Quiz et blitz d'analyse

Université Claude Bernard–Lyon I
Agrégation interne de Mathématiques : Écrit
Année 2010–2011

Quelques questions d'analyse « élémentaire »

1. Vrai ou faux ? Pour tout réel $x \in [0,1[$, il existe une unique suite (a_n) à valeurs dans $\{0,\dots,9\}$ telle que $x = \sum_{n\geq 1} a_n\, 10^{-n}$.
2. Quels sont « les » trois théorèmes portant sur les nombres réels ? leurs traductions en termes de suites ?
3. Quels sont « les » trois théorèmes portant sur les fonctions continues réelles ?
4. Le « théorème de la bijection » est vague et grandiloquent. On la remplacera par la formule toute faite (compléter) : « toute fonction $\cdots$ établit une bijection sur son image. »
5. Au fait, quels sont les ingrédients de ce théorème : pour l'injectivité ? la surjectivité ?
6. Pourquoi la réciproque d'une telle fonction est-elle toujours continue ? Est-elle toujours dérivable ? Est-ce vrai si l'ensemble de départ n'est pas un intervalle de $\mathbb{R}$?
7. Donner trois caractérisations de l'exponentielle réelle.
8. Ébaucher quatre constructions de l'exponentielle réelle. Montrer qu'elles sont équivalentes et comparer leur « économie de moyens » à l'aune du rasoir d'Ockham.
9. Ébaucher trois constructions des fonctions trigonométriques (cos et sin, sur $\mathbb{R}$).
10. Ébaucher deux constructions de l'exponentielle complexe.
11. Quel changement de variable pour la primitive d'une fraction rationnelle en x et $\sqrt{x^2+4x}$? x et $\sqrt{x^2+4x+5}$? x et $\sqrt{5-x^2}$?
12. Décrire les morphismes continus de groupe de $\mathbb{R}$ dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.
13. Les fonctions $x \mapsto x^\alpha \sin 1/x$ ($\alpha \in \mathbb{N}$) donnent des contre-exemples bien commodes. Mais à quelles propriétés fausses ?
14. Donner quatre intervalles sur lesquels les graphes de $x \mapsto x^2 \sin 1/x$ sont « très différents ».
15. La fonction $x \mapsto \exp(-x^2)$ est un contre-exemple bien commode. À quelle propriété fausse ?
16. Démontrer, je dis bien *démontrer*, que tout fonction dérivable de dérivée nulle est constante.
17. Vrai ou faux ? Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dérivable et strictement décroissante, alors $f' < 0$ sur $\mathbb{R}$.
18. Vrai ou faux ? Si $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ est dérivable et si $f' < 0$ sur $]0,1[$, alors f est strictement décroissante sur $[0,1]$.
19. Prouver que pour $|x| < 1$, $|\ln(1+x)| \leq |x|$; que $1/(1-x) \leq e^x \leq 1+x$. Cas d'égalité ?
20. Quelles formules de Taylor connaissez-vous ? Quelles différences ? Quel emploi ?
21. Pathologies : trouver...
    - une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui n'a pas de limite mais telle que $(x_{n+1}-x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ;
    - une fonction qui n'est continue en aucun point de $\mathbb{R}$;
    - une fonction indéfiniment dérivable qui vaut 0 sur $]-\infty,0]$ et 1 sur $[1,+\infty[$;
    - une suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui tend vers 1 et telle que c_n^n tend vers 0 ; vers un réel fixé $a > 0$; vers $+\infty$; vers rien du tout ;
    - une série divergente dont le terme général est négligeable devant $1/n$.
22. Soit I un intervalle, $f : I \to I$ dérivable (autant que l'on voudra) et une suite récurrente définie par $u_0 \in I$ et, pour tout entier n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

(a) Donner une condition nécessaire portant sur la limite éventuelle de (u_n).

(b) Donner des conditions suffisantes pour que la suite converge vers une élément de I.

(c) Quels types de convergence peut-on attendre ?

