Corrigé de la première épreuve de mathématiques

Mines-Ponts 2009 - filière MP

A. Questions préliminaires

1) Prouvons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathcal{P}_n$:

$$\phi_f \text{ est de classe } C^n \text{ sur } \mathbb{R} \text{ et } \forall t \in \mathbb{R},\ \phi_f^{(n)}(t) = \int_{\mathbb{R}} i^n e^{itx} x^n f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Nous avons :

- pour tout $t \in \mathbb{R}$, $x \longmapsto e^{itx} f(x)$ est continue par morceaux (et même continue) sur $\mathbb{R}$,
- pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \longmapsto e^{itx} f(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$,
- pour tous $x, t \in \mathbb{R}$, $\left|e^{itx} f(x)\right| \leq f(x)$ et f est sommable sur $\mathbb{R}$,

donc $\mathcal{P}_0$ est vérifiée.

Soit $n \geq 0$ et supposons que $\mathcal{P}_n$ est vérifiée. Notons $g :\ (x,t) \mapsto i^n e^{itx} x^n f(x)$. Appliquons le théorème de Leibniz :

- pour tout $t \in \mathbb{R}$, $x \longmapsto g(x,t)$ est continue par morceaux et sommable sur $\mathbb{R}$;
- pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \longmapsto g(x,t)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$;
- pour tous $x, t \in \mathbb{R}$, $\left|\dfrac{\partial g}{\partial t}(x,t)\right| \leq |x|^{n+1} f(x)$ et $x \longmapsto |x|^{n+1} f(x) f$ est sommable sur $\mathbb{R}$;

donc $\phi_f^{(n)}$ est de classe C^1, i.e. ϕ_f est de classe C^{n+1}, avec :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \phi_f^{(n+1)}(t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial g}{\partial t}(x,t)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} i^{n+1} e^{itx} x^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x$$

donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vérifiée.

2) L'inégalité des accroissements finis appliquée à la fonction $\varphi :\ x \longmapsto e^{ix}$ à l'ordre $n-1$ donne :

$$\left|e^{ix} - \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(ix)^m}{m!}\right| \leq \left|\varphi(x) - \sum_{m=0}^{n-1} \frac{\varphi^{(m)}(0)}{m!}\, x^m\right| \leq \frac{|x|^n}{n!} \sup_{t\in[0,x]} |\varphi^{(n)}(t)| = \frac{|x|^n}{n!} \sup_{t\in[0,x]} |i^n e^{it}| = \frac{|x|^n}{n!}.$$

Remarque : attention de ne pas appliquer l'égalité des accroissements finis (la fonction φ est à valeurs complexes).

3) L'application $h_{a,b}$ est clairement continue sur $\mathbb{R}^*$ et l'inégalité précédente (avec $n = 2$) donne :

$$\begin{cases} e^{ita} = 1 + ita + O(t^2) \\ e^{itb} = 1 + itb + O(t^2) \end{cases}$$

d'où $h_{a,b}(t) = (b-a) + O(t) \xrightarrow[t\to 0]{} b - a = h_{a,b}(0)$ et $h_{a,b}$ est également continue en 0.

4) Si $t=0$, l'inégalité est évidente. Sinon, l'inégalité des accroissements finis appliquée à φ entre $-at$ et $-bt$ donne :

$$|it\,h_{a,b}(t)| = |\varphi(-at)-\varphi(-bt)| \leq |bt-at| \sup_{s\in[-bt,-at]} |\varphi'(s)| = (b-a)|t|$$

d'où l'inégalité demandée.

5) Pour $k\in\mathbb{N}$, nous avons $e^k = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{k^n}{n!} \geq \frac{k^k}{k!}$ (la série est à termes positifs).

B. La fonction ϕ_f caractérise f

6) Pour θ non nul, le changement de variable $x=\theta t$ donne :

$$R(\theta,T) = \int_{-\theta T}^{\theta T} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = 2S(\theta T)$$

et cette relation est encore valable quand $\theta=0$.

7) Pour $\theta\in\mathbb{R}$, la relation précédente donne directement :

$$R(\theta,T) \xrightarrow[T\to+\infty]{} \begin{cases} \pi & \text{si } \theta>0 \\ 0 & \text{si } \theta=0 \\ -\pi & \text{si } \theta<0 \end{cases}$$

La quantité $R(x,T)-R(y,T)$ a donc toujours une limite quand T tend vers l'infini, dont la valeur est explicitée dans le tableau :

	$x<0$	$x=0$	$x>0$
$y<0$	0	π	2π
$y=0$	$-\pi$	0	π
$y>0$	-2π	$-\pi$	0

8) Posons $\theta :\ (t,x) \longmapsto \dfrac{1}{2\pi} h_{a,b}(t)e^{itx}f(x)$. Pour $T>0$, nous avons :

