GROUPE EPM MUTUALISATION
Progression de la classe 2nde aux classes de terminales

Titre « **Angle maximal et … produit scalaire** »

PRESENTATION DES QUATRE VERSIONS

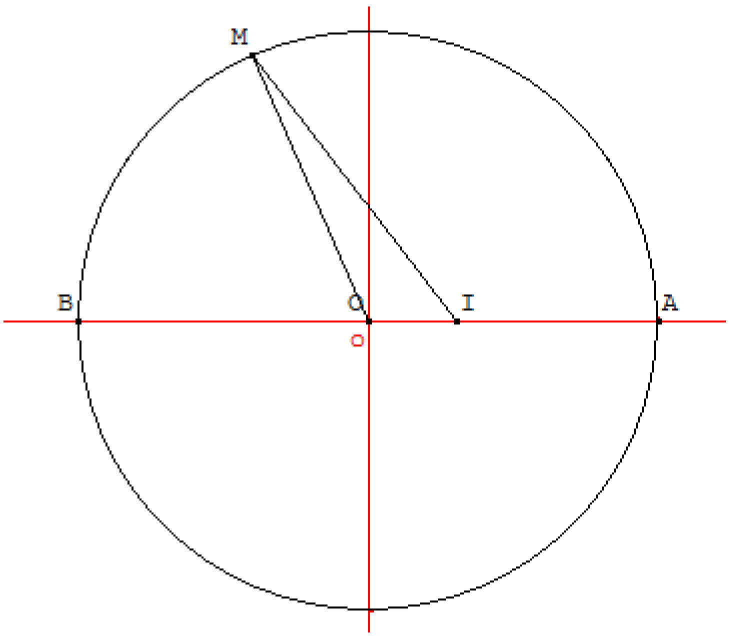
Date : Mars 2008
Thème selon les versions : les fonctions et produit scalaire, ou géométrie plane (par exemple : la loi des sinus)
Logiciel : géoplan ou géogébra
Niveau : TS

Dans ce document figurent dans l'ordre :
un énoncé abrégé - des commentaires au sujet des quatre versions - la tâche des élèves (côté mathématiques et côté logiciel) - des solutions géométriques - des remarques suite aux expérimentations.

Enoncé abrégé :

Il s'agit de trouver M tel que l'angle OMI soit maximal.

(Les énoncés déclinés dans chacune des versions figurent dans les fichiers intitulés : version 1, version 2 etc.)



Présentation des quatre versions

- La version 1 non guidée autorise les élèves à chercher des solutions basées sur des considérations géométriques (pour plus de détails, voir à la fin de ce document).

- La version 2 impose aux élèves l'utilisation du « produit scalaire » pour résoudre le problème.

Pour les versions 1 et 2, la partie TICE est « légère » en particulier avec le logiciel géogébra, ce qui laisse plusieurs possibilités : soit introduire un nouveau logiciel géogébra alors qu'usuellement c'est géoplan qui est utilisé (comme pour le test 1 effectué en classe), soit c'est l'occasion de ne donner aucune indication (ni écrite, ni orale) au sujet de l'utilisation du logiciel (pour géoplan par exemple), de sorte que c'est le moyen de faire le point sur les acquis des élèves pour l'utilisation du logiciel et pour la prise d'initiatives dans la recherche de problèmes.

- Pour la 3ème version, l'objectif est dans une première partie, de guider les élèves vers une méthode de résolution géométrique utilisant la loi des sinus dans un triangle, et ensuite de les orienter vers une méthode utilisant le produit scalaire, les calculs de dérivation étant effectués par le logiciel Xcas.

Dans le document « version 3 » figurent les solutions détaillées pour deux méthodes :
- *Avec utilisation de la loi des sinus*
- *Avec mise en oeuvre d'un produit scalaire et de l'étude d'une fonction*

- Dans la 4ème version, il s'agit d'une généralisation au cas où considère deux points I et J sur [AB] au lieu du seul point I, l'angle IMJ devant être maximal.

Tâche des élèves

Comparaison des logiciels géogébra et géoplan.

Sous géoplan, il faut de plus afficher les variables qui ont été définies.

