se rendent aléatoirement entre 12h et 13h en un même endroit. Chacune d'elles y reste t minutes ($0 \leq t \leq 60$), puis repartent, étant entendu qu'elles repartent à 13h au plus tard.
Quelle est la probabilité qu'elles se rencontrent ?

173 Comportement à l'infini

$soit\ u_n = \int_a^b |\sin(nx)| dx$ .Etudier le comportement en $+\infty$ de (u_n)

174 Fonction affine

Soit f une fonction affine. On sait que : 1,2 < f(1) < 1,4 et 3,3 < f(2) <3,6 . Que peut-on dire de f(10) ?
Produire toutes les affirmations mathématiques sur f(10) qui vous semblent vraies !

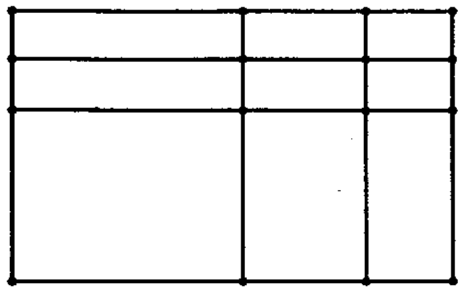
175 Défense de copier

Comment placer quatre candidats à un examen dans une salle de classe triangulaire de façon que la plus petite des six distances entre les candidats soit maximum ?

Proposé par Claude Pagano, La Seyne sur Mer

176 le drapeau danois

Définition : on dit que seize points du plan forment un drapeau danois, s'ils sont disposés comme sur la figure ci-dessous :



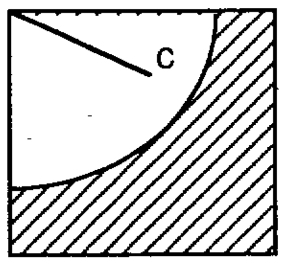
Problème : étant doné un cercle (Γ) et quatre points A, B, C, D de ce cercle, on considère les centres des cercles inscrits et exinscrits de chacun des triangles que l'on peut obtenir en prenant trois des quatre points A, B, C, D.
Montrer que la figure obtenue est un drapeau danois ?

Proposé par G. Glaeser.

177 La chèvre en rond bis

On reprend 'énoncé du problème n°168

Une chèvre gourmande C est attachée à l'aide d'une corde fixée en P au sommet d'un champ carré. Trouver la longueur de la corde (en fonction du côté du carré) pour que la surface broutée soit la moitié de la surface du champ.



Bravo pour le problème "la chèvre en rond " qui pose des problèmes de rapport d'aires intéressants. Je propose de les prolonger avec des élèves de lycée :
1°) Ètudier dans chaque cas la fonction qui à la longueur l de la corde associe le rapport f(l) entre la surface disponible pour la chèvre et la surface totale.
2°) Tracer sur la figure les 9 arcs de cercles concentriques qui partagent le champ en 10 parties de même aire.
3°) Supposer maintenant que la carré, le traingle équilatéral soit le contour du bâtiment où la chèvre ne doit pas pénétrer, le point d'attache étant le même.
Étudier dans les deux cas la fonction qui à la longueur l de la corde associe la surface s(l) disponible pour la chèvre.
On peut continuer avec des tracés sur la figure.

Proposé par Poline Trochu

178 Des cercles inscrits et circonscrits

Soit deux triangles ABC et A'BC inscrits dans le même cercle A et A' étant sur le même arc d'extrémités B et C. Montrer que la droite qui joint les centres des cercles inscrits est parallèle à l'une des directions communes aux bissectrices des couples de droites (AA',BC) (AB,A'C) et (AC,A'B)

179 Triangles entiers

Quel est le nombre de triangles de périmètre entier p donné et dont les trois côtés ont des longueurs entières.

180 Somme première

La somme de trois nombres entiers consécutifs peut-elle être un nombre premier ?

extrait de 40 petits problèmes pour les élèves de collèges
M. LEBERRE IREM de Lyon

181 Le puzzle des patrons du cube

On dispose de tous les patrons du cube formés de six carrés (il y en a 11 mais on est pas obligé de le dire !). Quel est le périmètre minimum que l' on peut obtenir formant une figure polygonale sans trous, avec tous ces patrons ?