23. Quels problèmes classiques se ramènent à une suite récurrente du type précédent ?
24. Vrai ou faux ? Toute suite positive qui tend vers zéro est décroissante à partir d'un certain rang.
25. Vrai ou faux ? Si deux suites sont équivalentes, les séries associées convergent toutes les deux ou divergent toutes les deux.
26. Énoncer et démontrer le critère spécial des séries alternées.
27. Que peut-on dire de la convergence d'une série entière à l'intérieur du disque de convergence ? sur le bord du disque ? à l'extérieur du disque ?
28. À quelle condition une fraction rationnelle est-elle développable en série entière au voisinage de zéro ? Quel est le rayon de convergence de la série obtenue ?
29. Vrai ou faux ? Le rayon de convergence de la somme de deux séries entières est le plus petit des deux rayons.
30. Peut-on prévoir *a priori* l'intervalle de définition d'une solution maximale d'une équation différentielle ?
31. Les questions techniques les plus difficiles sont souvent des permutations de limites. Donner des exemples de telles situations en précisant le théorème qui justifie l'interversion.

Thème : rapidité de la convergence de la méthode des trapèzes

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction, disons $\mathcal{C}^\infty$ pour simplifier. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $h = (b-a)/n$, $x_0 = a$ et $x_{i+1} = x_i + h$ pour $i \in \{0, \dots, n-1\}$ (subdivision régulière). La méthode des trapèzes est « définie » par :

$$T_n = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} \times \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2}.$$

C'est une approximation de $I = \int_a^b f$.

1. Rappeler l'interprétation graphique qui conduit à écrire la formule pour T_n.
2. On suppose que $n = 1$. Tenter de majorer $|I - T_1|$ « au plus près » en étudiant la fonction $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ définie pour $x \in [a, b]$ par :

$$g(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t - (x-a)\frac{f(a) + f(x)}{2}.$$

[Ainsi, $|I - T_1| = g(b)$. Dériver deux fois g, majorer f'' par une constante, intégrer en exploitant $g(a) = 0$ et $g'(a) = 0$.]

3. On suppose toujours que $n = 1$. Reprendre les calculs précédents et démontrer que : [1]

$$\forall x \in [a, b], \quad g(x) = \frac{1}{2} \int_a^x (x-t)(t-a) f''(t)\,\mathrm{d}t.$$

Reprendre la fin de la majoration ci-dessus à l'aide de cette égalité.

1. Cette formule pourrait être légèrement fausse. La corriger au besoin.

4. Ici, n est quelconque. Utiliser la majoration des questions précédentes pour montrer :

$$|I - T_n| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} \sup_{[a,b]} |f''|.$$

5. Fixons $i \in \{0, \ldots, n-1\}$. Au lieu de majorer aveuglément f'' sur $[x_i, x_{i+1}]$, on écrit la formule de Taylor au cran suivant : $f''(t) = f''(x_i) + (t - x_i)f'''(\theta)$ pour θ convenable. Déterminer un équivalent de $|I - T_n|$ de la forme C/n^2 où, en général, $C \neq 0$.

   [On voit apparaître une très élégante somme de Riemann.]

6. Procéder à une accélération de la convergence à la Romberg : déterminer des réels α et β tels que la suite $(S_n) = (\alpha T_{2n} + \beta T_n)$ ait la même limite que (T_n) mais soit négligeable devant $1/n^2$.

7. On s'attend, dans ce type de situation, à ce que $|I - S_n|$ soit équivalente à C'/n^3. En réalité, $|I - S_n| = \mathcal{O}(1/n^4)$. Pourquoi ?]

   [La raison en est que S_n est la suite associée à *la méthode de Simpson*. Cette méthode consiste à interpoler, sur chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$, la fonction f par un polynôme de degré 2 qui prend les mêmes valeurs que f en x_i, x_{i+1} et c_i. Sauriez-vous retrouver les formules ?

8. Mener une étude analogue avec la méthode du point médian, aussi appelée méthode de la tangente (pourquoi ?), qui consiste à définir :

$$M_n = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right).$$

   [Indication : on vérifiera graphiquement et par calcul que l'on a, pour $i \in \{0, \ldots, n-1\}$:

$$\frac{b-a}{n} f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} (f(c_i) + (t - c_i)f(c_i))\,\mathrm{d}t, \quad \text{où } c_i = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}.$$

   Pour comparer cette expression à l'intégrale, on utilise bien sûr une formule de Taylor.]

Thème : les courbes osculatrices sont disjointes

1. Soit I un intervalle d'intérieur non vide, n un entier naturel, $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^{2n+1}$ dont la dérivée $(2n+1)^{\mathrm{e}}$ est strictement positive sur I. Pour $a \in I$, on note T_a le polynôme de Taylor de f d'ordre $2n$ en a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad T_a(x) = \sum_{k=0}^{2n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

   On fixe a et b dans I.

   (a) Écrire la formule de Taylor avec reste intégral entre a et $x \in I$.

