Université Claude Bernard Lyon 1
Agrégation interne de Mathématiques : Écrit
Année 2013–2014

Théorème du relèvement

Théorème. *Soient u_1 et u_2 deux fonctions dérivables sur un intervalle I à valeurs réelles qui ne s'annulent pas simultanément. Il existe deux fonctions ρ et θ dérivables sur I telles que*

$$\forall t \in I, \quad \begin{cases} u_1(t) = \rho(t)\cos\theta(t) \\ u_2(t) = \rho(t)\sin\theta(t). \end{cases}$$

Analyse du problème. Si ρ et θ conviennent, on a nécessairement :

$$\rho = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$$

ce qui détermine ρ, et donc, en dérivant :

$$\begin{cases} u_1' = \rho'\cos\theta - \rho\theta'\sin\theta \\ u_2' = \rho'\sin\theta + \rho\theta'\cos\theta, \end{cases}$$

d'où, en multipliant la première équation par $-\sin\theta$ et la deuxième par $\cos\theta$:

$$\rho\theta' = -u_1'\sin\theta + u_2'\cos\theta = \frac{-u_1'u_2 + u_2'u_1}{\rho},$$

puis :

$$\theta' = \frac{-u_1'u_2 + u_2'u_1}{\rho^2} = \frac{-u_1'u_2 + u_2'u_1}{u_1^2 + u_2^2},$$

ce qui détermine θ à une constante près.

Synthèse[1]. On définit une fonction ρ par

$$\rho = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}.$$

Comme u_1 et u_2 ne s'annulent pas simultanément, ρ est dérivable. Fixons t_0 dans I et soit θ_0 un argument de $u_1(t_0) + iu_2(t_0)$. Soit θ la fonction qui prend la valeur θ_0 en t_0 et telle que

$$\theta' = \frac{-u_1'u_2 + u_2'u_1}{u_1^2 + u_2^2}.$$

On va montrer que $(u_1, u_2) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$. Pour cela, on passe en complexes et on pose :

$$w = \frac{u_1 + iu_2}{\rho} e^{-i\theta}.$$

On a : $w(t_0) = 1$ par définition de ρ et choix de $\theta_0 = \theta(t_0)$. Il ne reste donc qu'à montrer que w' est partout nulle. On a :

$$w' = \left[\frac{u_1' + iu_2'}{\rho} - \frac{(u_1 + iu_2)\rho'}{\rho^2} - \frac{i(u_1 + iu_2)\theta'}{\rho}\right] e^{-i\theta}.$$

De l'égalité $\rho^2 = u_1^2 + u_2^2$ résulte : $\rho\rho' = u_1'u_1 + u_2'u_2$ et $\theta' = (-u_1'u_2 + u_2'u_1)/\rho^2$. On remplace :

$$w'e^{i\theta} = \frac{(u_1' + iu_2')(u_1^2 + u_2^2) - (u_1 + iu_2)(u_1'u_1 + u_2'u_2) - i(u_1 + iu_2)(-u_1'u_2 + u_2'u_1)}{\rho^3},$$

puis on vérifie patiemment que tout se simplifie.

1. Vrai début de la vraie preuve, ce qui précède était là pour indiquer la source.

Variante. On s'embête beaucoup avec la fonction ρ. On peut simplifier les choses en définissant

$$\rho = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$$

et en divisant u_1 et u_2 par ρ. D'évidence, u_1 et u_2 ne s'annulent pas simultanément si et seulement si u_1/ρ et u_2/ρ ne s'annulent pas simultanément. Quitte à remplacer (u_1, u_2) par $(\frac{u_1}{\rho}, \frac{u_2}{\rho})$, on peut donc supposer que ρ est constante et égale à 1, c'est-à-dire que

$$u_1^2 + u_2^2 = 1.$$

On fixe comme dans la synthèse t_0 dans I et θ_0 un argument de $u_1(t_0) + iu_2(t_0)$. On appelle θ la fonction qui prend la valeur θ_0 en t_0 et telle que

$$\theta' = -u_1' u_2 + u_2' u_1.$$

On va montrer que $(u_1, u_2) = (\cos\theta, \sin\theta)$. Pour cela, on passe en complexes et on pose :

$$w = (u_1 + iu_2)e^{-i\theta}.$$

On a : $w(t_0) = 1$ par choix de $\theta_0 = \theta(t_0)$. Il ne reste qu'à montrer que w' est nulle. On a :

$$w' = \left[u_1' + iu_2' - i(u_1 + iu_2)\theta'\right] e^{-i\theta}.$$

D'où, en remplaçant θ' par l'expression précédente :

$$\begin{array}{rcl} w'e^{i\theta} & = & u_1' + iu_2' - i(u_1 + iu_2)(-u_1'u_2 + u_2'u_1) \\ & = & u_1' - u_2^2u_1' + u_1u_2u_2' + i\big(u_2' - u_1^2u_2' + u_1u_2u_1'\big]. \end{array}$$

Avec $u_1^2 + u_2^2 = 1$ et donc $u_1'u_1 + u_2'u_2 = 0$, il vient :

$$u_1' - u_2^2u_1' + u_1u_2u_2' = u_1^2u_1' + u_1u_2u_2' = u_1(u_1u_1' + u_2u_2') = 0,$$

l'annulation de l'autre terme étant analogue.