Mines-Ponts 2009. Option MP. Mathématiques I.

Corrigé pour serveur UPS par JL. Lamard (jean-louis.lamard@prepas.org)

A. Questions préliminaires.

1) Soit $f \in E$. Notons $g(t,x) = e^{itx}f(x)$. On a :

- $x \longmapsto g(x,t)$ continue donc continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ pour tout réel t.
- $t \longrightarrow g(x,t)$ continue sur $\mathbb{R}$ pour tout réel x
- $|g(x,t)| = |f(x)| = f(x)$ pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}^2$ et $x \longmapsto f(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Donc ϕ_f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

Supposons désormais que f admette un moment d'ordre 1. Comme $\dfrac{\partial g}{\partial t}(x,t) = ixg(x,t)$ on a :

- $x \longmapsto \dfrac{\partial g}{\partial t}(x,t)$ continue donc continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ pour tout réel t.
- $t \longrightarrow \dfrac{\partial g}{\partial t}(x,t)$ continue sur $\mathbb{R}$ pour tout réel x
- $|\dfrac{\partial g}{\partial t}(x,t)| = |xf(x)| = |x|f(x)$ pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}^2$ et $x \longmapsto |x|f(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Donc ϕ_f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $\phi'_f(t) = i\displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{itx}xf(x)\,\mathrm{d}\,x$

Supposons désormais que f admette un moment d'ordre 2. Comme $\dfrac{\partial^2 g}{\partial t^2} = -x^2 g(x,t)$ on prouve de la même manière que ϕ_f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et que $\phi''_f(t) = -\displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{itx}x^2 f(x)\,\mathrm{d}\,x$

L'itération est claire :
si f admet des moments jusqu'à l'ordre k alors ϕ_f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathbb{R}$ et $\phi_f^{(k)}(t) = i^k\displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{itx}x^k f(x)\,\mathrm{d}\,x.$ $\square$

2) L'inégalité de Taylor-Lagrange appliquée à la fonction $\varphi : t \longmapsto e^{it}$ à l'ordre $(n-1)$ entre 0 et x (bien licite puisque φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$) fournit (en notant $J = [0,x]$ ou $J = [x,0]$ suivant le signe de x)
$\big|\varphi(x) - \sum\limits_{m=0}^{n-1} \varphi^{(m)}(0)\dfrac{x^m}{m!}\big| \leqslant \operatorname*{Sup}\limits_{t\in J} |\varphi^{(n)}(t)| \times \dfrac{|x|^n}{n!} = \dfrac{|x|^n}{n!}$ car $\varphi^{(n)}(t) = (i)^n e^{it}$ c'est à dire
$\big|e^{ix} - \sum\limits_{m=0}^{n-1} \dfrac{(ix)^m}{m!}\big| \leqslant \dfrac{|x|^n}{n!}$ pour tout réel x et tout entier $n \geqslant 1$. $\square$

3) $e^{-iat} - e^{-ibt} = e^{-i(a+b/2)t} \times 2i\sin\big(\dfrac{b-a}{2}t\big) \sim i(b-a)t$ lorsque $t \to 0$.
Il en découle que $h_{a,b}$ est bien continue en 0 et comme elle est continue sur $\mathbb{R}^*$ par théorèmes opératoires :
La fonction $h_{a,b}$ est continue sur $\mathbb{R}$. $\square$

4) Si $t = 0$ l'inégalité est évidente et sinon elle résulte immédiatement de l'inégalité des accroissements finis appliquée à la fonction $\varphi : u \longmapsto e^{iu}$ entre ta et tb. $\square$

5) $e^k = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{k^n}{n!} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ série à termes positifs et en particulier $e^k \geqslant u_k = \dfrac{k^k}{k!}$ $\square$

La fonction ϕ_f caractérise f.

