Préparation à l'agrégation interne de mathématiques - Année 2011
Mercredi 14 septembre 2011
Quelques endomorphismes et formes bilinéaires

1 Commutativité d'endomorphismes en dimension finie

On suppose ici que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension finie $n \geqslant 1$.

L'ensemble $\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(E; E)$ des endomorphismes de E est (avec la conjugaison) une $\mathbb{K}$-algèbre (non commutative si $\dim(E) \geqslant 2$).

L'ensemble des automorphismes de E forme (pour la conjugaison) le *groupe linéaire* $GL(E)$ dont l'élément neutre est Id_E.

C'est le fait de pouvoir composer $(f \circ g)$ deux endomorphismes f et g de E qui munit $\mathcal{L}(E)$ d'une structure d'algèbre. On s'intéresse à cette loi interne et en particulier aux endomorphismes qui *commutent* : ceux vérifiant $f \circ g = g \circ f$. (Plus généralement, on peut étudier le *crochet de Lie* $[f; g] = f \circ g - g \circ f$.)

L'idée (avec des guillemets) : pour des endomorphismes, commuter c'est *«avoir suffisamment d'espaces invariants (ou stables) en commun»*.

L'identité Id_E commute avec tous les endomorphismes (chaque sous-espace de E est stable). C'est aussi le cas des homothéties (voir exercice 1.1).

Un des principaux résultats :

Propriété 1.1. *Soient f et g deux endomorphismes de E.*
Si f et g commutent et sont diagonalisables (resp. trigonalisables) alors ils sont simultanément diagonalisables (resp. trigonalisables).
(Il existe une base commune de diagonalisation (resp. trigonalisation).)

Le *commutant* d'un endomorphisme f est l'ensemble $\mathcal{C}(f)$ des endomorphismes qui commutent avec f. Il s'agit d'une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$: voir exercice 1.3.

Exercice 1.1.
1. *Démontrer que les endomorphismes de E qui commutent avec tous les autres sont les homothéties (les applications $x \longmapsto \lambda x$ avec λ dans $\mathbb{K}$).*
   Indication : *utiliser la forme matricielle et les matrices indicatrices δ_{ij} (coefficient 1 à l'intersection de la i-ème ligne et j-ème colonne et 0 ailleurs).*
2. *Démontrer que les* ***automorphismes*** *de E qui commutent avec tous les autres* ***automorphismes*** *sont les homothéties non nulles.*
   (Autrement dit : le centre *du groupe $GL(E)$ est constitué des homothéties non nulles.)*
   Indication : *utiliser le résultat précédent en l'adaptant avec les matrices $Id + \delta_{ij}$.*

Exercice 1.2 (commutativité avec un endomorphisme diagonalisable).
Soit f un endomorphisme diagonalisable de valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ deux à deux distinctes.
1. *Démontrer que $f \circ g = g \circ f$ si et seulement si, pour tout $i = 1, \dots, r$, l'espace propre $E_{\lambda_i} = \ker(f - \lambda_i Id)$ est invariant par g.*
2. *En déduire une démonstration de la propriété 1.1 dans le cas diagonalisable.*
3. *La propriété 1.1 affirme-t-elle que «si $f \circ g = g \circ f$ et f est diagonalisable, alors f et g sont diagonalisables simultanément» ? Contre-exemple ?*

Pour tout endomorphisme u et tout polynôme $P = a_d X^d + \dots a_1 X + a_0$ (sur $\mathbb{K}$), on note $P(u)$ l'endomorphisme $P(u) = a_d u^d + \dots a_1 u + a_0 Id$. L'application $\mathbb{K}[X] \longrightarrow \mathcal{L}(E) : P \longmapsto P(u)$ est un morphisme d'algèbres. On note $\mathbb{K}[u]$ son image.

Exercice 1.3 (commutant d'un endomorphisme).
Soient f un endomorphisme et $\mathcal{C}(f) = \{g : g \in \mathcal{L}(E), f \circ g = g \circ f\}$ son commutant.

1. *Vérifier que $\mathbb{K}[f] \subseteq \mathcal{C}(f)$.*
2. *A-t-on égalité lorsque $f = Id_E$? lorsque $f = 0$?*
3. *Vérifier l'égalité $\mathbb{K}[f] = \mathcal{C}(f)$ lorsque $E = \mathbb{K}^2$ et f est (défini par la matrice) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.*
4. *On suppose que, dans $\mathbb{K}$, f possède $n = \dim E$ valeurs propres distinctes. Démontrer l'égalité $\mathbb{K}[f] = \mathcal{C}(f)$.*
   Indication : utiliser l'exercice précédent pour caractériser les éléments de $\mathcal{C}(f)$ puis un polynôme d'interpolation.

2 Formes bilinéaires

Il y a énormément de références possibles (usuelles : [Mon06], [Gri02] et [Gou94]). Également, sur le site de la préparation à l'agrégation interne de Rennes 1 :

http ://www.irem.univ-rennes1.fr/viedelirem/agrint

se trouve un lien vers divers éléments de cours dont un (complet, avec démonstrations) sur les formes quadratiques par M.-P. Lebaud.