- θ est continue sur $[-T,T]\times\mathbb{R}$;
- θ est intégrable sur $[-T,T]\times\mathbb{R}$, car $|\theta(t,x)| \leq \dfrac{1}{2\pi}|h_{a,b}(t)|\,f(x)$ avec $h_{a,b}$ intégrable (car continue) sur $[-T,T]$ et f intégrable sur $\mathbb{R}$;
- pour tout $t\in[-T,T]$, $x\longmapsto\theta(t,x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et $t\longmapsto \displaystyle\int_{\mathbb{R}}\theta(t,x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}h_{a,b}(t)\phi_f(t)$ est continue (et intégrable) sur $[-T,T]$;
- pour tout $x\in\mathbb{R}$, $t\longmapsto\theta(t,x)$ est intégrable (car continue) sur $[-T,T]$ et

$$\varphi_T(x) = \int_{-T}^{T}\theta(t,x)\,\mathrm{d}t = \frac{f(x)}{2\pi}\int_{-T}^{T}\frac{e^{it(x-a)}-e^{it(x-b)}}{it}\,\mathrm{d}t = \frac{f(x)}{2\pi}\big(R(x-a,T)-R(x-b,T)\big)$$

en remarquant que les parties impaires ont des intégrales nulles sur $[-T,T]$. Comme S est continue, R l'est également, ainsi que φ_T ; enfin, la fonction S ayant des limites à l'infini, elle est bornée :

$$|\varphi_T(x)| = \frac{f(x)}{\pi}\left|S((x-a)T) - S((x-b)T)\right| \leq \frac{2\,||S||_\infty}{\pi}\,f(x)$$

et φ_T est intégrable sur $\mathbb{R}$;

donc le théorème de Fubini s'applique :

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T} h_{a,b}(t)\phi_f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} \varphi_T(x)\,\mathrm{d}x$$

Il reste alors à appliquer le théorème de convergence dominée :

- φ_T converge simplement sur $\mathbb{R}$ quand T tend vers $+\infty$ vers l'application continue par morceaux :

$$\varphi :\ x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \frac{1}{2}\,f(a) & \text{si } x = a \\ f(x) & \text{si } a < x < b \\ \frac{1}{2}\,f(b) & \text{si } x = b \\ 0 & \text{si } b < x \end{cases}$$

- les fonction φ_T sont dominées par une fonction continue et sommable sur $\mathbb{R}$:

$$\forall\, T > 0,\ \forall\, x \in \mathbb{R},\ |\varphi_T(x)| = \frac{2||S||_\infty}{\pi}\,f(x)$$

Nous en déduisons :
$$\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T} h_{a,b}(t)\phi_f(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[T\to+\infty]{} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

9) Si deux fonctions f et g de E ont même transformée, le résultat précédent donne :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t$$

Comme f et g sont continues sur $\mathbb{R}$, on peut dériver cette égalité par rapport à x : f et g sont égales.

C. La suite $a_k(f)$ ne caractérise pas toujours f

10) La fonction f_0 est clairement continue sur $]0,+\infty[$ et

$$\forall\, x > 0,\ f_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}(\ln x)^2 - \ln x\right) \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$$

(car $-u^2/2 - u$ tend vers $-\infty$ quand u tend vers $-\infty$). Comme $f_0 = 0$ sur $]-\infty, 0]$, f_0 est continue sur $\mathbb{R}$.

f_0 est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et pour $A > 0$, le changement de variable $u = \ln x$ donne :

$$\int_{-A}^{A} f_0(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^A \frac{\exp\left(-\frac{(\ln x)^2}{2}\right)}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\ln A}\exp\left(-\frac{u^2}{2}\right)\mathrm{d}u \xrightarrow[A\to+\infty]{} 1$$

donc f_0 est élément de E.

11) Le même changement de variable donne, pour $k \in \mathbb{N}$:

$$\int_{-A}^{A} x^k f_0(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\ln A} \exp\left(ku - \frac{u^2}{2}\right) \mathrm{d}u \xrightarrow[A\to+\infty]{} \exp\left(\frac{k^2}{2}\right)$$

donc f_0 admet des moments de tous ordres ($x \longmapsto x^k f_0(x)$ est positive sur $\mathbb{R}$) et $a_k(f_0) = \exp\left(\frac{k^2}{2}\right)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

12) f_a est clairement continue et positive (car $-1 \leq a \leq 1$) sur $\mathbb{R}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, la même méthode que précédemment donne :

$$\int_{-A}^{A} x^k \left(f_a - f_0\right)(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{Im}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\ln A} \exp\left((k+2i\pi)u - \frac{u^2}{2}\right) \mathrm{d}u\right)$$

$$\xrightarrow[A\to+\infty]{} \mathrm{Im}\left(\exp\left(\frac{(k+2i\pi)^2}{2}\right)\right) = \exp\left(\frac{k^2-2\pi^2}{2}\right)\sin(2k\pi) = 0$$

donc f_a a des moments de tous ordres ($x \longmapsto x^k f_a(x)$ est également positive sur $\mathbb{R}$), avec $a_k(f_a) = a_k(f_0)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. En particulier, $a_0(f_a) = a_0(f_0) = 1$ et $f_a \in E$.