6) Par parité $R(\theta,T) = 2\displaystyle\int_0^T \frac{\sin(\theta t)}{t}\,\mathrm{d}\,t.$
Si $\theta \neq 0$ le changement $u = \theta t$ fournit $R(\theta,t) = 2S(\theta T)$. Égalité encore vraie si $\theta = 0$ (valeur commune nulle).
Ainsi $R(\theta,t) = 2S(\theta t)$ pour tout $(\theta,T) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^+$ $\square$

7) Il vient $\lim\limits_{X\to+\infty} S(X) = \dfrac{\pi}{2}$ et $\lim\limits_{X\to-\infty} S(X) = -\dfrac{\pi}{2}$ par parité. Il découle alors de la question précédente que :

$$\lim_{T\to+\infty} R(x,T) - R(t,T) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad (xy>0) \quad \text{ou} \quad (x=y=0) \\ 2\pi & \text{si} \quad (y<0<x) \\ -2\pi & \text{si} \quad (x<0<y) \\ \pi & \text{si} \quad (x>0 \text{ et } y=0) \quad \text{ou} \quad (x=0 \text{ et } y<0) \\ -\pi & \text{si} \quad (x<0 \text{ et } y=0) \quad \text{ou} \quad (x=0 \text{ et } y>0) \end{cases} \qquad \square$$

8) Notons $g(t,x) = h_{a,b}(t)e^{itx}f(x)$ de sorte que $I_T \underset{\text{DEF}}{=} \displaystyle\int_{-T}^{T} h_{a,b}(t)\phi_f(t)\,\mathrm{d}\,t = \int_{-T}^{T}\Big(\int_{\mathbb{R}} g(t,x)\,\mathrm{d}\,x\Big)\,\mathrm{d}\,t$. Alors :

• g est bien continue sur $[-T,T]\times\mathbb{R}$ car $h_{a,b}$ est continue.
• g est intégrable sur $[-T,T]\times\mathbb{R}$ car $|g(t,x)|\leqslant(b-a)|f(x)|$ intégrable sur $[-T,T]\times\mathbb{R}$ (Cf question 4).
• Pour tout $t\in[-T,T]$ la fonction $g(t,.)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ car majorée en module par $(b-a)|f(x)|$
• $t\longmapsto\displaystyle\int_{\mathbb{R}} g(t,x)\,\mathrm{d}\,x=h_{a,b}(t)\phi_f(t)$ est continue sur $[-T,T]$ car $h_{a,b}$ est continue ainsi que ϕ_f (Cf question 3 et début de la question 1) donc intégrable sur $[-T,T]$
• Pour tout $x\in\mathbb{R}$ la fonction $g(.,x)$ est intégrable sur $[-T,T]$ car continue.
• $x\longmapsto\displaystyle\int_{-T}^{T} g(x,t)\,\mathrm{d}\,t = f(x)\int_{-T}^{T} h_{a,b}(t)e^{ixt}\,\mathrm{d}\,t$ est continue sur $\mathbb{R}$ (car $(t,x)\longmapsto h_{a,b}(t)e^{ixt}$ est continue sur $[-T,T]$ et théorème de continuité d'une intégrale propre à paramètres) et est intégrable sur $\mathbb{R}$ car majorée en module par $2T(b-a)|f(x)|$ (Cf question 4)

On peut donc appliquer le théorème de Fubini et $I_T=\displaystyle\int_{\mathbb{R}}\Big(f(x)\int_{-T}^{T} h_{a,b}(t)e^{itx}\,\mathrm{d}\,t\Big)\,\mathrm{d}\,x \underset{\text{DEF}}{=} \int_{\mathbb{R}} f(x)H_T(x)\,\mathrm{d}\,x$