   (b) En déduire une expression intégrale de $T_a(x) - T_b(x)$ pour $x \in I$. L'expression reste-t-elle valide pour $x \in \mathbb{R} - I$?

   (c) En déduire que les graphes de T_a et T_b sont disjoints.

2. Soit I un intervalle d'intérieur non vide, $M : I \to \mathbb{R}^2$ une courbe de classe $\mathcal{C}^2$ paramétrée par longueur d'arc (par son abscisse curviligne).

(a) Rappeler le sens de « paramétrée par longueur d'arc ».

(b) Soit $s \in I$. On note $N(s)$ le vecteur normal à $M'(s)$, de norme 1, tel que $(M'(s), N(s)) = \pi/2\,[2\pi]$. On pose $c(s) = \langle M''(s), N(s)\rangle$. Justifier que $M''(s) = c(s)N(s)$.

On suppose désormais que la fonction c ne s'annule jamais. On note alors $r = 1/c$ et on définit, pour $s \in I$: $\Omega(s) = M(s) + r(s)N(s)$. Par commodité, on suppose que $0 \in I$.

(c) Dans le repère $(M(0), M'(0), N(0))$, écrire les coordonnées de $M(s)$ et effectuer un développement limité d'ordre 2 au voisinage de 0.

Pour Ω un point du plan, on considère le demi-cercle de centre Ω et de rayon r. Écrire un paramétrage de ce demi-cercle par longueur d'arc et effectuer un développement limité d'ordre 2.

Justifier que le cercle osculateur de la courbe M en $s = 0$ est le cercle de centre $\Omega(0)$ et de rayon $r(0)$. Faire un dessin.

(d) Démontrer que, pour $s \in I$, on a : $\Omega'(s) = r'(s)N(s)$.

(e) On suppose que r est monotone sur I. À l'aide du « théorème fondamental de l'analyse », démontrer que les disques osculateurs en deux points distincts sont emboîtés l'un dans l'autre. En particulier, deux cercles osculateurs sont disjoints (cf. 1c). Corriger le dessin effectué ci-dessus...

Thème : rapidité de la convergence d'une suite récurrente

Soit $f : I \to I$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ et la suite définie par $u_0 \in I$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. On suppose que (u_n) converge vers un point fixe attractif r ($|f'(r)| \leq 1$)sans être stationnaire et on cherche, dans certains cas, un équivalent de $u_n - r$.

1. On suppose que $0 < |f'(r)| < 1$.
   (a) Majorer (classiquement) $|u_n - r|$ par une suite géométrique de raison < 1.
   (b) Pour $n \geq 0$, on définit R_n par $u_{n+1} - r = f'(r)\,(u_n - r)\,(1 + R_n)$ (sens ?). Donner une autre écriture de R_n à l'aide d'une formule de Taylor. Prouver que le produit $\prod(1 + R_k)$ converge (sens ?).
   (c) En déduire un équivalent de $u_n - r$.
2. On suppose que $f'(0) = 0$ et que $f''(0) \neq 0$.
   (a) Pour $n \geq 0$, on définit S_n par $u_{n+1} - r = f''(r)\,(u_n - r)^2\,(1 + S_n)/2$. Prouver que la suite (S_n) converge vers 0.
   (b) Pour $n \geq 2$, prouver : $u_n - r = \dfrac{2}{f''(r)} \left(\dfrac{f''(r)}{2}(u_0 - r) \displaystyle\prod_{j=0}^{n-2} |1 + S_n|^{2^{-j-1}} \right)^{2^n} (1 + S_{n-1})$.
   (c) Prouver que le produit $\prod |1 + S_j|^{2^{-j-1}}$ converge vers une limite non nulle.
   (d) On pose $\pi_n = \lim_{m\to+\infty} \prod_{j=n-1}^{m} |1 + S_j|^{2^{-j-1}}$. Montrer que la suite $(2^n \ln \pi_n)$ converge vers 0. En déduire un équivalent simple de $u_n - r$.
3. Pour le cas $f'(r) = 1$, on se contente d'un exemple : $u_0 > 0$, $u_{n+1} = \sin u_n$ si $n \geq 0$.
   Prouver la convergence de la suite vers 0 (facile). Trouver $\alpha > 1$ tel que la suite de terme général $u_{n+1}^{-\alpha} - u_n^{-\alpha}$ ait une limite non nulle. Appliquer le théorème de Cesarò et en déduire un équivalent de u_n sous la forme $Cn^{1/\alpha}$.