Formes quadratiques. Questionnaire.

Question 1.★ Donner trois exemples de formes bilinéaires symétriques. Un, en terme de coordonnées, un sur un espace de fonctions continues, un sur un espace de matrices carrées.

Une solution. a) $b(x,y) = \sum_{i,j} a_{i,j} x_i y_j$, avec $a_{i,j} = a_{j,i}$. b) $b(f,g) = \int_0^1 f(t)g(t)dt$. c) $b(A,B) = \mathrm{tr}(AB)$.

Question 2.★ Donner trois exemples de formes bilinéaires symétriques définies positives. Un, en terme de coordonnées, un sur un espace de fonctions continues, un sur un espace de matrices carrées.

Une solution. a) $b(x,y) = \sum_i x_i y_i$. b) $b(f,g) = \int_0^1 f(t)g(t)dt$, sur l'espace des fonctions continues sur $[0,1]$. c) $b(A,B) = \mathrm{tr}(A^tB)$ (on vérifie que c'est égal à $\sum_{i,j} a_{ij}b_{ij}$).

Question 3.★ Donner la définition de l'application linéaire d'une espace E dans son dual associé à une forme bilinéaire symétrique b sur E. Qu'est ce que le rang de la forme bilinéaire b ?

Solution. $\phi_b : E \to E^*$, $x \mapsto b(x,?)$. Le rang de b est égal au rang de l'application linéaire ϕ_b.

Question 4.★ Relier l'orthogonal d'un sous-espace F pour la dualité et pour une forme bilinéaire b. Que peut on en déduire sur la dimension de l'orthogonal de F pour b ?

Solution. Soit $F^\perp \subset E^*$ l'orthogonal pour la dualité et $F^{\perp_b} \subset E$ l'orthogonal pour la forme b. Alors $F^{\perp_b} = \phi_b^{-1}(F^\perp)$. Donc la dimension de $F^{\perp_b}$ est supérieure à celle de $F^\perp$ et égale si b est non dégénérée (ie ϕ_b iso).

Question 5.★ Qu'est-ce que le bidual ? Quel est le théorème principal le concernant et son utilité dans le cadre des formes bilinéaires ?

Solution. Le bidual de E est le dual du dual de E. Si E est de dimension finie, E^{**} est naturellement isomorphe à E. La base antéduale (dans E), utile par exemple dans l'algorithme de Gauss, devient tout simplement la base duale (dans $(E^*)^*$).

Question 6.★ Que peut on dire de l'orthogonal de l'orthogonal d'un sous-espace pour une forme b ?

Solution. $F \subset (F^\perp)^\perp$. Si b est non dégénérée, alors il y a égalité des dimensions, donc égalité tout court. Sinon $(F^\perp)^\perp = F + \mathrm{Ker}\,(b)$.

Question 7.★ A quoi sert l'algorithme de Gauss ? Peut il décrire le rang, la signature ? Peut il voir l'orthogonalisation simultanée quand E est munie d'une structure euclidienne ?

Solution. Il sert à décomposer une forme quadratique est combinaison de carrés de formes linéaires indépendantes. Cela revient à "diagonaliser" la matrice de la forme quadratique. Le nombre de formes linéaires indépendantes est égal au rang et les signes des coefficients, dans le cas réel, donne la signature. Il fournit par construction une matrice de passage P telle que $A =^t PDP$, mais P est triangulaire et donc en général non orthogonale.

Question 8.★ Deux matrices carrées ont même rang. Sont elle congruentes ? Sur $\mathbb{C}$? sur $\mathbb{R}$?

Solution. Sur $\mathbb{C}$, elles sont congruentes (et la réciproque est aussi vraie). Sur $\mathbb{R}$ deux matrices de même rang mais de signatures distinctes ne sont pas congruentes.

Question 9.* On suppose E de dimension n et $q = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i l_i^2$, où les l_i sont des formes linéaires indépendantes. Donner une base de E dans laquelle la matrice de q est diagonale.

Solution. Les l_i forment donc une base de l'espace dual. Dans la base antéduale, q s'écrit $q = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_i^2$, puisque les l_i sont les formes coordonnées. Et donc q est diagonale dans cette base.

Question 10.* Soit P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$. Quelle est la matrice de passage de $\mathcal{B}^*$ vers $\mathcal{B}'^*$?

Solution. ${}^tP^{-1}$.

Question 11.* On suppose E de dimension 3 sur $\mathbb{R}$. Décrire l'ensemble des solutions de l'équation $q(x) = 1$ dans une base bien choisie. On fera des cas selon la signature de q.

Solution. $s = (3, 0)$, on peut donc trouver une base tq l'équation devient $X^2+Y^2+Z^2 = 1$. C'est la sphere.
$s = (2, 1)$, on peut donc trouver une base tq l'équation devient $X^2 + Y^2 - Z^2 = 1$. C'est l'hyperboloide à une nappe
$s = (1, 2)$, on peut donc trouver une base tq l'équation devient $X^2 + Y^2 - Z^2 = -1$. C'est l'hyperboloide à deux nappes.
$s = (0, k)$, on peut donc trouver une base tq l'équation devient $X^2 + Y^2 + Z^2 = -1$ (pour $k = 3$). C'est l'ensemble vide, idem pour les autres k.
$s = (2, 0)$, on peut donc trouver une base tq l'équation devient $X^2 + Y^2 = 1$. C'est le cylindre
$s = (1, 1)$, on peut donc trouver une base tq l'équation devient $X^2 - Y^2 = 1$. C'est le produit d'une hyperbole par $\mathbb{R}$.
$s = (1, 0)$, on peut donc trouver une base tq l'équation devient $X^2 = 1$. On a la réunion de deux plans sécants.