Côté logiciel

-tracé de segments, d'un demi-cercle (prise d'initiative : choix du rayon du demi-cercle, non donné dans l'énoncé)
-placer un point mobile sur un demi-cercle
-déplacer le point sur le demi-cercle
-définir une variable (abscisse du point I)
-définir une variable liée à une grandeur géométrique : l'angle

Côté mathématiques

-choisir un repère
-calculer un produit scalaire de deux façons pour déterminer le cosinus d'un angle
-penser à étudier une fonction pour déterminer un extrêmum

-savoir calculer la dérivée d'une fonction composée du type $\sqrt{u}$
-connaître les variations de la fonction cosinus

Solutions « purement géométriques »

- Soit a l'angle OMI. On projette O sur en H sur (IM).
Dans le triangle rectangle MHO, sin a est proportionnel à OH.
Dans OHI rectangle en H, OH est inférieure ou égale à l'hypoténuse OI.
Le maximum est donc atteint quand OH = OI donc quand HM est perpendiculaire à (AB).

- En prolongeant MO et MI et en nommant les points d'intersection avec le cercle, respectivement K et L. Le triangle MKL est rectangle en K d'hypoténuse constante (diamètre du cercle) ; et pour une raison analogue à celle invoquée ci-dessus, mais en considérant la parallèle à AB passant par L, le maximum est atteint quand IM est perpendiculaire au diamètre AB...

- dans le triangle OMI, on note a l'angle OMI, b l'angle OIM
loi des sinus : sin(a)/OI = sin(b)/OM
OM et OI sont fixes donc sin(a) est maximal lorsque sin(b) l'est, c'est-à-dire lorsque que b est un angle droit. On conclut en sachant que la fonction sinus est strictement croissante sur $[0\ ,\ \pi/2\ ]$.

Remarques consécutives à l'expérimentation en classe

Test n° 1

Version 2 au cours d'un TD de TS d'une heure.
Le cours sur le produit scalaire est fini depuis 15 jours mais ce type d'exercices (calcul d'angles) restait à faire.
Les élèves découvrent au cours de la séance le logiciel Geogebra.

Bilan TICE
Utilisation habituelle de géoplan, première utilisation de géogébra.
Les élèves arrivent à construire assez rapidement la figure. Toutefois deux élèves ont obtenu une figure qui ne « résiste » pas quand on déplace M.

La solution, (MI) perpendiculaire à (AB), est trouvée tout de suite.

En conclusion : la construction avec Geogebra est facile, la recherche expérimentale de la solution ne pose aucune difficulté. Ce TP peut-être intéressant pour initier les élèves au logiciel Geogebra

Bilan mathématique

L'exercice est intéressant car pour démontrer le résultat ($x_M = x_I$), il faut élaborer une démarche mettant en jeu de nombreuses notions de mathématique déjà rencontrées. Une heure c’est un peu juste pour achever le TP avec la démonstration. Une autre organisation peut être envisagée : poser la démonstration en devoir à la maison.

Test n° 2

Version 2 au cours d’un TD de TS (classe différente de la première pour le test n° 1) d’une heure, avec géoplan.
Le produit scalaire est en cours d’étude, un exercice l’utilisant pour déterminer un angle a été fait.
Bilan TICE :
Quelques erreurs dans le dessin qui ne respecte pas toutes les consignes de l’énoncé.
Nécessité d’intervenir pour faire afficher la valeur de la mesure de l’angle OMI au lieu de trouver une réponse très approximative au coup d’œil.

Remarque : L’énoncé de départ avec un demi-cercle a été modifié car on ne peut pas placer un point sur un demi-cercle sans calculs préalables, au contraire sur un cercle c’est possible.
Placer M sur le cercle est très positif et permet d’obtenir la construction avant de se lancer dans des calculs d’ordre mathématique, les élèves abordent la recherche avec plus de discernement que dans d’autres TP (où les difficultés d’ordre mathématique et celles dues au logiciel se superposent).

Bilan mathématique
Très positif.
La démonstration est commencée durant l’heure de TP et devra être rédigée en devoir à la maison.
En prenant comme variable x l’abscisse de M, et en définissant une fonction f par
$f(x) = \cos(\theta(x))$
les calculs liés à la recherche de la dérivée f ’ ont un aspect complexe, mais en fin de compte, le résultat est simple, car ce signe est le même que celui de (x – a) (où a désigne l’abscisse de I).
De sorte qu’au départ cela peut surprendre certains élèves, mais le résultat est intéressant, d’autant plus qu’il faut justifier le fait que lorsque $\cos(\theta)$ est minimal, cela correspond à un maximum pour θ et que la valeur x = a correspond bien aux observations : M et I ont la même abscisse ou encore (IM) est perpendiculaire à [AB].