Or $H_T(x)=\displaystyle\int_{-T}^{T}\frac{e^{i(x-a)t}-e^{i(x-b)t}}{it}\,\mathrm{d}\,t=\int_{-T}^{T}\frac{\sin((x-a)t)-\sin((x-b)t)}{t}\,\mathrm{d}\,t=R(x-a,T)-R(x-b,T)$
car la contribuition des cosinus est nulle par imparité.
ainsi $I_T=\displaystyle\int_{\mathbb{R}}\big(R(x-a,T)-R(x-b,T)\big)f(x)\,\mathrm{d}\,x \underset{\text{DEF}}{=} \int_{\mathbb{R}}\psi_T(x)\,\mathrm{d}\,x$

Considérons la famille de fonctions $(\psi_T)_{T\in\mathbb{R}^+}$.
• La fonction S est continue sur $\mathbb{R}$ (intégrale fonction de sa borne supérieure) et admet une limite finie en $+\infty$ et en $-\infty$ donc est bornée sur $\mathbb{R}$. Il en va donc de même de la fonction R sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+$ d'après la question 6. Ainsi $\psi_T(x)\leqslant M|f(x)|$ pour tout $T>0$ et tout réel x de sorte que la famille $(\psi_T)_{T\in\mathbb{R}^+}$ est dominée par une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$.
• Examinons la limite simple (éventuelle) de la famille (ψ_T) lorsque $T\to+\infty$.
  • Si $x>b$ ou $x<a$ cette limite existe et est nulle par la question 7.
  • Si $a<x<b$ cette limite vaut $2\pi f(x)$ toujours par la question 7.

Le théorème de la convergence dominée montre alors que $\displaystyle\lim_{T\to+\infty} I_T=2\pi\int_{\mathbb{R}} f(x)\chi_{]a,b[}(x)\,\mathrm{d}\,x=2\pi\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x$

En conclusion $\displaystyle\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T} h_{a,b}(t)\phi_f(t)\,\mathrm{d}\,t=\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}\,t$ □

Remarque 1 : on aurait pu utiliser une version plus légère du theorème de Fubini pour permuter une intégrale propre et une intégrale impropre :
• $x\longmapsto g(t,x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ pour tout $t\in[-T,T]$
• $t\longmapsto g(t,x)$ est continue sur $[-T,T]$ pour tout $x\in\mathbb{R}$
• On a $|g(t,x)|\leqslant(b-a)|f(x)|$ pour tout $(t,x)\in[-T,T]\times\mathbb{R}$ et $(b-a)|f(x)|$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.
Cela suffit à assurer la permutation des intégrales imbriquées.

Remarque 2 : si on ne veut pas utiliser la version "famille" du théorème de la convergence dominée, il suffit de considérer une suite (T_n) tendant vers $+\infty$ et d'utiliser la caractérisation séquentielle de l'existence et de la valeur d'une limite.

9) Si $\phi_f=\phi_g$ il découle en particulier de la question précédente que $\displaystyle\int_0^x(f-g)=0$ pour $x>0$ et $\displaystyle\int_x^0(f-g)=0$ pour $x<0$ donc que $\displaystyle\int_0^x(f-g)=0$ pour tout x donc par dérivation (licite car $f-g$ est continue) que $f(x)=g(x)$ pour tout réel x.
La terminologie *fonction caractéristique* est donc bien justifiée. □

C. La suite $a_k(f)$ ne caractérise pas toujours f

10) f_0 est bien à valeurs positives ou nulles et en écrivant $f_0(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\Big(-\dfrac{(\ln x)^2}{2}-\ln x\Big)$ pour $x>0$ on obtient immédiatement que f_0 est continue en 0 et finalement sur $\mathbb{R}$. Par ailleurs le changement $x\longrightarrow u=\ln x$ qui est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $]0,+\infty[$ sur $\mathbb{R}$ montre que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_0(x)\,\mathrm{d}\,x$ et $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-u^2/2}\,\mathrm{d}\,u$ sont de même nature et éventuellement égales. Donc en l'occurence (vu le résultat admis en préambule) convergentes et de valeur 1. Comme f_0 est nulle sur $]-\infty,0]$, on a finalement $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f_0(x)\,\mathrm{d}\,x=1$. Ainsi $f_0\in E$ □

11) Le même changement montre que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} x^k f_0(x)\,\mathrm{d}\,x = \int_0^{+\infty} x^k f_0(x)\,\mathrm{d}\,x$ et $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} \exp(ku-\frac{u^2}{2})\,\mathrm{d}\,u$ sont de même nature et éventuellement égales donc, comme précédemment, convergent et valent $\exp\big(\frac{k^2}{2}\big)$.

