Préparation à l'agrégation interne de mathématiques - Année 2011-2012
Quelques exercices sur les espaces hermitiens - 11 janvier 2012

Exercice 1. ***(matrice et adjoint d'un endomorphisme)***
Soit $(E, \langle .|. \rangle)$ un espace hermitien : E est un espace vectoriel complexe de dimension finie et $\langle .|. \rangle$ est une forme hermitienne définie positive sur E.
Soient f un endomorphisme de E et A la matrice de f dans une base de E orthonormée pour $\langle .|. \rangle$. Montrer que la matrice de l'endomorphisme adjoint f^* est ${}^t\overline{A}$ (on la note A^*).

Exercice 2. ***(matrices hermitiennes et antihermitiennes)***

1. *Que peut-on dire des éléments diagonaux d'une matrice hermitienne ($A^* = A$) ? d'une matrice antihermitienne ($A^* = -A$) ?*
2. *Montrer que les sous-ensembles $\mathcal{H} = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) : A^* = A\}$ et $\mathcal{A} = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) : A^* = -A\}$:*
   (a) *sont des sous-espaces vectoriels **réels** de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$;*
   (b) *sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$;*
   (c) *vérifient $i\mathcal{H} = \mathcal{A}$ et $i\mathcal{A} = \mathcal{H}$ et ne contiennent aucun sous-espace vectoriel **complexe** non réduit à $\{0\}$.*

Exercice 3. ***(endomorphismes normaux)***
Un endomorphisme u d'un espace hermitien E est dit normal *s'il commute avec son adjoint, c'est-à-dire si $uu^* = u^*u$. Cette classe contient en particulier les endomorphismes (anti)hermitiens, unitaires, (anti)symétriques (réels ou complexes), orthogonaux (réels ou complexes).*

0. *Montrer que si F est un sous-espace vectoriel de E qui est u-invariant ($u(F) \subseteq F$), alors $F^\perp$ est u^*-invariant.*
1. *Montrer que, si u est normal et $E_\lambda = \ker(u - \lambda id)$, alors les sous-espaces E_λ et $E_\lambda^\perp$ sont invariants par u et u^*.*
2. *Démontrer, par récurrence sur la dimension de E, qu'un endomorphisme normal est diagonalisable dans une base orthonormale.*
3. *Justifier les équivalences entre :*
   (i) *u est normal ;*
   (ii) *u est diagonalisable dans une base orthonormale ;*
   (iii) *il existe P dans $\mathbb{C}[X]$ tel que $u^* = P(u)$.*

   Indication : Utiliser un polynôme d'interpolation pour (ii) $\Rightarrow$ (iii).

Exercice 4. *Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on s'intéresse au sous-ensemble suivant de $\mathbb{C}$:*

$$\mathcal{C}(A) = \left\{ \frac{\langle x|Ax \rangle}{\|x\|^2} \ : \ x \in \mathbb{C}^n;\ x \neq 0 \right\}$$

où $\langle .|. \rangle$ désigne la forme hermitienne canonique sur $\mathbb{C}^n$.

1. *Justifier que $\mathcal{C}(A) = \{\langle x|Ax \rangle \ : \ x \in \mathbb{C}^n;\ \|x\| = 1\}$ puis en déduire que $\mathcal{C}(A)$ est un sous-ensemble compact de $\mathbb{C}$.*
2. *Montrer que $\mathcal{C}(A)$ contient l'ensemble du spectre de A.*
3. *On suppose ici que A est une matrice normale ($AA^* = A^*A$).*
   En utilisant l'exercice précédent, démontrer que $\mathcal{C}(A)$ est l'enveloppe convexe du spectre de A.
   Indication : Décomposer un vecteur x dans une base de diagonalisation de A et développer l'expression $\langle x|Ax \rangle$.