L'exercice suivant est une «question de cours» et permet d'investir la bilinéarité, la symétrie et la positivité d'une forme.

Exercice 2.1. *Sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E, on considère une forme bilinéaire symétrique positive φ de forme quadratique associée q (c'est-à dire $q(x) = \varphi(x; x)$).*

1. *Démontrer les inégalités de Cauchy-Schwarz et de Minkowsky : pour tous x et y dans E,*
   (a) $(\varphi(x; y))^2 \leqslant q(x)q(y)$
   (b) $\sqrt{q(x+y)} \leqslant \sqrt{q(x)} + \sqrt{q(y)}$
2. *On suppose de plus φ définie positive. Traiter les cas d'égalité.*

Sur la réduction de Gauss des formes quadratiques en somme (et différence) de carrés. Le résultat théorique :

Propriété 2.1. *Si q est une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$, il existe n formes linéaires $\ell_1, \dots, \ell_n$ sur E, linéairement indépendantes et n réels $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ tels que :*

$$q(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left(\ell_i(x)\right)^2$$

Remarques 2.1.
1. *Certains coefficients α_i peuvent être nuls, les formes linéaires ℓ_i correspondantes sont alors sans intérêt.*
2. *La forme polaire ainsi qu'une base q-orthogonale de E se déduisent de cette décomposition.*
3. *Le* rang *de q est le nombre de coefficients α_i non nuls. La* signature *se déduit de la distribution de signes de ces coefficients α_i.*

Le but de l'exercice suivant est l'application de cette décomposition sur un exemple précis, et de voir quelles informations peuvent en être déduites.

Exercice 2.2. *On considère la forme quadratique*

$$q : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} : (x,y,z) \longmapsto x^2 + 2y^2 - z^2 + 2xy + 2xz.$$

1. *Justifier que q n'est ni positive, ni négative.*
2. *Décomposer q en somme et différence de carrés (de formes linéaires indépendantes). (On pourra suivre l'ordre lexicographique.)*
3. *En déduire :*
   (a) *la forme polaire φ de q ;*
   (b) *le rang et la signature de q ;*
   (c) *une base q-orthogonale de $\mathbb{R}^3$;*
   (d) *la «nature» des ensembles de niveau $q^{-1}(\{0\})$, $q^{-1}(\{1\})$ et $q^{-1}(\{-1\})$.*

Exercice 2.3. *Appliquer la réduction de Gauss puis déterminer la signature des formes suivantes :*

1. $q(x,y,z) = 2x^2 - 2y^2 - 6z^2 + 3xy - 4xz + 7yz$ *sur* $\mathbb{R}^3$
2. $q(x,y,z,t) = xy + yz + 3zt + tx$ *sur* $\mathbb{R}^4$

Exercice 2.4. *On travaille sur un espace vectoriel réel E de dimension $n \geqslant 2$.*

1. *Justifier qu'une forme quadratique de signature $(1,1)$ est le produit de deux formes linéaires sur E, linéairement indépendantes.*
2. *Décrire, à l'aide de ces deux formes linéaires, le* noyau *de q (le noyau de $\varphi(x,.)$) ainsi que l'ensemble des vecteurs* isotropes *(vérifiant $q(x) = 0$).*
3. *Factoriser la première forme quadratique de l'exercice précédent.*

Exercice 2.5. *Si P et Q sont deux polynômes à coefficients réels, on définit*

$$\langle P|Q\rangle = \int_0^1 P'(t)Q'(t)dt.$$

Pour tout entier naturel non nul n, on définit

$$E = \left\{ P \in \mathbb{R}_n[X] : \int_0^1 P(t)dt = 0 \right\}.$$

1. *Vérifier que $\langle .|. \rangle$ est une forme bilinéaire symétrique positive sur $\mathbb{R}[X]$. Est-elle définie positive ?*
2. *Démontrer que E muni de $\langle .|. \rangle$ est un espace euclidien.*
3. *Déterminer une base orthonormale de $(E, \langle .|. \rangle)$ lorsque n est égal à 3.*
   Indication : *déterminer une base de E puis appliquer l'orthonormalisation de Schmidt.*

Exercice 2.6. *Sur $E = \mathbb{R}_2[X]$, on considère l'application φ définie par*

$$\varphi(P;Q) = \sum_{k=0}^{2} P(k)Q(k).$$

1. *Montrer que l'application φ est un produit scalaire sur E.*
2. *Déterminer une base orthonormale (relativement à φ) du sous-espace $F = \{P \in E : P(0) = 0\}$.*
3. *Déterminer une base de $F^{\perp}$.*

Références

[Gou94] Xavier Gourdon. *Algèbre*. Les maths en tête. Ellipses, Paris, 1994.

[Gri02] Joseph Grifone. *Algèbre linéaire*. Cépaduès-Éditions, Toulouse, 2002.

[Mon06] Jean-Marie Monier. *Algèbre MPSI, Cours, méthodes et exercices corrigés, 4ᵉ édition*. J'intègre. Dunod, Paris, 2006.