Francis Gutmacher (collège R. Goscinny 77360 Vaires sur Marne), qui propose ce problème, commente : " mes élèves de 6èmme ont obtenu diverses solutions à 42 unités (l'unité étant le côté du carré). Qui fera mieux ?

182 Triangle à batir

Construire un triangle ABC connaissant l'angle A, la hauteur h issue de A et le périmètre p.

Extrait de Polya "Comment poser et résoudre un problème"

183 Bouquet de racines

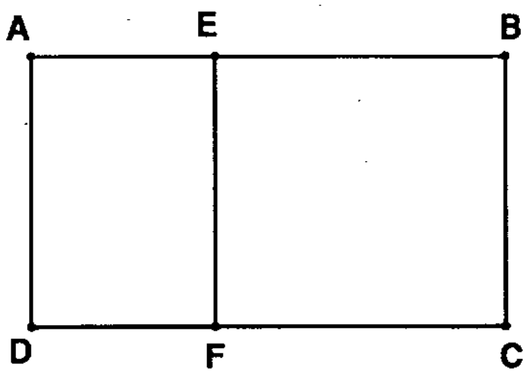
Que vaut $S = \left[\sqrt{1}\right] + \left[\sqrt{2}\right] + \ldots + \left[\sqrt{1993}\right]$?

184 Because perpendicular ?

In triangle ABC, AB=AC, D is the midpoint of BC, E is the foot of the perpendicular drawn from D to AC and F is the midpoint of DE. Prove that AF is perpendicular to BE.

185 Grillage et séparation

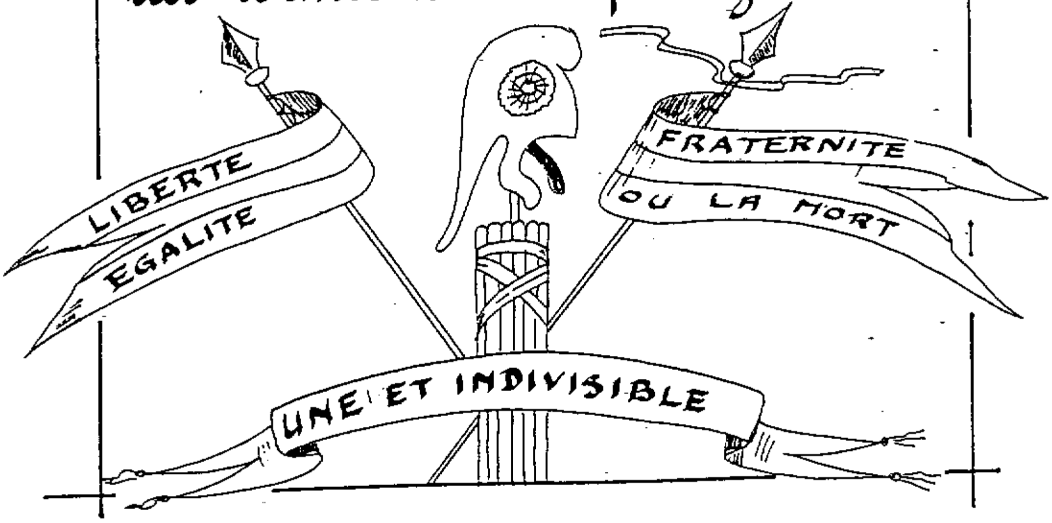
On a un grillage de longueur donnée L. Il s'agit d'entourer un terrain rectangulaire séparé en deux parties par une séparation parallèle à la largeur. Comment choisir les dimensions du rectangle pour que l'aire soit la plus grande possible.



AB+BC+CD+DA+EF = L

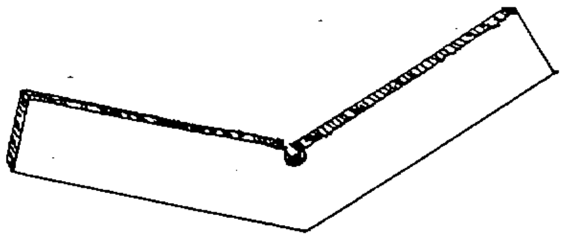
186 1789

Parmi toutes les sommes d'entiers positifs qui sont égales à 1789, quelle est celle dont le produit des termes est le plus grand?



187 Gabarit d'angle

Quelles constructions peut-on réaliser avec un gabarit d'angle ?
Quel autre instrument ajouter pour avoir des constructions "intéressantes" ?