Une application $f \in E$ qui admet des moments de tous ordres n'est donc pas toujours caractérisée par la suite de ses moments.

D. Une condition sur la suite $a_k(f)$

13) L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne :

$$\left(b_{2k+1}(f)\right)^2 = \left(\int_{\mathbb{R}} |x|^k \sqrt{f(x)} \times |x|^{k+1} \sqrt{f(x)}\,\mathrm{d}x\right)^2 \leq \int_{\mathbb{R}} x^{2k} f(x)\,\mathrm{d}x \times \int_{\mathbb{R}} x^{2k+2} f(x)\,\mathrm{d}x = a_{2k}(f)\,a_{2k+2}(f)$$

14) Si $k = 2p$ avec $p \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{b_k(f)^{1/k}}{k} = \dfrac{a_{2p}(f)^{1/(2p)}}{2p} \leq M \leq 2M$.

Si $k = 2p+1$ avec $p \in \mathbb{N}$, nous avons cette fois :

$$b_k(f) = b_{2p+1}(f) \leq \sqrt{a_{2p}(f)}\sqrt{a_{2p+2}(f)} \leq (2pM)^p\,((2p+2)M)^{p+1} = p^p(p+1)^{p+1}\,(2M)^{2p+1}$$

La concavité de la fonction logarithme donne :

$$\frac{p}{2p+1}\ln(p) + \frac{p+1}{2p+1}\ln(p+1) \leq \ln\left(\frac{p}{2p+1}\,p + \frac{p+1}{2p+1}\,(p+1)\right) = \ln\frac{p^2+(p+1)^2}{2p+1} \leq \ln(2p+1)$$

en remarquant que $p^2 + (p+1)^2 = 2p^2 + 2p + 1 \leq 4p^2 + 4p + 1 = (2p+1)^2$. En composant par la fonction (croissante) exponentielle, nous obtenons :

$$p^p(p+1)^{p+1} \leq (2p+1)^{2p+1} = k^k$$

et donc $b_k(f) \leq k^k\,(2M)^k$, soit $\dfrac{b_k(f)^{1/k}}{k} \leq 2M$.

15) L'inégalité de Taylor-Lagrange donne une nouvelle fois, pour $x, h \in \mathbb{R}$ et $n \geq 1$:

$$\left| \phi_f(x+h) - \sum_{m=0}^{n-1} \frac{h^m}{m!} \phi_f^{(m)}(x) \right| \leq \frac{|h|^n}{n!} \sup_{t \in [x, x+h]} \left| \int_{\mathbb{R}} e^{itu} i^n u^n f(u)\, \mathrm{d}u \right| \leq \frac{|h|^n}{n!} \int_{\mathbb{R}} |u|^n f(u)\, \mathrm{d}u = \frac{|h|^n}{n!} b_n(f)$$

16) Notons $\alpha_n = \dfrac{b_n(f)}{n!}$. Les égalités démontrées aux questions 14) et 5) donnent :

$$0 \leq \alpha_n \leq \frac{n^n}{n!} (2M)^n \leq (2eM)^n$$

Soit alors $x, h \in \mathbb{R}$ avec $|h| < \dfrac{1}{2eM} = A$. Nous avons :

$$|\alpha_n h^n| \leq \left(\frac{h}{2eM} \right)^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

L'inégalité 15) prouve alors que la série $\displaystyle\sum_{n \geq 0} \frac{h^n}{n!} \phi_f^{(n)}(x)$ converge et a pour somme $\phi_f(x)$, ce qui donne :

$$\forall x, h \in \mathbb{R},\ |h| < A \Longrightarrow \phi_f(x+h) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{h^n}{n!} \phi_f^{(n)}(x)$$

17) Comme la suite $a_k(g)$ vérifie la propriété (**U**), avec le même M, nous avons également :

$$\forall x, h \in \mathbb{R},\ |h| < A \Longrightarrow \phi_g(x+h) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{h^n}{n!} \phi_g^{(n)}(x)$$

Avec $x = 0$, nous obtenons :

$$\forall h \in]-A, A[,\ \phi_f(h) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{h^n}{n!} \phi_f^{(n)}(0) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{h^n}{n!} i^n a_n(f) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{h^n}{n!} i^n a_n(g) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{h^n}{n!} \phi_g^{(n)}(0) = \phi_g(h)$$

donc ϕ_f et ϕ_g coïncident sur $[-A/2, A/2]$.