En outre $|x^k|f_0(x) = x^k f_0(x) \geqslant 0$ donc $x \longmapsto |x|^k f(x)$ est bien intégrable.

En conclusion $a_k(f)$ existe pour tout entier k et $a_k(f) = \exp\big(\frac{k^2}{2}\big)$ □

12) Notons une légère faute d'énoncé : il eût fallu écrire $f_a(x) = 0$ pour $x \leqslant 0$ et $f_a(x) = f_0(x)\big(1 + a\sin(2\pi\ln x)\big)$ pour $x > 0$. Alors :

- f_a est bien positive ou nulle car $-1 \leqslant a \leqslant 1$
- Pour $x > 0$ la fonction $x \longmapsto 1 + a\sin(2\pi\ln x)$ est bornée et comme $\lim\limits_{x\to 0^+} f_0(x) = 0$ on a $\lim\limits_{x\to 0^+} f_a(x) = 0$ et ainsi f_a est bien continue sur $\mathbb{R}$.
- Pour tout entier k, $x \longmapsto x^k f_a(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ donc sur $\mathbb{R}$ car $x \longmapsto x^k f_0(x)$ l'est et la fonction $x \longmapsto 1 + a\sin(2\pi\ln x)$ est bornée sur $\mathbb{R}^+$.
- Pour tout entier k notons $\displaystyle\Delta_k \underset{\text{DEF}}{=} \int_{\mathbb{R}} x^k f_a(x)\,\mathrm{d}\,x - \int_{\mathbb{R}} x^k f_0(x)\,\mathrm{d}\,x$

Il vient $\displaystyle\Delta_k = \frac{a}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{Im}\left(\int_{\mathbb{R}^+} x^k \exp(-\frac{(\ln x)^2}{2})\exp(i2\pi\ln x)\frac{\mathrm{d}\,x}{x}\right)$

Le changement $x \longmapsto u = \ln x$ admissible car $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^+$ sur $\mathbb{R}$ montre que

$\displaystyle\Delta_k = \frac{a}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{Im}\left(\int_{\mathbb{R}} \exp\big((k+2i\pi)u - \frac{u^2}{2}\big)\,\mathrm{d}\,u\right) = a\,\mathrm{Im}\left(\exp(\frac{(k+2i\pi)^2}{2})\right) = a\exp(\frac{k^2-4\pi^2}{2})\sin(2k\pi) = 0$

Ainsi $\Delta_k = 0$ pour tout entier k (ce qui prouve en particulier avec $k = 0$ que $f_a \in E$).

En conclusion les fonctions f_a pour $a \in [-1, 1]$ appartiennent toutes à E, ont des moments à tous les ordres qui ne dépendent pas de a. La suite des moments ne caractérise donc pas toujours $f \in E$. □

D. Une condition sur la suite $a_k(f)$

13) Les deux fonctions $x \longmapsto |x|^k\sqrt{f(x)}$ et $x \longmapsto |x|^{k+1}\sqrt{f(x)}$ appartiennent à l'space préhilbertien des fonctions de carré intégrable sur $\mathbb{R}$. L'inégalité de Schwarz donne alors l'inégalité demandée. □

14) Si k est pair on a $b_k(f) = a_k(f)$ donc $\dfrac{b_k(f)^{1/k}}{k}$ est majoré par M.