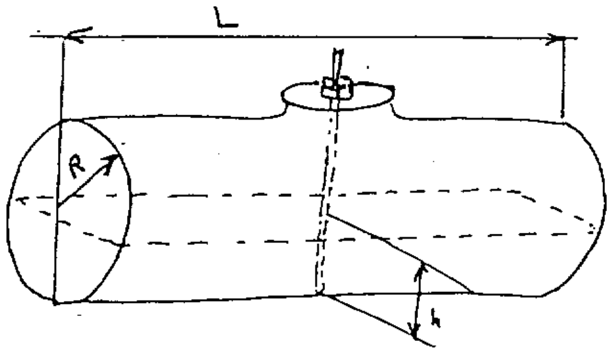
188 Jaugeons

Des amis m'ont posé un problème. Pendant que je faisait mes calculs, l'idée m'est venue de le faire partager. Le problème n'est certe pas nouveau, mais intéressant

Madame G existe vraiment et elle aimerait bien avoir une solution[1]. Voici l'énoncé:

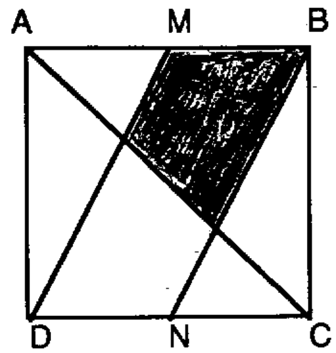
Madame G a une cuve à mazout cylindrique posée à plat. Elle aimerait connaitre le volume restant à l'aide d'une jauge graduée. "Mais, dit-elle, personne n'a pu me donner de formule!"

Dominique Moncourant
27 rue E. Combe
07400 Le Teil



[1] Moi aussi (Robert Lhomme) je suis preneur d'une solution pratique

189 Découpe d'aire



ABCD est un carré de côté 1, M et N sont les milieux de AB et CD respectivement. Trouver l'aire de la région ombrée.

Extrait de European Mathematical Society, Newsbetter n°12 1er juin 94

190 Fausse pièce

Une même pièce de monnaie est fabriquée par 4 hôtels des monnaies.
Le poids de la bonne pièce est connue.
La pièce fabriquée par certains de ces 4 hôtels a un poids légèrement différent de celui de la bonne pièce? L'écart de poids entre la bonne pièce et les autres est constant.
On veut trouver quels sont les hôtels des monnaies qui fabriquent la "mauvaise pièce". On ne peut détecter la mauvaise pièce que par le poids différent.
Sachant qu'on n'a le droit qu'à deux pesées, quel est le nombre minimum de pièces nécessaires? Et avec 5 hôtels ? etc....

191 Segments égaux

A, B et C sont 3 points donnés du plan.
Construire une droite qui coupe AC en X et CB en Y de telle façon que les longueurs des segments $[AX]$, $[XY]$ et $[YB]$ soient égales.

Extrait de Polya "Comment poser et résoudre un problème"

192 Les carrés d'un treillis

Quel est le plus petit carré contenant N points d'un treillis à mailles régulières carrées.

@Extrait de "The American Monthy" Vol. 101 n°3 pb n°10374

193 Pneus croisés

Sur ma voiture, une certaine marque de pneus dure 40 000 km sur les roues avant ou 60 000 km sur les roues arrière. En échangeant les zones avant et arrière, quelle est la plus grande distance que je puisse faire avec un ensemble de quatre de ces pneus.(énoncé proposé en 1990)

194 Bouge pas les bougies !

Deux bougies de même longueur commencent à brûler en même temps. Une des bougies est entièrement consumée en 4 heures, l'autre en 5 heures. Combien d'heures brûleront-elles avant qu'une des bougies soit trois fois plus longue que l'autre ? (énoncé proposé en 1979)

195 Drôle de bobine

Une bobine presque vide est traînée sur une surface plane par un fil qui est enrroulé autour d'elle, comme le montre la figure ci-dessous.
Le diamètre de la circonférence intérieure mesure 5cm, et celui de la circonférence extérieure, 10cm. En supposant qu'il n'y ait pas de glissement, de quelle distance se déplace la bobine lorsque l'extrémité du fil a parcouru 12 cm?