Soit ℓ un entier > 0 et supposons que ϕ_f et ϕ_g coïncident sur $\left[-\dfrac{\ell A}{2}, \dfrac{\ell A}{2} \right]$. Les dérivées successives de ϕ_f et ϕ_g coïncident donc également sur $\left[-\dfrac{\ell A}{2}, \dfrac{\ell A}{2} \right]$. En choisissant successivement $x = \dfrac{\ell A}{2}$ et $x = -\dfrac{\ell A}{2}$, nous obtenons :

$$\begin{cases} \forall h \in [0, A/2],\ \phi_f\left(\dfrac{\ell A}{2} + h\right) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{h^n}{n!} \phi_f^{(n)}\left(\frac{\ell A}{2}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{h^n}{n!} \phi_g^{(n)}\left(\frac{\ell A}{2}\right) = \phi_g\left(\frac{\ell A}{2} + h\right) \\[2ex] \forall h \in [-A/2, 0],\ \phi_f\left(-\dfrac{\ell A}{2} + h\right) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{h^n}{n!} \phi_f^{(n)}\left(-\frac{\ell A}{2}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{h^n}{n!} \phi_g^{(n)}\left(-\frac{\ell A}{2}\right) = \phi_g\left(-\frac{\ell A}{2} + h\right) \end{cases}$$

ce qui prouve que ϕ_f et ϕ_g coïncident sur $\left[-\dfrac{(\ell+1)A}{2}, \dfrac{(\ell+1)A}{2} \right]$ et achève la preuve par récurrence.

18) Supposons que deux éléments f et g de E ont des moments de tous ordres égaux, et que leurs moments vérifient en outre la condition (**U**). La question 17) prouve que $\phi_f = \phi_g$, soit $f = g$ d'après la question 9. Nous avons donc montré qu'une fonction qui admet des moments de tous ordres vérifiant la condition (**U**) est entièrement caractérisée par la suite de ses moments.

E. Application

19) **Analyse :** supposons que f est une solution du système. Nous avons alors :

$$\forall\, k \in \mathbb{N},\ a_{2k+1}(f) = 0 \text{ et } a_{2k}(f) = (2k-1) \times (2k-3) \times \ldots \times 3 \times 1 \times a_0(f) = \frac{(2k)!}{2^k\, k!}$$

On a ensuite :

$$\forall\, k \geq 1,\ 0 \leq a_{2k}(f) = \frac{(2k)(2k-1)\ldots(k+1)}{2^k} \leq \frac{(2k)^k}{2^k} = k^k$$

d'où

$$\forall\, k \geq 1,\ 0 \leq \frac{a_{2k}(f)^{\frac{1}{2k}}}{2k} \leq \frac{1}{2\sqrt{k}} \leq \frac{1}{2}$$

La suite $a_k(f)$ vérifie la condition (**U**) et la question 16) s'applique (avec $x = 0$) :

$$\forall h,\ |h| < \frac{1}{e} \Longrightarrow \phi_f(h) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{h^n}{n!}\, i^n a_n(f) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{h^{2k}}{(2k)!}\, i^{2k} \frac{(2k)!}{2^k\, k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \left(-\frac{h^2}{2}\right)^k = \exp\left(-\frac{h^2}{2}\right)$$

Les fonctions ϕ_f et $x \longmapsto \exp\left(-\dfrac{x^2}{2}\right)$ sont développables en séries entières en tout point de $\mathbb{R}$ et coïncident sur un voisinage de 0, elles sont donc égales sur $\mathbb{R}$.

Considérons d'autre part la fonction $g :\ x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\dfrac{x^2}{2}\right)$. Nous avons :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \phi_g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(ixu\right)\, \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) \mathrm{d}u = \exp\left(\frac{(ix)^2}{2}\right) = \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) = \phi_f(x)$$

donc $f = g$ d'après la question 9). La seule solution possible au problème posé est donc la fonction g.

Synthèse : la fonction g est clairement élément de E et admet des moments de tous ordres. Comme g est paire, ses moments d'ordres impairs sont nuls et une intégration par partie donne pour $k \geq 1$:

$$\begin{aligned} a_{2k}(g) &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2k-1}\,(-x) \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[x^{2k-1} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\right]_{-\infty}^{+\infty} + \frac{2k-1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2k-2} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \mathrm{d}x \\ &= (2k-1)\, a_{2k-2}(g) \end{aligned}$$

donc g est bien solution du système.

Conclusion : le système possède donc pour unique solution la fonction $g :\ x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\dfrac{x^2}{2}\right)$.