Si $k = 2m+1$ est impair on a d'après la question précédente, $\dfrac{b_{2m+1}(f)^{1/(2m+1)}}{2m+1} \leqslant \dfrac{a_{2m}(f)^{1/(4m+2)}a_{2m+2}(f)^{1/(4m+2)}}{2m+1}$

Or d'après la propriété (U) on $a_{2m}(f) \leqslant (2m)^{2m}M^{2m}$ et $a_{2m+2}(f) \leqslant (2m+2)^{2m+2}M^{2m+2}$. Donc :

$\dfrac{b_{2m+1}(f)^{1/(2m+1)}}{2m+1} \leqslant \dfrac{(2m)^{2m/(4m+2)}(2m+2)^{(2m+2)/(4m+2)}M}{2m+1} = \dfrac{(m)^{2m/(4m+2)}(m+1)^{(2m+2)/(4m+2)}}{2m+1}2M = \alpha_m 2M$

Or $m^{2m}(m+1)^{2m+2} \leqslant (m+1)^{2m}(m+1)^{2m+2} = (m+1)^{4m+2} \leqslant (2m+1)^{4m+2}$ donc $\alpha_m \leqslant 1$

En conclusion $\dfrac{b_k(f)^{1/k}}{k} \leqslant 2M$ pour tout entier k. □

15) D'après la question 1), on a pour tout réel t et tout entier k, $|\phi_f^{(k)}(t)| \leqslant \displaystyle\int_{\mathbb{R}} |x|^k f(x)\,\mathrm{d}\,x = b_k(f)$.

L'inégalité de Taylor-Lagrange donne alors immédiatement l'inégalité proposée. □

16) $\dfrac{|h|^n}{n!}b_n(f) \leqslant \dfrac{n^n}{n!}(2M|h|)^n \leqslant (2eM|h|)^n$ d'après les questions 14 et 5.

Il résulte alors de la question précédente que, si $|h| < A \underset{\text{DEF}}{=} \dfrac{1}{2eM}$, pour tout réel x la série $\displaystyle\sum_0^{+\infty}\frac{h^n}{n!}\phi_f^{(n)}(x)$ converge et a pour somme $\phi_f(x+h)$ □

17) Comme $a_k(g) = a_k(f)$ pour tout entier k, la fonction g vérifie également la propriété (U) avec le même M donc la même propriété que dans la question précédente avec le même A.

Or pour $t = 0$ on a d'après la question 1, $\phi_f^{(n)}(0) = i^n a_n(f) = i^n a_n(g) = \phi_g^{(n)}(0)$.

Donc pour $|h| < A$ et en particulier pour $h \in [-\dfrac{A}{2}, \dfrac{A}{2}]$ on a $\displaystyle\phi_f(h) = \sum_0^{+\infty}\frac{h^n}{n!}\phi_f^{(n)}(0) = \sum_0^{+\infty}\frac{h^n}{n!}\phi_f^{(n)}(0) = \phi_g(h)$

Ainsi la ropriété de l'énoncé est vraie pour $\ell = 1$.

Supposons qu'elle soit vraie jusqu'au rang $\ell \geqslant 1$ i.e. $\phi_f(t) = \phi_g(t)$ pour $t \in [-\dfrac{\ell A}{2}, \dfrac{\ell A}{2}]$.

On a alors $\phi_f^{(n)}(\frac{lA}{2}-\frac{A}{4})=\phi_g^{(n)}(\frac{lA}{2}-\frac{A}{4})$ donc en appliquant la question 16 à f et g en $x=\frac{\ell A}{2}-\frac{A}{4}$ il vient que ϕ_f et ϕ_g coincident sur $]\frac{\ell A}{2}-\frac{5A}{4},\frac{\ell A}{2}+\frac{3A}{4}[$ donc a fortiori sur $[\frac{\ell A}{2},\frac{(\ell+1)A}{2}]$

De même on prouve en appliquant la question 16 en $-\frac{\ell A}{2}+\frac{A}{4}$ que ϕ_f et ϕ_g coincident sur $[-\frac{(\ell+1)A}{2},-\frac{\ell A}{2}]$

Ainsi finalement ϕ_f et ϕ_g coincident sur $[-\frac{(\ell+1)A}{2},\frac{(\ell+1)A}{2}]$ et la propriété est donc vraie au rang $\ell+1$.