Les énoncés 192, 193 et 194 sont mis ici en hommage à Peter O'Hallorow Directeur de la Compétition Australienne de Maths décédé le 25 septembre 1994

196 Mauvaise calculette et produit

Sur une calculette ne fonctionnent que les touches d'opérations + , - , x^{-1} (l'inverse).
Comment peut-on calculer le produit de deux nombres réels au moyen de cette calculatrice ?
Si oui, fournir une méthode (un algorythme) pour calculer le produit.

197 Le carré pond son neuf

Quel est le nombre maximum de neuf par lequel peut se terminer le carré d'un nombre entier ?

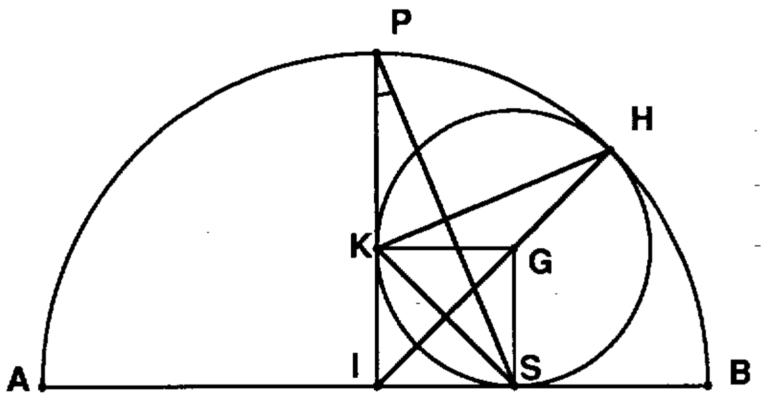
Extraits de Mathématiques de compétition 2nde,1ère, teminale - Jokers-Jeux Bordas

198 Calcul extrême

On dispose de deux nombres 1 et de trois nombres 2.
Avec ces cinq nombres, en n'utilisant que l'addition et la multiplication, construire le plus grand nombre possible.
Essayer avec six nombres 1 et cinq nombres 2, et aussi avec p nombres 1 et n nombres 2?

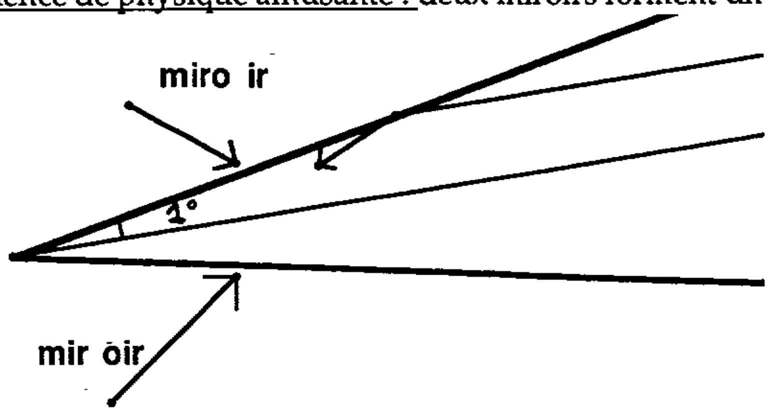
199 Trois cercles

P est le milieu de l'arc AB du demi-cercle de centre I et de diamètre AB.
 est le centre du cercle tangent à IB, PI et au demi-cercle respectivement en S, K, H.
1- Construire cette figure. 2- Quelle est la mesure de l'angle SPI ?



200 Réflexions

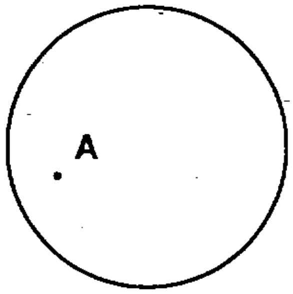
Petite expérience de physique amusante : deux miroirs forment un angle de 2°



Le rayon lumineux tombe sur le premier miroir parallèlement à la bissectrice de l'angle.
Problème : combien de fois le rayon va-t-il rebomdir sur le miroir ?

Consignes : calculatrice interdite ; vous devez rédiger clairement toutes les solutions trouvées, mêmes partielles.
Problème proposé par Youri Fominykh, professeur à l'institut de Pédagogie de Perm (Russie)

201 Triangle équilatéral inscrit



Construire un triangle équilatéral, inscrit dans ce cercle et dont l'un des côtés contient le point A. Préciser votre programme de construction !

FAITES
LIRE LA FEUILLE
A PROBLEMES