Question 12.* Soit A une matrice symétrique définie positive $n \times n$ et I une sous-partie de $\{1, \ldots, n\}$. Soit A_I la sous-matrice extraite de A selon les lignes et colonnes numérotées par I. La matrice A_I est-elle symétrique, définie, positive ?

Solution. Oui : si on dit que A est la matrice de la forme euclidienne q dans la base (e_i), alors A_I est la matrice de la restriction de q dans la base $(e_i)_{i\in I}$. La restriction d'une forme euclidienne (ie définie positive) reste euclidienne.

Question 13.* Le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt concerne-t-il : les formes bilinéaires symétriques quelconques ? Les formes bilinéaires symétriques non dégénérées ? Les formes symétriques définies ?

Solution. Il ne concerne que les dernières, puisqu'il faut normaliser, comme son nom l'indique et donc diviser par la norme qui doit être non nulle. Si la forme est symétrique seulement, on doit se contenter d'orthogonaliser. Notons que ce procédé marche aussi dans les espace hilbertiens.

Question 14.* Soit A une matrice symétrique définie positive et B une matrice symétrique. Montrer qu'il existe une matrice P telle que $A =^t PP$ et $B =^t PDP$ avec D diagonale.

Solution. C'est exactement l'orthogonalisation simultanée ! Elle assure qu'il existe une nouvelle base qui est orthonormée pour la forme b_A et orthogonale pour b_B. Si $Q = P^{-1}$ est la matrice de passage vers cette base, on a donc $Id =^t QAQ$, $D =^t QBQ$ d'où les formules demandées.

Question 15.* Soit f un endomorphisme de E euclidien et F un sous-espace stable par f. Est-ce que $F^\perp$ est stable par f ? Pouvez-vous donner des exemples où cela est vrai ? Quelles en sont les conséquences ?

Solution. Non, $F^\perp$ est stable par l'adjoint f^*. C'est vrai si f est symétrique (car $f^* = f$), si f est antisymétrique (car $f^* = -f$), si f est orthogonal (car $f^* = f^{-1}$). C'est important lorsqu'on veut diagonaliser f par récurrence.

Question 16.* Si q est non dégénérée sur E et F un sous-espace, est-ce que $q\mid_F$ est non dégénérée ? A quelle condition sur F a-t-on $F \oplus F^\perp = E$? (où $F^\perp$ est l'orthogonal pour la forme quadratique)

Solution. On a $\mathrm{Ker}\ q\mid_F = F \cap F^\perp$ et donc $q\mid_F$ peut être dégénérée, par exemple si F est la droite engendrée par un vecteur u tel que $q(u) = 0$. On a $F \oplus F^\perp = E$ ssi $F \cap F^\perp = 0$, c'est à dire ssi $\mathrm{Ker}\ q\mid_F = 0$.

Question 17.* Sur $\mathbb{R}$. On suppose, pour une forme quadratique q, que $F \oplus F^\perp = E$ pour tout sous-espace F de E. A-t-on q est définie positive ?

Solution. q est forcément définie mais peut être négative. Pour le voir, considérons u tel que $q(u) = 0$, on a donc $u \in \mathbb{R}u \cap (\mathbb{R}u)^\perp = 0$, donc u est nul.

Question 18.* Soit A une matrice définie positive et X une matrice colonne telle que ${}^tXX = 1$. Quel est le majorant de ${}^tXAX$?

Solution. On utilise encore la diagonalisation simultanée, donc P orthogonale pour la norme euclidienne canonique ${}^tXX$ et tq $A =^t PDP$. Si on pose $Y = PX$, il vient donc $tYY = 1$ et ${}^tYDY = \sum \lambda_i y_i^2$ maximal. C'est bien sûr majoré et atteint pour le max des λ_i appelé rayon spectral.

Question 19.* Soit A une matrice symétrique définie positive. Comment expliciter une racine carrée de A qui soit elle-même symétrique définie positive. Celle-ci est-elle unique (difficile) ?

Solution. D'après les hypothèses, $A = PDP^{-1}$ avec P orthogonale et $D = diag(\lambda_i)$, où les λ_i sont tous strictement positifs. Si on prend $\Delta = diag(\sqrt{\lambda_i})$ et $B = P\Delta P^{-1}$, alors B est symétrique car $B = P\Delta {}^tP$, B est définie positive car $\sqrt{\lambda_i} > 0$ et enfin $B^2 = (P\Delta P^{-1})^2 = P\Delta^2 P^{-1} = A$.
Montrons l'unicité. Soit B' symétrique définie positive telle que $B'^2 = A$. Montrons que $B' = B$. Or, il existe un polynôme d'interpolation de Lagrange Π tel que $Pi(\lambda_i) = \sqrt{\lambda_i}$ pour tout i (ils sont en nombre fini !). On a alors $\Pi(D) = \Delta$ et donc $\Pi(A) = B$, puisque les polynômes commutent à la conjugaison. Il en résulte que $B = \Pi(B'^2)$, donc B' commute avec B. B et B' étant diagonalisables (car symétriques) elles le sont donc simultanément puisqu'elles commutent. Il existe donc une base avec une matrice de passage Q telles que $B = QdQ^{-1}$, $B' = Qd'Q^{-1}$, avec d, d' diagonales constituées des valeurs propres (positives)respectives de B et B'. Mais les hypothèses impliquent que $d^2 = d'2$ et par positivité, $d = d'$. Il en résulte que $B = B'$ comme annoncé.