La propriété et donc établie par récurrence pour tout entier ℓ. $\square$

18) Il découle évidemment de la question précédente que ϕ_f et ϕ_g coincident sur $\mathbb{R}$ tout entier donc que $g=f$ d'après la partie B.
Une fonction de E admettant des moments de tous ordres et vérifiant la propriété (U) est entièrement caractérisée par la suite de ses moments. $\square$

E. Application

19)• Supposons que f existe.

Une récurrence immédiate fournit $a_{2n}(f)=(2n-1)!!\ a_0(f)=\frac{(2n)!}{2^n n!}=\frac{(2n)(2n-1)\dots(n+1)}{2^n}$

Donc $a_{2n}(f)\leqslant\frac{(2n)^n}{2^n}=n^n$ d'où $\frac{a_{2n}(f)^{1/2n}}{2n}\leqslant\frac{\sqrt{n}}{2n}\leqslant\frac{1}{2}$ pour tout entier $n\geqslant 1$

Donc f vérifie la propriété (U) avec $M=\frac{1}{2}$ ce qui prouve déjà que si f existe elle est unique.

D'après la question 16, ϕ_f est développable en série entière au voisinage de 0 (sur $]-A,A[$) et :

$\phi_f(x)=\sum\limits_{k=0}^{+\infty}(i)^k a_k(f)\frac{x^k}{k!}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{(2n)!}{2^n n!}\frac{x^{2n}}{(2n)!}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{-x^2}{2}\right)^n=\exp\big(-\frac{x^2}{2}\big)$ pour $x\in]-A,A[$

Considérons la fonction $g:x\longmapsto\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-\frac{x^2}{2})$. D'après le résultat admis en préambule :

g appartient bien à E et $\phi_g(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}\exp(ixu)\exp(-\frac{u^2}{2})\,\mathrm{d}\,u=\exp(-\frac{x^2}{2})$ pour tout réel x

Première solution :
ϕ_f et ϕ_g coincident sur un voisinage de 0 donc $a_k(f)=(i)^k\phi_f^{(k)}(0)=(i)^k\phi_g^{(k)}(0)=a_k(g)$.
Il résulte de la partie précédente que $f=g$ en d'autres termes si le système admet une solution il s'agit de la fonction g.
Seconde solution :
ϕ_f et ϕ_g sont deux fonctions développables en série entière au voisinage de tout réel x et coincident sur un voisinage de 0 donc classiquement sont égales.

• Réciproquement la fonction g appartient bien à E et admet des moments de tous ordres puisque $x\longmapsto x^k g(x)$ est clairement intégrable sur $\mathbb{R}$ car $x^k g(x)=o(\frac{1}{x^2})$ au voisinage de l'infini.

Par raison de parité on a bien $a_{2k+1}(g)=0$ pour tout entier k. Par ailleurs par parties :
$\int_{-X}^{X}x^{2k}g(x)\,\mathrm{d}\,x=\int_{-X}^{X}x^{2k-1}g(x)x\,\mathrm{d}\,x=\big[-x^{2k-1}g(x)\big]+(2k-1)\int_{-X}^{X}x^{2k-2}g(x)\,\mathrm{d}\,x$
donc par passage à la limite quand $X\to+\infty$ il vient $a_{2k}(g)=(2k-1)a_{2k-2}(g)$.
Donc g est bien solution du système.

• Conclusion : le système admet une unique solution : $f:x\longmapsto\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-\frac{x^2}{2})$

FIN