Université Claude Bernard Lyon 1 **Préparation Agrégation Interne**
Feuille 1 (niveau 1, analyse) **Année 2010-11**

Une mise en route :
Inégalités classiques

Exercice 1 (L'inégalité triangulaire) *Montrer que pour tous réels a, b, on a*

$$||a| - |b|| \leq |a - b| \leq |a| + |b|.$$

Exercice 2 (Inégalités de Cauchy–Schwarz et de Minkowski) *On se donne un entier $n \geq 2$ et des réels strictement positifs $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$. On désigne par φ la fonction définie sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ par*

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n,\ \varphi(x, y) = \sum_{k=1}^{n} \omega_k x_k y_k,$$

et on associe à cette fonction φ la fonction q définie sur $\mathbb{R}^n$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ q(x) = \varphi(x, x) = \sum_{k=1}^{n} \omega_k x_k^2.$$

(a) *Exprimer, pour tout réel t et tous vecteurs x, y dans $\mathbb{R}^n$, la quantité $q(x + ty)$ en fonction de t, $\varphi(x, y)$, $q(x)$ et $q(y)$.*

(b) *Rappeler à quelle condition portant sur les réels a, b, c, le réel a étant non nul, le polynôme de degré 2, $P(t) = at^2 + 2bt + c$ est à valeurs positives ou nulles.*

(c) *En remarquant que pour x, y fixés dans $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, la fonction $P : t \mapsto q(x+ty)$ est polynômiale de degré 2, montrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz :*

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \omega_k x_k y_k \right| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} \omega_k x_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^{n} \omega_k y_k^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Préciser dans quels cas, l'égalité est réalisée.

(d) *En déduire l'inégalité de Minkowski :*

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \omega_k (x_k + y_k)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} \omega_k x_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{k=1}^{n} \omega_k y_k^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Préciser dans quels cas, l'égalité est réalisée.

Exercice 3 (Inégalités de Hölder et de Minkowski) *Soit $n \geq 2$ et soient $a_1, a_2, \ldots, a_n$ et $b_1, b_2, \ldots, b_n$ des réels strictement positifs. Pour $1 < p < \infty$, on note q son exposant conjugué, c'est-à-dire l'unique réel tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.*

(a) *Notons*

$$A = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{1/p} \quad \text{et} \quad B = \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{1/q}.$$

Supposons que $A \neq 0$, $B \neq 0$ et, pour chaque $1 \leq i \leq n$, notons $\tilde{a}_i = a_i/A$ et $\tilde{b}_i = b_i/B$. Montrer que

$$\tilde{a}_i \tilde{b}_i \leq \frac{1}{p}\tilde{a}_i^p + \frac{1}{q}\tilde{b}_i^q.$$

Indication : *on pourra considérer les deux réels s, t tels que $\tilde{a}_i = \exp(s/p)$ et $\tilde{b}_i = \exp(t/q)$ et utiliser la convexité de la fonction exponentielle.*

(b) *En déduire l'inégalité de Hölder :*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{1/q}.$$

Pour $p = q = 2$, quelle inégalité retrouve-t-on ?

(c) *En déduire l'inégalité de Minkowski :*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^p\right)^{1/p}.$$

Indication : *on pourra écrire $(a_i + b_i)^p = a_i(a_i + b_i)^{p-1} + b_i(a_i + b_i)^{p-1}$ et appliquer l'inégalité de Hölder.*

Exercice 4 *On se donne un entier $n \geq 1$ et des réels $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tous non nuls.*

(a) *Montrer que*

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k^2}\right) \geq n^2.$$

Indication : *on pourra utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz.*

(b) *En déduire que*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \geq \frac{6n}{(n+1)(2n+1)}.$$

Exercice 5 (Inégalité de Bernouilli) (a) *Pour $n \geq 2$, on note P_n la fonction polynômiale définie par*

$$P_n(x) = x^n - 1 - n(x-1).$$

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a $P_n(x) \geq 0$.

Indication : *on pourra soit raisonner par récurrence, soit faire une étude de fonctions.*

(b) *En déduire que pour tout réel $a > -1$ et tout entier naturel n, on a*

$$(1+a)^n \geq 1 + na.$$

(c) *Dans le cas où $a \geq 0$, retrouver cette inégalité, en utilisant la formule du binôme de Newton.*

Exercice 6 (Moyennes arithmétiques, géométriques et harmoniques.) *Pour tout entier $n \geq 2$ et tout $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$, on note respectivement*

$$A_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k, \quad G_n(x) = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} x_k}, \quad H_n(x) = \frac{n}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}},$$

les moyennes arithmétiques, géométriques et harmoniques des réels $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

(a) *Etablir une relation entre $H_n(x)$ et $A_n(y)$ où $y = (1/x_k)_{1\leq k\leq n}$.*

(b) *En utilisant la stricte concavité de la fonction $\ln$ sur $\mathbb{R}_+^*$, montrer que $G_n(x) \leq A_n(x)$. Dans quels cas, a-t-on égalité ?*

(c) *En déduire finalement que*

$$\frac{n}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}} \leq \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} x_k} \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k.$$

Montrer que l'une des deux inégalités est réalisée si et seulement si tous les x_i sont égaux.